А.Н. Жаров, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия

Путем прямого разложения по амплитуде многомодовой начальной деформации равновесной сферической формы капли во втором порядке малости найдена форма образующей нелинейно осесимметрично осциллирующей заряженной капли вязкой несжимаемой электропроводной жидкости. Показано, что форма капли как функция времени представлена бесконечным рядом по корням дисперсионного уравнения и конечной суммой по номерам изначально возбужденных мод. Рассмотрен предельный переход к идеальной жидкости.

1. Исследование капиллярных осцилляций и устойчивости заряженной капли несжимаемой жидкости представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями [1–3], в связи с чем такая задача неоднократно решалась как в линейной, так и в нелинейной постановке. Однако задача аналитического расчета нелинейных осцилляций заряженной капли до сих пор решалась лишь в приближении идеальной жидкости [4–9], нелинейные анализы осцилляций вязких капель до сих пор выполняются лишь численными методами [10–11]. Попытка аналитического асимптотического расчета нелинейных осцилляций капли с произвольной вязкостью, предпринятая в [12], привела к весьма громоздким выражениям на финальной стадии анализа и трудностям чисто математического плана. Представляется, однако, что согласно анализу [13] отмеченные в [12] трудности удастся обойти. В работе задача о капиллярных колебаниях вязкой заряженной капли решена строго во втором порядке малости по амплитуде начального искажения ее формы и совершен предельный переход к идеальной жидкости.

2. Пусть имеется сферическая капля радиуса r_0 идеально проводящей несжимаемой вязкой жидкости с плотностью ρ, кинематической вязкостью ν, коэффициентом поверхностного натяжения σ, имеющая электрический заряд Q. Поле скоростей течения жидкости в капле обозначим $\vec{U}(r, \vartheta, t)$, поле давлений – $P(r, \vartheta, t)$, потенциалы электрического поля в окрестности капли и на ее поверхности обозначим $\phi(r, \vartheta, t)$ и $\phi_S(t)$ соответственно. Уравнение поверхности капли, совершающей осесимметричные колебания в любой момент времени t, запишем в сферической системе координат r, ϑ, φ в виде

$$F(r,\vartheta,t) \equiv r - r_0 - \xi(\vartheta,t) = 0; \tag{1}$$

с начальным условием

$$t = 0: \qquad \xi = \varepsilon \sum_{m\in\Omega} h_m P_m(\mu); \qquad \mu \equiv \cos(\vartheta), \tag{2}$$

где ε – малый параметр, характеризующий амплитуду начального возмущения; $P_m(\mu)$ – полином Лежандра порядка m; Ω – множество индексов изначально возбужденных мод, суперпозиция которых определяет начальную деформацию равновесной сферической формы капли; h_m – константы, учитывающие парциальный вклад m-й моды в формирование начальной деформации капли $\sum_{m\in\Omega} h_m = 1$.

Математическая формулировка задачи о расчете нелинейных осесимметричных капиллярных колебаний заряженной капли вязкой несжимаемой электропроводной жидкости, форма которой в начальный момент времени определяется (1)–(2), состоит из:

уравнения Навье–Стокса

$$\partial_t \vec{U} + \left(\vec{U}\cdot\nabla\right)\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\,grad p + \nu\Delta\vec{U}\ ;$$

уравнения неразрывности

$$div\,\vec{U} = 0\ ;$$

начального условия для поля скоростей и условия ограниченности поля скоростей в центре капли

$$t = 0: \qquad \vec{U} = 0\ ;$$

$$r \to 0: \qquad \vec{U} < \infty\ ;$$

уравнения Лапласа для электрического потенциала (принимается, что если гидродинамические скорости много меньше скорости передачи электродинамических сигналов, то уравнения Максвелла для электрического потенциала сводятся к уравнению Лапласа):

$$\Delta\phi = 0\ ;$$

условия ограниченности напряженности электрического поля собственного заряда капли на бесконечности

$$r \to +\infty: \qquad \nabla\phi \to 0\ ;$$

условия эквипотенциальности поверхности капли

$$r = r_0 + \xi\left(\vartheta, t\right): \qquad \phi = \phi_S(t)\ ;$$

условия постоянства ее полного заряда и объема

$$\int_S \vec{n}\cdot\nabla\phi\ \ dS = -4\pi Q\ ; \qquad S = \left\{r,\vartheta,\varphi \middle| \, r = r_0 + \xi;\ 0 \le \vartheta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}\ ;$$

$$\int_V r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = \frac{4\pi}{3} r_0^3\ ; \qquad V = \left\{r,\vartheta,\varphi \middle| \, 0 \le r \le r_0 + \xi;\ 0 \le \vartheta \le \pi;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}\ ;$$

условия неподвижности центра масс

$$\int_V \vec{r}\cdot r^2\ \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi = 0\ ;$$

кинематического и динамических граничных условий на свободной поверхности капли

$$r = r_0 + \xi\left(\vartheta, t\right): \qquad \partial_t F + \left(\vec{U}\cdot\nabla\right)F = 0\ ;$$

$$\vec{\tau}\cdot\left(\vec{n}\cdot\nabla\right)\vec{U} + \vec{n}\cdot\left(\vec{\tau}\cdot\nabla\right)\vec{U} = 0\ ;$$

$$-p + 2\,\rho\,\nu\,\vec{n}\cdot\left(\vec{n}\cdot\nabla\right)\vec{U} - p_Q + p_\sigma = 0\ . \tag{3}$$

Символ ∂_t означает частную производную по переменной *t*; $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ – орты касательной и внешней нормали к свободной поверхности капли, определяемой соотношением (1); p_σ и p_Q – давления сил поверхностного натяжения и электрического поля собственного заряда, определяющиеся выражениями:

$$p_Q = \frac{1}{8\,\pi}\left(\nabla\,\phi\right)^2, \qquad p_\sigma = \sigma\left(div\,\vec{n}\right).$$

3. Выписанная система уравнений является нелинейной, и ее решение будем искать методом прямого разложения по малому параметру ε, для чего все искомые величины задачи представим в виде рядов по ε:

$$\xi\left(\vartheta, t\right) = \varepsilon\,\xi^{(1)}\left(\vartheta, t\right) + \varepsilon^2\,\xi^{(2)}\left(\vartheta, t\right) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^3\right);$$

$$\vec{U}\left(r,\vartheta,t\right) = \varepsilon\,U_r^{(1)}\left(r,\vartheta,t\right)\vec{e}_r + \varepsilon^2\,U_r^{(2)}\left(r,\vartheta,t\right)\vec{e}_r +$$

$$+\varepsilon\,U_\vartheta^{(1)}\left(r,\vartheta,t\right)\vec{e}_\vartheta + \varepsilon^2\,U_\vartheta^{(2)}\left(r,\vartheta,t\right)\vec{e}_\vartheta + O\left(\varepsilon^3\right);$$

$$p\left(r,\vartheta,t\right) = p^{(0)}\left(r,\vartheta,t\right) + \varepsilon\,p^{(1)}\left(r,\vartheta,t\right) + \varepsilon^2 p^{(2)}\left(r,\vartheta,t\right) + O\left(\varepsilon^3\right);$$

$$\phi\left(r,\vartheta,t\right) = \phi^{(0)}\left(r,t\right) + \varepsilon\,\phi^{(1)}\left(r,\vartheta,t\right) + \varepsilon^2\,\phi^{(2)}\left(r,\vartheta,t\right) + O\left(\varepsilon^3\right);$$

$$\phi_S(t)=\phi_S^{(0)}(t)+\varepsilon\,\phi_S^{(1)}(t)+\varepsilon^2\,\phi_S^{(2)}(t)+O(\varepsilon^3), \tag{4}$$

где $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\vartheta$ – орты сферической системы координат.

Подставляя данные разложения в выписанную систему уравнений и приравнивая коэффициенты при различных степенях малого параметра ε, разделим исходную нелинейную задачу на совокупность связанных между собой линейных неоднородных задач.

3а. В нулевом порядке малости получим задачу:

$$\Delta\phi^{(0)}=0;$$

$$r\to+\infty: \qquad \nabla\phi^{(0)}\to 0;$$

$$r=r_0: \qquad \phi^{(0)}=\phi_S^{(0)}(t);$$

$$\int_{-1}^{1} r_0^2\partial_r\phi^{(0)}d(\cos\vartheta)=-2Q;$$

$$-p^{(0)}-p_Q^{(0)}+p_\sigma^{(0)}=0,$$

решение которой имеет вид

$$\phi^{(0)}=\frac{Q}{r}; \qquad \phi_S^{(0)}=\frac{Q}{r_0}; \qquad p^{(0)}+\frac{Q^2}{8\pi r_0^4}=\frac{2\sigma}{r_0}. \tag{5}$$

3б. Выделяя слагаемые, содержащие малый параметр в первой степени, выделим задачу первого порядка малости

$$\partial_t U_r^{(1)}=-\frac{1}{\rho}\partial_r\, p^{(1)}+\nu\left(\frac{1}{r^2}\partial_{\vartheta\vartheta}U_r^{(1)}+\frac{ctg(\vartheta)}{r^2}\partial_\vartheta U_r^{(1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r}\partial_{r\vartheta}U_\vartheta^{(1)}-\frac{ctg(\vartheta)}{r}\partial_r U_\vartheta^{(1)}-\frac{1}{r^2}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)}-\frac{ctg(\vartheta)}{r^2}U_\vartheta^{(1)}\right);$$

$$\partial_t U_\vartheta^{(1)}=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\partial_\vartheta\, p^{(1)}+\nu\left(\partial_{rr}U_\vartheta^{(1)}+\frac{2}{r}\,\partial_r U_\vartheta^{(1)}-\frac{1}{r}\partial_{r\vartheta}U_r^{(1)}\right);$$

$$\partial_r U_r^{(1)}+\frac{2}{r}U_r^{(1)}+\frac{1}{r}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)}+\frac{ctg(\vartheta)}{r}U_\vartheta^{(1)}=0;$$

$$t=0: \qquad \vec{U}^{(1)}=0; \qquad \xi^{(1)}=\varepsilon\sum_{m\in\Omega}h_m P_m(\mu);$$

$$r\to 0: \qquad \vec{U}^{(1)}<\infty;$$

$$\Delta\phi^{(1)}=0;$$

$$r\to+\infty: \qquad \nabla\phi^{(1)}\to 0;$$

$$r=r_0: \qquad \phi^{(1)}+\xi^{(1)}\,\partial_r\phi^{(0)}=\phi_S^{(1)}(t);$$

$$\int_{-1}^{1}\left(r_0\,\partial_r\phi^{(1)}+\xi^{(1)}\left(r_0\,\partial_{rr}\phi^{(0)}+2\,\partial_r\phi^{(0)}\right)\right)d(\mu)=0;$$

$$\int_{-1}^{1}\xi^{(1)}d(\mu)=0; \qquad \int_{-1}^{1}\xi^{(1)}P_1(\mu)\,d(\mu)=0;$$

$$\partial_t\xi^{(1)}=U_r^{(1)}; \qquad \partial_r U_\vartheta^{(1)}+\frac{1}{r}\partial_\vartheta U_r^{(1)}-\frac{1}{r}U_\vartheta^{(1)}=0;$$

$$-p^{(1)}+2\rho\nu\,\partial_r U_r^{(1)}-\frac{1}{4\pi}\partial_r\phi^{(0)}\left(\partial_r\phi^{(1)}+\xi^{(1)}\,\partial_{rr}\phi^{(0)}\right)-\frac{\sigma}{r_0^2}\left(2+\Delta_\Omega\right)\xi^{(1)}=0, \tag{6}$$

где $\Delta_\Omega=\partial_{\vartheta\vartheta}+\mathrm{ctg}(\vartheta)\,\partial_\vartheta$ – угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Решение системы (7), с учетом (5), можно записать в виде [13]:

$$\xi^{(1)}(\vartheta,t)=\sum_{n\in\Omega}\xi_n^{(1)}(t)P_n(\mu)\ ; \qquad U_r^{(1)}(r,\vartheta,t)=\sum_{n\in\Omega}U_{rn}^{(1)}(r,t)P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(1)}(r,\vartheta,t)=\sum_{n\in\Omega}U_{\vartheta n}^{(1)}(r,t)\,\partial_\vartheta P_n(\mu);\qquad p^{(1)}(r,\vartheta,t)=\sum_{n\in\Omega}p_n^{(1)}(r,t)\,P_n(\mu);$$

$$\varphi^{(1)}(r,\vartheta,t)=\sum_{n\in\Omega}\varphi_n^{(1)}(r,t)\,P_n(\mu);\qquad \mu\equiv\cos(\vartheta),\tag{7}$$

где $$\xi_n^{(1)}(t)=\sum_{j=1}^{+\infty}a_{\xi n}\left(S_n^{(j)}\right)\exp\left(S_n^{(j)}t\right);\qquad \phi_n^{(1)}(r,t)=\frac{Q}{r_0^2}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{n+1}\xi_n^{(1)}(t);$$

$$U_{rn}^{(1)}(r,t)=\sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_n\left(S_n^{(j)}\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}+b_n\left(S_n^{(j)}\right)\frac{1}{r}\,\frac{j_n\left(\chi_n^{(j)}r\right)}{j_n\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}\right)\exp\left(S_n^{(j)}t\right);$$

$$U_{\vartheta n}^{(1)}(r,t)=\sum_{j=1}^{+\infty}\left(a_n\left(S_n^{(j)}\right)\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1}+b_n\left(S_n^{(j)}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{j_n\left(\chi_n^{(j)}r\right)}{j_n\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}+\frac{\chi_n^{(j)}}{n+1}\frac{j_{n+1}\left(\chi_n^{(j)}r\right)}{j_n\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}\right)\right)\frac{\exp\left(S_n^{(j)}t\right)}{n};$$

$$a_{\xi n}\left(S_n^{(j)}\right)=\left(S_n^{(j)}+2(n-1)(2n+1)\frac{\nu}{r_0^2}+2(n-1)^2(n+1)\frac{\nu}{\eta_n\left(1,\chi_n^{(j)}\right)r_0^2}\right)\frac{h_n}{\partial_{S_n^{(j)}}D_n\left(S_n^{(j)}\right)};$$

$$a_n\left(S_n^{(j)}\right)=\left(\left(2\left(n^2-1\right)+\left(r_0\chi_n^{(j)}\right)^2\right)\frac{1}{2\chi_n^{(j)}r_0}\,\frac{j_n\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}{j_{n+1}\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}-1\right)\frac{h_n}{\eta_n\left(1,\chi_n^{(j)}\right)}\frac{\omega_n^2}{\partial_{S_n^{(j)}}D_n\left(S_n^{(j)}\right)};$$

$$b_n\left(S_n^{(j)}\right)=2\left(n^2-1\right)\left(1-\frac{2}{\chi_n^{(j)}r_0}\frac{j_{n+1}\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}{j_n\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}\right)^{-1}\frac{h_n\,\omega_n^2\,\nu}{r_0\,S_n^{(j)}\,\partial_{S_n^{(j)}}D_n\left(S_n^{(j)}\right)};\quad \chi_n^{(j)}=\sqrt{\frac{S_n^{(j)}}{\nu}};$$

$$\partial_{S_n^{(j)}}D_n\left(S_n^{(j)}\right)=2S_n^{(j)}+2(n-1)(2n+1)\frac{\nu}{r_0^2}+(n-1)^2(n+1)\frac{\nu}{r_0^2}\times$$

$$\times\left(2+\frac{(2n+1)\chi_n^{(j)}r_0}{2}\frac{j_n\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}{j_{n+1}\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}+\frac{\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)^2}{2}\left(1-\left(\frac{j_n\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}{j_{n+1}\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}\right)^2\right)\right)\frac{1}{\eta_n\left(1,\chi_n^{(j)}\right)};$$

$$D_n\left(S_n^{(j)}\right)=\left(S_n^{(j)}\right)^2+2(n-1)(2n+1)\frac{S_n^{(j)}\,\nu}{r_0^2}+2(n-1)^2(n+1)\frac{S_n^{(j)}\,\nu}{\eta_n\left(1,\chi_n^{(j)}\right)r_0^2}+\omega_n^2;$$

$$\omega_n^2=\frac{\sigma}{\rho\,r_0^3}n(n-1)(n+2-W);\quad W=\frac{Q^2}{4\pi\sigma\,r_0^3};\quad \eta_n\left(q,\chi_n^{(j)}\right)=q-\frac{r_0\chi_n^{(j)}}{2}\,\frac{j_n\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)}{j_{n+1}\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)};$$

$S_n^{(j)}$ – корень дисперсионного уравнения $D_n\left(S_n^{(j)}\right)=0$, а $j_n\left(\chi_n^{(j)}r_0\right)$ – модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода порядка n; q – величина, принимающая значения целых чисел.

3в. Во втором порядке малости получим задачу:

$$\partial_t U_r^{(2)}+U_r^{(1)}\partial_r U_r^{(1)}+\frac{1}{r}U_\vartheta^{(1)}\partial_\vartheta U_r^{(1)}-\frac{1}{r}\left(U_\vartheta^{(1)}\right)^2=-\frac{1}{\rho}\partial_r\,p^{(2)}+\nu\left(\frac{1}{r^2}\partial_{\vartheta\vartheta}U_r^{(2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{ctg}(\vartheta)}{r^2}\partial_\vartheta U_r^{(2)}-\frac{1}{r}\partial_{r\vartheta}U_\vartheta^{(2)}-\frac{ctg(\vartheta)}{r}\partial_r U_\vartheta^{(2)}-\frac{1}{r^2}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(2)}-\frac{\mathrm{ctg}(\vartheta)}{r^2}U_\vartheta^{(2)}\right);$$

$$\partial_t U_\vartheta^{(2)}+U_r^{(1)}\partial_r U_\vartheta^{(1)}+\frac{1}{r}U_\vartheta^{(1)}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)}+\frac{1}{r}U_r^{(1)}U_\vartheta^{(1)}=$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\partial_\vartheta\,p^{(2)}+\nu\left(\partial_{rr}U_\vartheta^{(2)}+\frac{2}{r}\,\partial_r U_\vartheta^{(2)}-\frac{1}{r}\partial_{r\vartheta}U_r^{(2)}\right);$$

$$\partial_r U_r^{(2)}+\frac{2}{r}U_r^{(2)}+\frac{1}{r}\partial_\vartheta U_\vartheta^{(2)}+\frac{\mathrm{ctg}(\vartheta)}{r}U_\vartheta^{(2)}=0.$$

$$\Delta\phi^{(2)}=0;$$

$$t=0: \qquad \vec{U}^{(2)}=0;$$

$$\xi^{(2)}=-\frac{1}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\frac{h_m^2}{2m+1}P_0(\mu)-\frac{9}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\frac{(m+1)\,h_m\,h_{m+1}}{(2m+1)(2m+3)}P_1(\mu);$$

$$r\to 0: \qquad \vec{U}^{(2)}<\infty;$$

$$r\to+\infty: \qquad \nabla\phi^{(2)}\to 0;$$

$$r=r_0: \qquad \varphi^{(2)}+\xi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}+\frac{1}{2}\left(\xi^{(1)}\right)^2\partial_{rr}\phi^{(0)}+\xi^{(1)}\partial_r\phi^{(1)}=\phi_S^{(2)}(t);$$

$$\int_{-1}^{1}\Big[r_0^2\,\partial_r\phi^{(2)}+r_0\,\xi^{(1)}\left(r_0\,\partial_{rr}\phi^{(1)}+2\,\partial_r\phi^{(1)}\right)+r_0\xi^{(2)}\left(r_0\partial_{rr}\phi^{(0)}+2\partial_r\phi^{(0)}\right)+$$

$$+\left(\xi^{(1)}\right)^2\left(\frac{1}{2}r_0^2\partial_{rrr}\phi^{(0)}+2r_0\partial_{rr}\phi^{(0)}+\partial_r\phi^{(0)}\right)-\partial_\vartheta\xi^{(1)}\partial_\vartheta\phi^{(1)}\Big]d(\mu)=0;$$

$$\int_{-1}^{1}\left(r_0\,\xi^{(2)}+\left(\xi^{(1)}\right)^2\right)d(\mu)=0; \qquad \int_{-1}^{1}\left(2r_0\xi^{(2)}+3\left(\xi^{(1)}\right)^2\right)P_1(\mu)\,d(\mu)=0;$$

$$-\partial_t\xi^{(2)}+U_r^{(2)}+\partial_rU_r^{(1)}\,\xi^{(1)}-\frac{1}{r_0}U_\vartheta^{(1)}\,\partial_\vartheta\xi^{(1)}=0.$$

$$\frac{1}{r_0}\partial_\vartheta U_r^{(2)}+\partial_rU_\vartheta^{(2)}-\frac{1}{r_0}U_\vartheta^{(2)}+\left(\frac{1}{r_0}\partial_{r\vartheta}U_r^{(1)}-\frac{1}{r_0^2}\partial_\vartheta U_r^{(1)}+\partial_{rr}U_\vartheta^{(1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r_0}\partial_rU_\vartheta^{(1)}+\frac{1}{r_0^2}U_\vartheta^{(1)}\right)\xi^{(1)}-2\left(\frac{1}{r_0^2}\,\partial_\vartheta U_\vartheta^{(1)}+\frac{1}{r_0^2}U_r^{(1)}-\frac{1}{r_0}\partial_rU_r^{(1)}\right)\partial_\vartheta\xi^{(1)}=0;$$

$$-p^{(2)}-\frac{\sigma}{r_0^2}\left(2+\Delta_\Omega\right)\xi^{(2)}+\frac{2\sigma}{r_0^3}\xi^{(1)}\left(1+\Delta_\Omega\right)\xi^{(1)}-\frac{1}{8\pi}\Big[2\xi^{(2)}\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(0)}+$$

$$+\left(\xi^{(1)}\right)^2\left(\left(\partial_{rr}\phi^{(0)}\right)^2+\partial_{rrr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(0)}\right)+\frac{1}{r_0^2}\left(\partial_\vartheta\phi^{(1)}\right)^2+\left(\partial_r\phi^{(1)}\right)^2+2\partial_r\phi^{(2)}\partial_r\phi^{(0)}+$$

$$+2\xi^{(1)}\left(\partial_{rr}\phi^{(0)}\partial_r\phi^{(1)}+\partial_{rr}\phi^{(1)}\partial_r\phi^{(0)}\right)\Big]+2\rho\nu\,\partial_rU_r^{(2)}-\left(\partial_r p^{(1)}-2\rho\nu\,\partial_{rr}U_r^{(1)}\right)\xi^{(1)}-$$

$$-2\rho\nu\left(\frac{1}{r_0^2}\,\partial_\vartheta U_r^{(1)}+\frac{1}{r_0}\partial_rU_\vartheta^{(1)}-\frac{1}{r_0^2}\,U_\vartheta^{(1)}\right)\partial_\vartheta\xi^{(1)}=0. \qquad (8)$$

Подставив в систему (8) решения (5) и (7) задач нулевого и первого порядков малости, получим систему линейных неоднородных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно величин $U_r^{(2)}$, $U_\vartheta^{(2)}$, $p^{(2)}$, $\xi^{(2)}$, $\phi^{(2)}$, которые представим в виде разложений:

$$U_r^{(2)}(r,\vartheta,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}U_{rn}^{(2)}(r,t)\,P_n(\mu); \quad U_\vartheta^{(2)}(r,\vartheta,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}U_{\vartheta n}^{(2)}(r,t)\,\partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$\xi^{(2)}(\vartheta,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\xi_n^{(2)}(t)\,P_n(\mu); \qquad \phi^{(2)}(r,\vartheta,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\phi_n^{(2)}(r,t)\,P_n(\mu);$$

$$p^{(2)}(r,\vartheta,t)=\sum_{n=0}^{+\infty}p_n^{(2)}(r,t)\,P_n(\mu); \qquad \mu\equiv\cos(\vartheta).$$

Опуская весьма громоздкие, но вполне преодолимые математические выкладки, выпишем финальное выражение для образующей формы нелинейно осесимметрично осциллирующей капли вязкой несжимаемой электропроводной жидкости как функцию времени и полярного угла:

$$r(\vartheta,t)=r_0+\varepsilon\sum_{n\in\Omega}\sum_{j=1}^{+\infty}a_{\xi n}\left(S_n^{(j)}\right)\exp\left(S_n^{(j)}\,t\right)P_n(\mu)\;-$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\sum_{l,g=1}^{+\infty}\frac{a_{\xi m}\left(S_m^{(l)}\right)a_{\xi m}\left(S_m^{(g)}\right)}{2m+1}\exp\left(\left(S_m^{(l)}+S_m^{(g)}\right)t\right)P_0(\mu)-$$

$$-\frac{9\varepsilon^2}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\sum_{l,g=1}^{+\infty}\frac{(m+1)\,a_{\xi m}\left(S_m^{(l)}\right)a_{\xi m+1}\left(S_{m+1}^{(g)}\right)}{(2m+1)(2m+3)}\exp\left(\left(S_m^{(l)}+S_{m+1}^{(g)}\right)t\right)P_1(\mu)+$$

$$+\varepsilon^2\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k,m\in\Omega}\left\{\sum_{l,g,j=1}^{+\infty}\frac{\varsigma_{kmn}^{lg}\left(S_n^{(j)},S_k^{(l)},S_m^{(g)}\right)}{\left(S_n^{(j)}-S_k^{(l)}-S_m^{(g)}\right)\partial_{S_n^{(j)}}D_n\left(S_n^{(j)}\right)}\exp\left(S_n^{(j)}\,t\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{l,g=1}^{+\infty}\frac{\varsigma_{kmn}^{lg}\left(S_k^{(l)}+S_m^{(g)},S_k^{(l)},S_m^{(g)}\right)}{D_n\left(S_k^{(l)}+S_m^{(g)}\right)}\exp\left(\left(S_k^{(l)}+S_m^{(g)}\right)t\right)\right\}P_n(\mu). \qquad (9)$$

В этом выражении $S_m^{(j)}$ – корни дисперсионного уравнения задачи $D_n(S)=0$; $a_{\xi m}\left(S_m^{(l)}\right)$ и $\varsigma_{kmn}^{lg}\left(S_n^{(j)},S_k^{(l)},S_m^{(g)}\right)$ – коэффициенты, которые имеют весьма громоздкий вид и не приводятся ввиду ограниченности объема статьи. Главным результатом проведенного анализа является сам факт отыскания решения задачи о нелинейных осцилляциях заряженной капли вязкой электропроводной жидкости.

4. В выражении (9) перейдем к идеальной жидкости, полагая $\nu\to 0$. При этом воспользуемся асимптотическим представлением модифицированных сферических функций Бесселя первого рода, через которые сложным образом выражаются коэффициенты $a_{\xi m}$ и ς_{kmn}^{lg} при больших значениях аргумента [13]:

$$j_n(\chi)=\frac{\exp(\chi)}{2\,\chi}\left(1+O\left(\frac{1}{\chi}\right)\right);\qquad \chi\to\infty.$$

Используя это соотношение при $\nu\to 0$, находим:

$$a_{\xi k}\left(S_k^{(l)}\right)=\frac{h_k}{2};\;\; D_n(S)=S^2+\omega_n^2;\;\; \omega_n^2=\frac{\sigma}{\rho\,r_0^3}n(n-1)(n+2-W);\;\; W=\frac{Q^2}{4\pi\sigma\,r_0^3}; \qquad (10)$$

$$\varsigma_{kmn}^{lg}\left(S_n^{(j)},S_k^{(l)},S_m^{(g)}\right)=\frac{h_kh_m}{4r_0}\left[\left(\left(2\left(k(k+1)-1\right)+\left(3+k(m+1)-m(2m-2n+7)\right)\frac{W}{2}\right)\frac{n\,\sigma}{\rho\,r_0^3}+\right.\right.$$

$$\left.+\left(n-\frac{n}{2}\frac{\omega_k^2}{S_k^{(l)}S_m^{(g)}}-(m-1)\frac{S_n^{(j)}}{S_m^{(g)}}\right)\omega_m^2\right)K_{kmn}+\left(\frac{n\,\sigma}{\rho\,r_0^3}\frac{W}{2}+\left(S_n^{(j)}-\frac{n}{2k}\frac{\omega_k^2}{S_k^{(l)}}\right)\frac{\omega_m^2}{mS_m^{(g)}}\right)\alpha_{kmn}\right].$$

Поскольку для идеальной жидкости дисперсионное уравнение $D_n(S)=S^2+\omega_n^2=0$ имеет только два корня $S_n^{(1)}=i\,\omega_n$, $S_n^{(2)}=-i\,\omega_n$, то в выражении (10) суммирование по индексам *l*, *g*, *j* должно проводиться от 1 до 2, и притом необходимо принять $S_k^{(1)}=i\,\omega_k$, $S_k^{(2)}=-i\,\omega_k$, $S_m^{(1)}=i\,\omega_m$, $S_m^{(2)}=-i\,\omega_m$. Подставляя выражения (10) в (9) и изменяя, где нужно, порядок суммирования по немым индексам *k* и *m*, получаем выражение для образующей нелинейно осциллирующей капли идеальной жидкости в виде

$$r(\vartheta,t)=r_0+\varepsilon\sum_{n\in\Omega}h_n\cos(\omega_nt)P_n(\mu)\;-\frac{\varepsilon^2}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\frac{h_m^2\cos^2(\omega_mt)}{2m+1}P_0(\mu)-$$

$$-\frac{9\varepsilon^2}{r_0}\sum_{m\in\Omega}\frac{(m+1)\,h_m\,h_{m+1}}{(2m+1)(2m+3)}\cos(\omega_m\,t)\cos(\omega_{m+1}\,t)\,P_1(\mu)+$$

$$+\varepsilon^2\sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k,m\in\Omega}\frac{h_kh_m}{2r_0}\left\{\frac{\gamma_{kmn}+\eta_{kmn}\omega_k\omega_m}{\omega_n^2-(\omega_k+\omega_m)^2}\left(\cos\left((\omega_k+\omega_m)t\right)-\cos(\omega_nt)\right)+\right.$$

$$+\frac{\gamma_{kmn}-\eta_{kmn}\omega_k\omega_m}{\omega_n^2-\left(\omega_k-\omega_m\right)^2}\Big(\cos\big(\left(\omega_k-\omega_m\right)t\big)-\cos\left(\omega_n t\right)\Big)\Bigg\}P_n\left(\mu\right); \qquad (11)$$

$$\gamma_{kmn}=K_{kmn}\left[\left(n-k+1\right)\omega_k^2+\frac{n\,\sigma}{\rho\, r_0^3}\left(2\big(m\left(m+1\right)-1\big)+\big(3+m\left(k+1\right)-k\left(2k-2n+7\right)\big)\frac{W}{2}\right)\right]+$$

$$+\left[\frac{W}{2}\frac{n\,\sigma}{\rho\, r_0^3}+\frac{\omega_k^2}{k}\right]\alpha_{kmn};\ \eta_{kmn}=\left(\frac{n}{2}-k+1\right)K_{kmn}+\frac{\alpha_{kmn}}{k}\left(1+\frac{n}{2m}\right);$$

$$\alpha_{kmn}=-C_{k0m0}^{n0}\cdot C_{k(-1)m1}^{n0}\cdot\sqrt{k(k+1)m(m+1)}; \qquad K_{kmn}=\left(C_{k0m0}^{n0}\right)^2.$$

C_{k0m0}^{n0}, $C_{k(-1)m1}^{n0}$ – коэффициенты Клебша–Гордана.

Выражение (11) совпадает с выражением образующей нелинейно-осциллирующей заряженной капли идеальной жидкости [5–7].

5. Для удобства численного анализа полученного решения задачи о нелинейных капиллярных колебаниях заряженной осесимметричной вязкой капли перейдем к безразмерным переменным, принимая $\rho=\sigma=r_0=1$. Тогда все физические величины задачи будут выражаться в характерных масштабах. Так масштабами длины, плотности, времени, частоты, скорости, давления и кинематической вязкости будут соответственно величины

$$r_0;\quad \rho;\quad \sqrt{\frac{\rho\, r_0^3}{\sigma}};\quad \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\, r_0^3}};\quad \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\, r_0}};\quad \frac{\sigma}{r_0};\quad \sqrt{\frac{\sigma\, r_0}{\rho}}.$$

Примем изменение радиуса капель в пределах $r_0=10^{-4}-10^{-1}$ см. Поверхностное натяжение и плотность жидкостей в среднем можно характеризовать величинами σ = 50 см и ρ = 1 г/см^3. Тогда характерный масштаб измерения времени составит $5\cdot10^{-7}$–10^{-3} с, масштаб измерения частоты $2\cdot10^2$–10^7 с$^{-1}$, масштаб измерения скорости 20–700 см/с, масштаб давления $5\cdot10^2$– $5\cdot10^5$ дин/см, масштаб вязкости $7\cdot10^{-2}$ – 2 см^2/с.

При использованном обезразмеривании все величины задачи будут зависеть от параметра $W=Q^2/\left(4\pi\right)$, характеризующего устойчивость капли по отношению к собственному заряду; безразмерной кинематической вязкости жидкости ν; малого параметра ε; множества значений индексов изначально возбужденных мод Ω и констант h_n ($n\in\Omega$), учитывающих парциальный вклад n-й моды в формирование начальной формы капли.

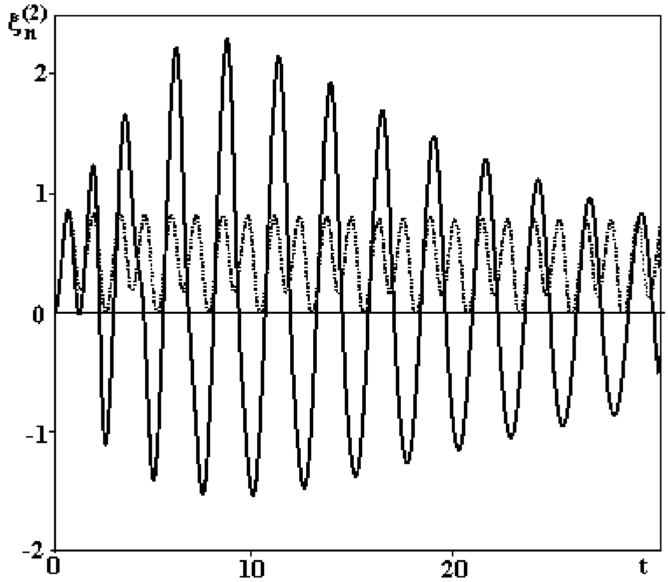

Рис. 1. Зависимости безразмерного коэффициента $\xi_2^{(2)}$ от безразмерного времени t, построенные при k = m = 2, h_2 = 1, ν = 0,01, W = 1, n = 2. Сплошная кривая построена для вязкой жидкости по выражению (9), а точечная - для идеальной жидкости по выражению (11)

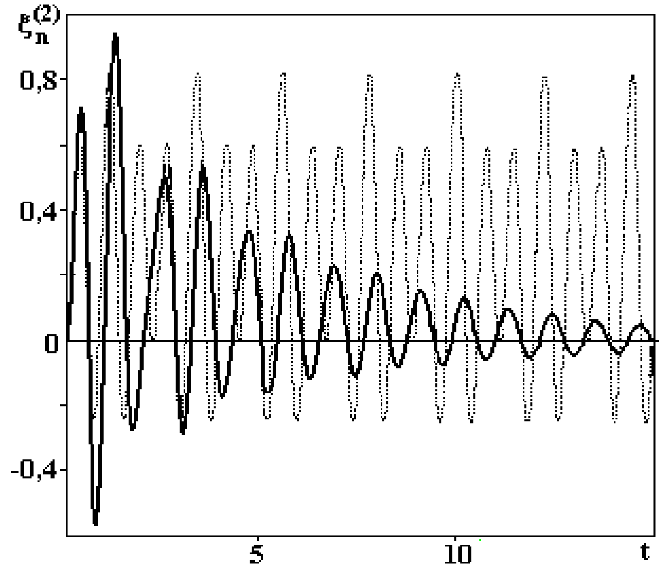

Рис. 2. Зависимости безразмерного коэффициента $\xi_4^{(2)}$ от безразмерного времени t, построенные при k = m = 2, h_2 = 1, ν = 0,02, W = 0, n = 4. Сплошная кривая построена по выражению (9), а точечная – по выражению (11)

Сравнение числовых значений коэффициентов $\xi_n^{(2)}(t)$ для случая маловязкой и идеальной жидкости указывает на то, что в маловязкой жидкости значения коэффициента $\xi_n^{(2)}(t)$ могут более чем в два с половиной раза превышать соответствующее значение для идеальной жидкости (см. рис.1 и 2). Причем наибольшее расхождение между коэффициентами $\xi_n^{(2)}(t)$, вычисленными для случая маловязкой и идеальной жидкости, наблюдаются для второй моды $n = 2$. Это связано с присутствием в маловязкой жидкости элементарных вихрей, которые для малых значений *n* медленно затухают и потому оказывают существенное воздействие на границу капли, искривляя ее поверхность.

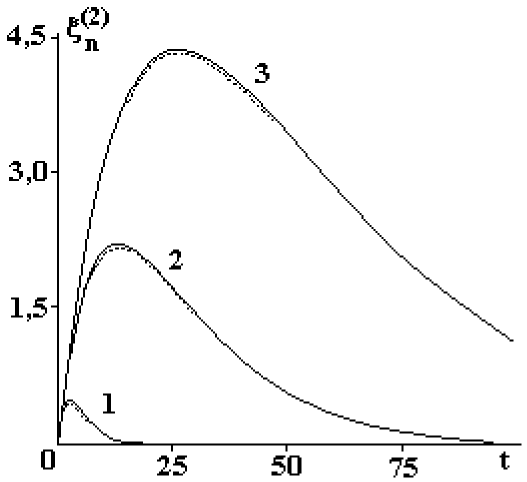

Рис. 3. Зависимости безразмерного коэффициента $\xi_2^{(2)}$ от безразмерного времени t, построенные при k = m = 2, h_2 = 1, ν = 1, n = 2 и различных значениях параметра W. Кривая 1 соответствует W = 3; 2 – W = 3,8; 3 – W = 3,9. Сплошные кривые построены по точному выражению (9), а точечные – по асимптотическому выражению для сильно вязких жидкостей

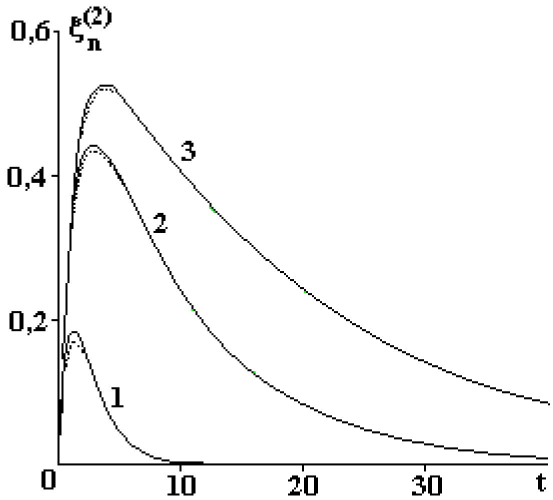

Рис. 4. Зависимости безразмерного коэффициента $\xi_4^{(2)}$ от безразмерного времени t, построенные при k = m = 2, h_2 = 1, ν = 1, n = 4 и различных значениях параметра W. Кривая 1 соответствует W = 3; 2 – W = 3,8; 3 – W = 3,9. Сплошные кривые построены по точному выражению (9), а точечные – по асимптотическому выражению для сильно вязких жидкостей

В случае жидкостей с немалой вязкостью, так же как и в случае маловязких жидкостей, наибольшие числовые значения коэффициента $\xi_n^{(2)}(t)$ наблюдаются при $n = 2$ (см. рис. 3 и 4). При этом максимальное значение данного коэффициента сильно увеличивается с увеличением параметра *W*. С увеличением же параметра *W* точность асимптотического выражения увеличивается, что связано с тем, что оно справедливо только в том случае, когда $\nu^2 >> \beta_n\, r_0^4\, \omega_n^2$.

Заключение. Нелинейные осцилляции капель вязких жидкостей можно исследовать аналитически классическими асимптотическими методами. В пределе идеальной жидкости получающиеся аналитические выражения достаточно компактны. Анализ найденного выражения для временной эволюции формы сильно деформированной капли вязкой жидкости позволяет проследить за временной эволюцией каждой моды.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-2946-2004-1 и гранта РФ ФИ № 03-01-00760.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорьев А.И.* Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.
2. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
3. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Деление заряженных капель во внешнем электрическом поле на части сравнимых размеров (обзор) // Электронная обработка материалов. 2000. № 4. С. 17–28.
4. *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* Nonlinear oscillations of inviscid drops and bubbles // J. Fluid Mech. 1983. V.127. P. 519–537.
5. *Ширяева С.О.* Нелинейные капиллярные колебания объемно заряженной диэлектрической капли // Изв. РАН МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
6. *Ширяева С.О.* Нелинейные осцилляции заряженной капли при начальном возбуждении соседних мод // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.
7. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В., Коромыслов В.А.* О резонансном взаимодействии нелинейных осцилляций заряженной капли, находящейся во внешней диэлектрической среде // Электронная обработка материалов. 2003. № 5. С. 30–36.
8. *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* О внутреннем нелинейном четырехмодовом взаимодействии капиллярных осцилляций заряженной капли // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 75–82.
9. *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Нелинейные колебания заряженной капли в третьем порядке малости по амплитуде многомодовой начальной деформации // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 9–19.
10. *Basaran O.A.* Nonlinear oscillations of viscous drops // J. Fluid Mech. 1992. V. 241. P. 169–198.
11. *Becker E., Hiller W.J., Kowalewski T.A.* Nonlinear dynamics of viscous droplets // J. Fluid Mech. 1994. V. 258. P. 191–216.
12. *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Световой В.Б., Григорьев А.И.* Формулировка задач об аналитическом расчете нелинейных движений вязкой жидкости со свободной поверхностью. Препринт №31. ИМИ РАН. Ярославль, 2001.
13. *Жаров А.Н., Григорьев А.И.* О временной эволюции формы поверхности, деформированной в начальный момент заряженной капли вязкой жидкости // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып.1. С. 22–31.

Поступила 25.01.05

Summary

The asymptotic analytical solution of a problem of nonlinear oscillation of charged viscous drop in second approximation on a amplitude of initial deformation of equilibrium spherical shape is presented.