А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, А.Н. Жаров, В.А. Коромыслов

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ ЗАРЯЖЕННЫХ КАПЕЛЬ. Часть 2. Внутреннее резонансное взаимодействие и излучение. Влияние внешних полей. Учет вязкости

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия

О нерезонансном механизме раскачки осцилляций основной моды и ее влиянии на устойчивость капли. С начала 90-х гг. прошлого века теоретические исследования нелинейных осцилляций капель и пузырей проводились З.С. Фенгом и Л.Дж. Лилом [1–6]. Впрочем, в [3–4] исследовалась так называемая трансляционная неустойчивость пузыря в жидкости, которую авторы объясняют резонансной перекачкой энергии из возбужденной нулевой моды ($n=0$), соответствующей радиальным осесимметричным осцилляциям, в первую ($n=1$), соответствующую поступательному движению пузыря. Как уже отмечалось, такое направление перекачки энергии осцилляций вызывает сомнение уже хотя бы потому, что противоречит законам механики, утверждающим невозможность движения центра масс замкнутой системы под влиянием произвольных движений внутри. В [1–3, 7–8] с использованием метода многих масштабов и бифуркационного анализа исследовалось резонансное взаимодействие нулевой моды, соответствующей радиальным осесимметричным осцилляциям, с поверхностными ($n \geq 2$) модами осцилляций. Аналогично тому, как это было проделано в [9], в уравнениях второго порядка малости, характеризующих временную эволюцию центрально-симметричной и поверхностных мод, приравнивались нулю комбинации секулярных слагаемых, и получалась система двух связанных нелинейных дифференциальных уравнений, имеющая смысл условий разрешимости задачи. Перекрестные слагаемые в этих уравнениях описывали взаимодействие центрально-симметричной и поверхностных мод. Эта система уравнений и подвергалась бифуркационному анализу.

Работа [6] посвящена исследованию нерезонансной перекачки энергии из высоких мод осцилляций заряженной капли в основную моду, приводящей к снижению порога устойчивости капли по отношению к собственному заряду. В основе проведенного рассмотрения лежит результат численного расчета временной зависимости амплитуд мод, возбуждающихся в заряженной капле идеальной несжимаемой жидкости за счет нелинейного взаимодействия во втором порядке малости по амплитуде начальной деформации. Выяснилось, что в отсутствие резонансного взаимодействия, когда начальная деформация определена высокими ($n > 2$) модами, амплитуда основной ($n=2$) моды при приближении величины собственного заряда капли к критическому (в смысле линейной устойчивости) может принимать значения, сравнимые с амплитудами начальной деформации, только за счет нелинейного взаимодействия. Этот эффект тем заметнее, чем ближе величина собственного заряда капли к критическому для реализации неустойчивости основной моды. Раскачка же сфероидальной деформации капли (рост амплитуды основной моды) приводит к снижению критического значения заряда. При этом неустойчивость капли по отношению к собственному заряду реализуется с помощью не транскритической бифуркации (как это имеет место для сферической капли), а седло-узловой [6]. Сам бифуркационный анализ проводился по схеме, выполненной в [1–3, 7–8] при исследовании взаимодействия центрально-симметричных осцилляций пузыря с поверхностными.

Следует отметить, что З.С. Фенг наследует неадекватную практику группы Р.А. Брауна: в проводимом в [6] бифуркационном анализе читателю предлагается обратиться к работе [3], в которой делается ссылка на работы [1–2, 7–8] и монографию А.Х. Найфе и Д.Т.Мука, посвященную нелинейным осцилляциям. В итоге проверка правильности полученных в анализе результатов превращается в самостоятельную проблему.

Оценки характерного времени реализации неустойчивости капли по отношению к поверхностному заряду на нелинейной стадии. В работах, посвященных исследованиям нелинейных осцилляций и устойчивости заряженных капель, не затрагивался вопрос о характерном времени реализации неустойчивости капли по отношению к собственному заряду. Такие исследования проведены в [9–14]. В [9] в рамках сфероидального приближения для формы заряженной капли (у которой основная мода (n=2) потеряла устойчивость) с учетом того, что критическая для начала реализации неустойчивости величина заряда капли зависит от амплитуды ее сфероидальных ($\sim P_2(\cos\theta)$) осцилляций [15], вычислено нелинейное интегральное уравнение, описывающее временную эволюцию амплитуды сфероидальной деформации неустойчивой капли. В [9] показано, что характерное время реализации неустойчивости капли идеальной несжимаемой электропроводной жидкости примерно обратно пропорционально амплитуде начальной виртуальной сфероидальной деформации. В [10] рассуждения, приведенные в [9], использованы для анализа временной эволюции незаряженной капли в однородном внешнем электростатическом поле. В [10] решено нелинейное интегральное уравнение для описания временной эволюции амплитуды сфероидальной деформации, неустойчивой по отношению к индуцированному заряду незаряженной капли электропроводной жидкости. В [12–13] результаты [9] обобщены на случай маловязкой жидкости, когда учет вязкости можно провести на основе введения декремента затухания, пропорционального вязкости жидкости. В [14] оценка характерного времени реализации неустойчивости капли идеальной электропроводной несжимаемой жидкости по отношению к собственному заряду (аналогична полученной в [9]) проведена по качественно иным соображениям, чем в [10–13]: на основе анализа решения для формы нелинейно осциллирующей заряженной капли, полученного во втором порядке малости методом прямого разложения по амплитуде начальной деформации. Кроме того, в [14] показано, что нелинейно осциллирующая заряженная капля совершает осцилляции в окрестности не сферической поверхности, как это было в линейном приближении, а фигуры, близкой к вытянутому сфероиду, степень вытянутости которого увеличивается с приближением величины собственного заряда капли к критическому для реализации неустойчивости значения. Последнее обстоятельство объясняет ранее отмечавшийся в [16–17] факт (подтверждающийся наблюдениями [18–19]), что при нелинейных осцилляциях $\sim P_2(\cos\theta)$ капля больше времени проводит в состоянии вытянутого сфероида, чем в сплюснутом. Это обстоятельство с учетом быстрого затухания высоких мод осцилляций вследствие влияния вязкости может объяснить деление заряженных капель на две части сравнимых размеров [20], наблюдавшееся и в экспериментах [21].

Исследование внутренних нелинейных резонансов. В [22–23] отдельно проанализированы в квадратичном приближении по амплитуде начальной деформации случаи одномодовой (для произвольной в отличие от [16, 24] моды, определяющей деформацию капли в начальный момент времени) и многомодовой (для произвольного конечного набора мод, формирующих деформацию капли в начальный момент времени) начальной деформации равновесной сферической формы заряженной капли. Такое отдельное рассмотрение позволило выяснить некоторые существенные особенности для понимания закономерностей реализации внутреннего нелинейного резонанса. Прежде всего отметим, что в [22–23] в отличие от большинства работ, посвященных анализу нелинейных осцилляций капли, аналитические выражения для образующей нелинейно осциллирующей капли, распределения потенциала поля скоростей и электростатического потенциала приведены полностью, что сделало явно наблюдаемыми особенности резонансного взаимодействия мод, возбужденных в начальный момент, с модами, возбуждающимися за счет нелинейного взаимодействия. Выяснилось, что условия резонансного взаимодействия определяются малыми знаменателями в поправках второго порядка малости, имеющими для многомодовой начальной деформации вид: $\omega_n^2-\left(\omega_m\pm\omega_j\right)^2$. При выполнении соотношения $\omega_n^2-\left(\omega_m\pm\omega_j\right)^2\approx 0$ знаменатели становятся малыми, а сами квадратичные поправки неограниченно большими, что приводит к нарушению асимптотичности разложения. Именно такое состояние и принято называть резонансным, и речь идет о трехмодовом внутреннем резонансном взаимодействии. В выписанных соотношениях индексы m и j нумеруют моды из спектра мод, определяющих форму начальной деформации капли, а индекс n определяет номер моды, раскачивающейся за счет внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия. Иными словами, при многомодовой начальной деформации капли всякая мода, раскачивающаяся за счет внутреннего нелинейного резонанса во втором порядке малости по амплитуде начальной деформации, черпает энергию двух спектров мод, определяющих начальную деформацию. Среди возможных комбинаций мод из спектра начальной деформации существует и вариант $m = j$, то есть раскачиваемая мода дважды взаимодействует с одной из спектра начальной деформации. В этом случае условие на частоты резонансно-взаимодействующих мод принимает вид: $\omega_n^2 - 2^2 \cdot \omega_m^2 \approx 0$, такое резонансное взаимодействие называется вырожденным (но остается формально трехмодовым). То есть получаем то условие, которое реализуется во втором порядке малости по амплитуде одномодовой начальной деформации капли [22]. Именно такие резонансные ситуации обсуждались в [16, 24]. Для четырехмодового вырожденного резонанса условие на частоты имеет сходный вид: $\omega_n^2 - 3^2 \cdot \omega_m^2 \approx 0$ [25–27].

Интересно отметить, что величина собственного заряда капли при докритической (в смысле линейной) устойчивости его величине слабо влияет на возможность реализации резонансного взаимодействия вследствие малости расстройки частот (по сравнению с точным резонансом), вызванной варьированием величины заряда [28]. Это приводит к тому, что резонансы, реализующиеся в нелинейно осциллирующей капле, определяются в основном спектром мод, обусловливающих начальную деформацию капли. Отклонение величины собственного заряда капли от соответствующего точному положению резонанса приводит лишь к уменьшению амплитуды резонансно-раскачиваемой моды и характерного времени перекачки энергии.

Из условий $\omega_n^2 - 2^2 \cdot \omega_m^2 \approx 0$ или $\omega_n^2 - 3^2 \cdot \omega_m^2 \approx 0$, учитывая, что $\omega^2_k \equiv k(k-1)[(k+2) - W]$, где $W \equiv (Q^2/4\pi\sigma R^3)$, несложно найти в аналитическом виде критические значения параметра W, при которых реализуются вырожденные резонансные трех- и четырехмодовые ситуации для n и m мод:

$$W_{n,m} \equiv \frac{n(n-1)(n+2) - j^2 m(m-1)(m+2)}{n(n-1) - j^2 m(m-1)}; \qquad j = 2;\ 3.$$

Интересной особенностью внутренних нелинейных вырожденных трехмодовых резонансов является асимметрия в направлении переноса энергии между резонансно-взаимодействующими модами. Появляющиеся в нелинейных поправках к амплитудам уже во втором порядке малости вследствие нелинейного взаимодействия резонансные множители $\sim[\omega_n^2 - \left(\omega_m \pm \omega_j\right)^2]^{-1}$ имеют различный вид в зависимости от того, какая мода определяет начальную деформацию, и могут иметь как резонансный, так и нерезонансный вид [22–23], что и определяет направление переноса энергии. В результате при вырожденных трехмодовых резонансных взаимодействиях энергия может перекачиваться резонансным образом только из мод с малыми к модам с большими номерами. Направление перекачки энергии при вырожденных четырехмодовых взаимодействиях до сих пор никто не исследовал. Следует отметить, что вырожденных четырехмодовых взаимодействий может быть несколько типов в зависимости от того, сколько мод участвует во взаимодействии – две или три, и между какими модами идет взаимодействие: только между модами, определяющими начальную деформацию, или с включением мод, возбуждающихся во втором порядке малости за счет нелинейного взаимодействия.

При трехмодовых взаимодействиях, когда три моды различны, то есть при вторичном комбинационном резонансе, энергия уже может перекачиваться из высоких мод в низкие. Но основная мода в такое взаимодействие не включается: наиболее низкая, которая может раскачиваться за счет резонансной перекачки энергии из высоких мод в трехмодовых вторичных комбинационных резонансах, – третья [29].

При четырехмодовых резонансных взаимодействиях, обнаруживаемых в расчетах третьего порядка малости [25–27, 30], когда четыре взаимодействующих моды различны, энергия уже может перекачиваться и от высоких мод к низким. В частности в [30] подробно исследовался вопрос о возможности раскачки при резонансном взаимодействии основной моды (n=2), когда начальная деформация определена высокими модами. Были проанализированы две резонансные ситуации: n=2, m=17, k=21, j=30, W=0,46 и n=2, m=10, k=30, j=32, W=0,98. Амплитуда основной моды в начальный момент времени равна нулю. Расчеты показали, что амплитуда резонансно-раскачиваемой в четырехмодовых взаимодействиях основной моды, появляющейся уже в первом порядке малости, оказывается весьма малой за счет низких численных коэффициентов и сравнима с амплитудой основной моды, появляющейся в расчетах третьего порядка малости за счет нелинейного взаимодействия в нерезонансной ситуации.

Интерес к раскачке амплитуды основной моды заряженной капли связан с обсуждением в научной литературе возможности зарождения разряда молнии с коронного разряда в окрестности крупной сильно заряженной капли (градины), падающей в грозовом облаке [30–34]. Основным возражением против возможности реализации подобного механизма является то обстоятельство, что величины зарядов на каплях (градинах) в грозовых облаках, регистрируемые при натурных наблюдениях, заметно меньше тех, при которых обсуждаемый механизм мог бы работать. Одна из возможностей снижения величины заряда капли, необходимого для зажигания интенсивного коронного разряда в ее окрестности, является раскачка амплитуды основной моды осцилляций капли за счет перекачки в нее энергии из возбужденных (например, за счет столкновений с мелкими капельками, концентрация которых в облаке наиболее высока) высоких мод. Проведенный в [22–23, 25–30, 35] анализ показал, что во втором порядке малости энергия не может резонансным образом перекачиваться из высоких мод в низкие; в третьем порядке малости такой перенос имеет место, но весьма не эффективен и не может привести к необходимому увеличению амплитуды основной моды капли. Тем не менее полностью от обсуждаемого механизма инициирования разряда молнии отказываться рано, поскольку согласно [33–34] коронный разряд у поверхности нелинейно осциллирующей капли может зажечься при достаточно большой амплитуде высоких мод осцилляций, когда заряд капли не превышает одной трети от критического в смысле линейной устойчивости.

Электромагнитное излучение от нелинейно осциллирующей заряженной капли. Исследования электромагнитного излучения, связанного с линейными осцилляциями заряженной капли, начались с работы [36] и продолжены в [37–40]. В работах показано, что линейно осциллирующая капля является источником квадрупольного электромагнитного излучения в диапазоне частот от десятков килогерц до десятка мегагерц. Электромагнитное излучение, связанное с линейными осцилляциями заряженных капель в облаке радиусом порядка километра, достаточно интенсивно (интегральная интенсивность излучения измеряется единицами ватт) и может быть источником радиопомех.

В [41–43] показано, что при нелинейных осцилляциях капли, когда в спектре мод, определяющих ее начальную деформацию, содержатся две или несколько мод с последовательными номерами, нелинейным образом возбуждается первая (трансляционная) мода осцилляций капли. Такая капля начинает осциллировать возле положения своего центра масс с амплитудой и частотой, определяющимися модами из спектра начальной деформации, которые привели к возбуждению трансляционной моды. Если жидкость капли электропроводна, то центр масс заряда при нелинейных осцилляциях трансляционной моды не будет совпадать с центром масс, возле которого происходят осцилляции, и капля становится источником дипольного электромагнитного излучения, интенсивность которого увеличивается с ростом электропроводности капли. Электромагнитное излучение будет идти на частотах порядка мегагерц с интенсивностью, измеряемой микроваттами для облака с радиусом порядка километра. Если жидкость диэлектрическая и заряд в ней однородно распределен по объему, то центр масс заряда будет совпадать с центром масс капли, и такая капля не будет источником дипольного излучения.

Акустическое излучение от нелинейно осциллирующей капли. Взаимодействие акустического поля с линейными осцилляциями заряженной капли [44–45] показало, что под действием акустического давления на поверхность капли в ней могут реализоваться как параметрические, так и вынужденные резонансные колебания, которые снижают порог устойчивости капли по отношению к собственному заряду. Линейные осцилляции капли в сжимаемой внешней среде делают ее источником квадрупольного акустического излучения. Капли с характеристиками, характерными для облаков и туманов естественного происхождения, будут излучать в звуковом и ультразвуковом диапазонах частот. Интегральное акустическое излучение из облака дождевых капель объемом 1 кубический километр на частоте порядка килогерца превышает порог слышимости.

Как отмечалось, при нелинейных осцилляциях капли (когда в спектре мод, определяющих начальную деформацию, имеются две с соседними номерами) в ней возбуждается трансляционная мода и осцилляции совершаются в окрестности центра масс, что делает ее при наличии сжимаемой внешней среды источником акустического излучения [42–44, 46]. Дипольное акустическое излучение нелинейно осциллирующей капли будет идти на частоте порядка 10 килогерц, а его интенсивность будет превышать интенсивность квадрупольного акустического излучения, связанного с линейными осцилляциями капли.

В работах [47–49] выявлено, что при нелинейных осцилляциях капли в сжимаемой среде может возникнуть источник монопольного акустического излучения, поскольку во втором порядке малости по амплитуде начальной деформации в ней возбуждаются осцилляции нулевой ($n=0$) моды. Заметим, что при нелинейных расчетах уже второго порядка малости наблюдается возбуждение нулевой центрально-симметричной моды, которое обнаружено в [22–23], но его не связали с возможностью генерации звука. Само возбуждение во втором порядке малости нулевой моды является следствием несжимаемости жидкости и пропорционально суперпозиции квадратов амплитуд мод, определяющих начальную деформацию. Монопольное излучение из объема в 1 км^3, занятого дождевыми каплями, идет на частотах порядка десятка килогерц и по интенсивности превосходит и дипольную, и квадрупольную компоненты интегрального акустического излучения. Это обстоятельство на первый взгляд представляется странным и поэтому тщательно проанализировано в [49].

При анализе [49] выяснилось, что проведенные в [42–48] аналитические оценки интенсивности акустического излучения от осциллирующей капли основаны на двух разложениях по независимым малым параметрам: мультиполям (по обратным степеням безразмерного расстояния от капли до точки наблюдения в так называемой «волновой зоне» излучения $1/kR$, k – волновое число звуковой волны) и отношению амплитуды осцилляций к радиусу капли ξ/R. Для дождевых капель $R \sim 0{,}01$ см, излучающей звук на частоте порядка килогерца, $1/kR \approx 3\cdot10^{-4}$, а $\xi/R \sim 0{,}1$. Монопольная, дипольная и квадрупольная компоненты акустического излучения соответствуют различным степеням малого параметра $1/kR$, а оценки линейной и нелинейной компонент излучения капли соответствуют первой и второй степеням ξ/R. Это обстоятельство и дает ответ на поставленный вопрос.

Нелинейные осцилляции заряженной капли в несжимаемой инерционной диэлектрической среде. В работах [50–52] исследуется влияние на закономерности реализации нелинейных осцилляций заряженной капли внешней диэлектрической среды, моделируемой несжимаемой жидкостью. В расчетах второго порядка малости по амплитуде начальной деформации капли обнаружено, что увеличение отношения плотности среды ρ_* к плотности жидкости капли ρ_0 приводит к увеличению амплитуды наиболее высокой из мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, независимо от того, какие из мод определяют начальную деформацию. Иными словами, максимум энергии в спектре мод капли в несжимаемой внешней среде, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, смещается (по сравнению с каплей, осциллирующей в вакууме) к наиболее высокой моде. С увеличением собственного заряда капли, уменьшением величины коэффициента межфазного натяжения, радиуса капли и диэлектрической проницаемости среды ε_* амплитуда основной моды осцилляций растет, что согласно [6] приводит к снижению критических условий реализации неустойчивости капли. В сущности, наличие инерционной внешней среды сказывается на частотах осцилляций капли, приводя к смещению в вакууме положений известных резонансов и появлению значительного количества новых [51]. Положение резонансов в пространстве номеров мод i, j для капли в среде зависит от двух параметров: $W \equiv (Q^2/4\pi\sigma R^3\varepsilon_*)$ и $\rho \equiv (\rho_*/\rho_0)$, для капли в вакууме они зависели лишь от W. При $i, j \le 100$ количество резонансных ситуаций для капли в среде измеряется тысячами, тогда как для капли в вакууме оно измерялось сотнями. Тем не менее расчеты подтвердили вывод [28] о том, что резонансное взаимодействие слабо зависит от величины заряда, соответствующей положениям точных резонансов. Иными словами, все возможные резонансы реализуются в зависимости от спектра возбужденных в начальный момент времени мод независимо от величины заряда капли. В [52] показано, что учет наличия окружающей среды, моделируемой несжимаемой жидкостью, в расчетах третьего порядка малости по величине многомодового начального возбуждения указывает существенное влияние на величину поправок к частотам капиллярных колебаний, приводя к их уменьшению с ростом ρ. Интересно, что поправки имеют резонансный вид: содержат резонансные множители $[\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_j)^2]^{-1}$. В окрестностях резонансов величины поправок становятся больше. Само наличие нелинейных поправок к частотам приводит к незначительному изменению (направление изменения зависит от знака поправки, который может быть и положительным, и отрицательным по разные стороны резонанса) критического значения собственного заряда капли, при котором она претерпевает неустойчивость.

Влияние на нелинейные осцилляции заряженной капли обтекающего ее потока несжимаемой внешней диэлектрической среды. В работе [53] в нелинейных расчетах второго порядка малости по амплитуде начальной деформации капли показано, что при наличии потока идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости, ламинарно обтекающего заряженную идеально проводящую каплю, происходит взаимодействие мод осцилляций как в первом, так и во втором порядке малости. И линейное, и нелинейное взаимодействие мод осцилляций приводит к возбуждению мод, отсутствующих в спектре, определяющем начальную деформацию капли. Следствием указанного взаимодействия является возбуждение мод, отсутствующих в спектре мод, определяющих начальную деформацию капли в обоих порядках малости. Отмечено, что с увеличением скорости потока растут и амплитуды колебаний изначально невозмущенных мод.

Наличие обдувающего каплю потока и взаимодействие мод приводят к снижению критических для реализации неустойчивости капли величин собственного заряда, скорости и плотности внешней среды. Перенос энергии при нелинейном внутреннем резонансном взаимодействии мод осуществляется от изначально возбужденной моды к модам с большими номерами.

Причиной появления линейного по малому параметру (нерезонансного) взаимодействия мод является наличие движения внешней среды. При этом n мода взаимодействует с четырьмя ближайшими: с $(n–2)$, $(n–1)$, $(n+1)$, $(n+2)$. Ранее взаимодействие мод в линейном приближении по малому параметру обнаружено в случае плоской границы раздела несмешивающихся между собой идеальных несжимаемых сред, одна из которых поступательно движется параллельно границе раздела, то есть в ситуации, когда граница раздела способна претерпевать неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. В [54–55] показано, что в случае ламинарного обтекания капли потоком идеальной жидкости, она деформируется к сплюснутому сфероиду, а ее поверхность вовлекается в колебательное движение, характерное для неустойчивости. Учет этих обстоятельств представляет интерес, например, для теории горения капель топлива, движущихся относительно среды. Так, в [56] в нелинейных расчетах второго порядка малости рассчитываются поля скоростей жидкости в капле и в окружающей среде, но капля принимается сферической. Очевидно, что сплюснутость реальной формы капли и непрерывного колебательного движения ее поверхности необходимо учитывать.

С увеличением скорости обтекающего каплю потока и отношения плотностей среды жидкости капли интенсивность как линейного, так и нелинейного взаимодействия увеличивается.

Влияние деформации равновесной сферической формы заряженной капли на закономерности ее осцилляций и устойчивость. Искажение равновесной сферической формы капли во внешних силовых полях (электрическом, акустическом, аэродинамическом или поле центробежных сил) должно привести к изменению характеристик осцилляций. Наиболее типичным внешним силовым полем, представляющим наибольший интерес как для технических, так и академических (геофизических) приложений, является электростатическое поле, в котором капля принимает форму, близкую к вытянутому сфероиду. К сожалению, все работы по расчету осцилляций сфероидальных (незаряженных и заряженных капель в однородном внешнем электростатическом поле) капель выполнены лишь в линейном приближении по амплитуде осцилляций (см., например, [57–63] и указанную литературу). Причина такого положения дел – в громоздкости уже линейной по амплитуде осцилляций задачи, содержащей два независимых малых параметра: степень сфероидальности (например, эксцентриситет сфероида, или величина безразмерной напряженности электростатического поля, в котором находится капля) и безразмерную амплитуду осцилляций. Все решение заключено в сферической системе координат в виде разложений по сферическим функциям (использование в расчетах сфероидальных координат и собственных функций ввиду их малой наглядности и громоздкости ограничивается расчетом давления электрического поля на поверхность сфероидальной капли с последующим разложением по эксцентриситету). Отклонение поверхности сфероида от равновеликой по объему сферы может рассматриваться в качестве малой стационарной деформации сферы. Безразмерным параметром, характеризующим такое отклонение, является эксцентриситет капли e. Отношение амплитуды капиллярных осцилляций сфероидальной капли ξ к радиусу равновеликой сферы R образует второй малый параметр $\varepsilon \equiv \xi/R$. Расчеты первого порядка малости по амплитуде осцилляций в реальности выполняются во втором порядке малости по эксцентриситету e (по величине безразмерной напряженности электростатического поля) и в первом порядке по безразмерной амплитуде ε [57–63]. Иными словами, вся задача при учете разложений по обоим безразмерным параметрам оказывается нелинейной, поскольку все решение выписывается с сохранением слагаемых $\sim \varepsilon \cdot e^2$. В асимптотических расчетах, проводимых с использованием нескольких малых параметров, следует четко определять порядки малости используемых параметров по отношению друг к другу. Так, если в рассматриваемой задаче принять, что $\varepsilon \sim e^2$, как это было сделано в [57–58, 61], то при проведении расчетов в приближении $\sim \varepsilon \cdot e^2$ следует учитывать также слагаемые $\sim \varepsilon^2$ и $\sim e^4$, чего в [57–58, 61] не сделано. Если же принять, что e^2 много больше ε, как это сделано в [15, 59–60, 62–63], то расчеты порядка $\varepsilon \cdot e^2$ не требуют учета слагаемых $\sim \varepsilon^2$. Следует, однако, отметить, что в [15, 57–63] цель проведенных исследований – отыскание и анализ дисперсионных уравнений сфероидальных капель, а не исследование временной эволюции начальной деформации, что характерно для нелинейных задач.

Основной результат наблюдений, проведенных в линейном по амплитуде осцилляций и квадратичном по эксцентриситету e капли ($\sim \varepsilon \cdot e^2$ при условии $e^2 \gg \varepsilon$), сводится к получению дисперсионного уравнения для трехмерных осцилляций вытянутой сфероидальной капли в виде [59]:

$$\omega^2 = -\{n(n-1)(n+2)\alpha_n - 3e^2[n^3 + (2n-1)(n+2)\alpha_n]k_n^m\};$$

$$\alpha_n \equiv \left(1-\frac{W}{(n+2)}\right);\ W \equiv \frac{Q^2}{4\pi R^3\sigma};\ k_n^m \equiv \frac{[n(n+1)-3m^2]}{3(2n-1)(2n+3)}.$$

В данных выражениях n – номер моды, m – азимутальное собственное число. Из дисперсионного уравнения видно, что частоты осцилляций всех мод сфероидальной капли снижаются с увеличением эксцентриситета e. Приравнивая квадрат частоты нулю, несложно найти критическое значение параметра W, при котором капля претерпевает неустойчивость по отношению к неосесимметричным осцилляциям, в зависимости от собственных чисел n и m и величины эксцентриситета капли:

$$W=(n+2)\left[1-e^2\,\frac{3n^2k_n^m}{(n-1)(n+2)}\right].$$

При n=2 и m=0 легко получается выражение для критического значения параметра W для основной моды осесимметричных осцилляций, определяющего устойчивость всей капли:

$$W=4[1-\frac{2}{7}e^2].$$

Согласно [62] для капли, имеющей форму сплюснутого сфероида, все записанные выражения остаются справедливыми, если при квадрате эксцентриситета поменять знак. В частности, критическое значение параметра W для сплюснутой сфероидальной капли примет вид

$$W=(n+2)\left[1+e^2\,\frac{[n(n+1)-3m^2]n^2}{(n-1)(n+2)(2n-1)(2n+3)}\right].$$

Из выражения видно, что сплюснутая заряженная сфероидальная капля устойчива по отношению к осесимметричным виртуальным возмущениям и неосесимметричным с азимутальным собственным числом, удовлетворяющим условию $m^2 \le (n(n+1)/3)$. При выполнении противоположного условия $m^2 > (n(n+1)/3)$ неосесимметричные моды с такими азимутальными числами неустойчивы. Например, сплюснутая заряженная сфероидальная капля неустойчива по отношению к виртуальным деформациям ~$P^2{}_2$, $P^3{}_3$ и т.д.

В [63] в приближении ~ $\varepsilon\cdot e^2$ (при $e^2 >> \varepsilon$) рассчитан спектр осцилляций вытянутой сфероидальной капли вязкой жидкости с учетом эффекта релаксации электрического заряда (с учетом конечности скорости выравнивания потенциала вдоль поверхности капли при ее осцилляциях). Показано, что конечность скорости перераспределения заряда приводит к снижению инкрементов неустойчивости различных мод сильно заряженной капли маловязкой жидкости. С увеличением эксцентриситета капли величина абсолютного изменения инкремента, вызванного конечностью скорости перераспределения заряда, снижается. Для капель сильновязких жидкостей отмечается другая тенденция: механические напряжения, возникающие при перераспределении заряда по поверхности хорошо проводящих жидкостей, характеризуются весьма малыми характерными релаксационными временами и в сильновязких жидкостях эффективно гасятся, лишь в малой степени реализуясь в изменении величин инкрементов.

В [64] в приближении ~$\varepsilon\cdot e^2$ (при $e^2 >> \varepsilon$) получено дисперсионное уравнение для капиллярных осцилляций полусфероидального выступа на плоской поверхности проводящей жидкости в однородном электростатическом поле, параллельном оси симметрии выступа. Таким выступом моделируется конус Тейлора, образующийся на финальной стадии реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля (неустойчивости плоской поверхности идеально проводящей идеальной несжимаемой жидкости, граничащей с вакуумом, по отношению к однородно распределенному поверхностному электрическому заряду). Особенностью задачи является то обстоятельство, что на полусферической поверхности, в окрестности которой ведется разложение, бесконечный набор взаимно ортогональных собственных функций образует не полный набор сферических функций, а лишь сферические функции с нечетными номерами. Проанализирована устойчивость по отношению к поверхностному заряду выступов в виде сплюснутых и вытянутых сфероидов. Показано, что с ростом амплитуды выступа при неизменной площади основания (в рамках модели полусфероидального выступа) критические условия наступления неустойчивости снижаются.

Сказанное в этом разделе относится и к несфероидальным искажениям равновесной формы капли в электромагнитном подвесе [65]: расчеты спектра осцилляций проводятся в приближении $\varepsilon\cdot\beta$, где β – малый безразмерный параметр, характеризующий равновесную деформацию капли в магнитном поле, ε – безразмерная амплитуда осцилляций.

В этом разделе следует упомянуть осцилляции капель в акустических подвесах [66–72]. Чтобы удержать каплю в акустическом подвесе в поле сил тяжести, давление акустического поля на каплю в направлении, противоположном силе тяжести, должно быть достаточно большим. Большое акустическое давление на каплю снизу приводит к ее деформации (к уплощению вдоль поля сил тяжести [66–72]), а все теоретические расчеты осцилляций капель в таких подвесах выполняются во втором порядке по амплитуде акустической волны [66, 68–70, 72]. Влияние деформации капли на сдвиг частот ее осцилляций рассматривалось в теоретических работах [66, 68–70] в приближении $\varepsilon \cdot \beta$ и весьма аккуратно в экспериментальной работе [71]. В теоретических [67–69] и экспериментальной [71] работах правильно указывается на снижение частоты осцилляций капли с увеличением деформации, тогда как в [68] в ошибочных расчетах получен обратный эффект.

Отдельно следует упомянуть экспериментальную работу [71], в которой капля использовалась в акустических и в электростатических подвесах и на основе аккуратно выполненных экспериментов выяснены нелинейные особенности осцилляций капли: зависимость частоты осцилляций от их амплитуды; от степени деформации в подвесе; от наличия внешнего электростатического или переменного электрического поля; нелинейное резонансное взаимодействие мод; особенности возбуждения субгармонического резонанса в переменном электрическом поле, а также наличие гистерезиса при резонансных осцилляциях большой амплитуды. В экспериментальной работе [67] использовался гибридный электростатически акустический подвес, в котором можно подвешивать крупные (до 4 мм диаметром) заряженные капли сферической формы и с помощью переменного акустического поля возбуждать в них осцилляции различных мод большой амплитуды.

О влиянии вязкости на нелинейные осцилляции капель. К сожалению, в строгой постановке задача о расчете нелинейных осцилляций капли вязкой жидкости пока не решена, хотя такие попытки предпринимаются [73]. Гипотетические оценки возможного влияния вязкости на нелинейные осцилляции капель в рамках представлений о пограничных слоях проводились во многих работах, посвященных анализу нелинейных осцилляций капель идеальной жидкости (см., например, [16, 24, 74–77]). Проблема лишь в том, что теории пограничных слоев для свободной криволинейной поверхности жидкости до сих пор не существует, а переносить на свободную поверхность представления о пограничных слоях вблизи твердой стенки нельзя. Результаты численных анализов [78–79] нелинейных осцилляций капель вязких жидкостей не вызывают доверия, поскольку основаны на вариационных принципах, применимость которых к задачам обсуждаемого типа нуждается в дополнительном исследовании. Тем не менее определенные шаги в исследовании нелинейных осцилляций капель вязких жидкостей делаются.

В работах [80–81] в линейном приближении по амплитуде начальной деформации найдены решения начальных краевых задач о линейных осцилляциях капель вязких жидкостей. Акцентируется внимание потому, что в них фактически содержится первая (линейная) часть решения нелинейной задачи. Разница в классическом подходе к решению линейных и нелинейных задач сводится к получению дисперсионного уравнения и его последующего анализа (начальные условия для этого не нужны), нелинейные же задачи – это начальные условия, и цель решения нелинейной задачи – проследить за временной эволюцией начальных условий (начальной деформации капли). Работы [80–81] хоть и выполнены в линейном приближении, но содержат решение задач о линейных осцилляциях капель вязких жидкостей с начальными условиями, где прослеживается временная эволюция начальной деформации капли. Остается найти решение следующего приближения. Проблема состоит в непреодоленной на настоящий момент громоздкости формулировки и решения нелинейной стадии задачи: уже во втором приближении функции неоднородности, представляющиеся тройными произведениями рядов по модифицированным сферическим цилиндрическим функциям, появляющиеся в формулировке задачи во втором порядке малости, не удается разложить по ортогональным наборам собственных функций [73].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03–01–00760 и гранта президента РФ № МК 2946.2004.01.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Feng Z.C., Leal L.G.* On energy transfer in resonant bubble oscillations // Phys. Fluids. 1993. V.A5. № 4. P. 826–836.
2. *Yang S.M., Feng Z.C., Leal L.G.* Nonlinear effects in dynamics of shape and volume oscillation for gas bubble in an external flow // J. Fluid Mech. 1993. V. 247. P. 417–454.
3. *Feng Z.C., Leal L.G.* Bifurcation and chaos in shape and volume oscillations of a periodically driven bubble with two-to-one internal resonance // J. Fluid Mech. 1994. V. 266. P. 209–242.

4. *Feng Z.C., Leal L.G.* Translational instability of a bubble undergoing oscillations // Phys. Fluids. 1995. V.7. № 6. P. 1325–1336.
5. *Feng Z.C., Su Y.H.* Numerical simulation of the translational and shape oscillations of a liquid drop in an acoustic field // Phys. Fluids. 1997. V. 9. № 3. P. 519–529.
6. *Feng Z.C.* Instability caused by the coupling between non-resonant shape oscillation modes of a charged conducting drop // J. Fluid Mech. 1997. V. 333. P. 1–21.
7. *Longuet – Higgins M.S.* Resonance in nonlinear bubble oscillations // J. Fluid Mech. 1991 V. 224. P. 531–549.
8. *Ffowcs-Williams J.E., Guo Y.P.* On resonant nonlinear bubble oscillations // J. Fluid Mech. 1991. V. 224. P. 507–529.
9. *Tsamopolous J.A., Akylas T.R., Brown R.A.* Dynamics of charged drop break-up // Proc. R. Soc., London, 1985. V.A401. P. 67–88.
10. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Григорьева И.Д.* Характерное время развития неустойчивости сильно заряженной капли // ЖТФ. 1995. Т. 65. Вып. 9. С. 39–45.
11. *Григорьев А.И.* Об инкременте неустойчивости незаряженной капли в однородном электростатическом поле // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24. Вып. 24. С. 36–40.
12. *Ширяева С.О.* Характерное время развития неустойчивости сильно заряженной маловязкой капли // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 4. С. 5–8.
13. *Ширяева С.О.* О влиянии вязкости на характерное время развития неустойчивости заряженной капли // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 9. С. 30–36.
14. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные капиллярные колебания заряженной капли // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 8. С. 45–52.
15. *Григорьев А.И.* О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли // ЖТФ. 1985. Вып.7. С. 1272–1278.
16. *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* Nonlinear oscillations of inviscid drops and bubbles // J. Fluid Mech. 1983. V. 127. P. 519–537.
17. *Foote G.B.* A numerical method for studying simple drop behavior: simple oscillation // J. Comp. Phys. 1973. V. 11. P. 507–530.
18. *Trinch E., Wang T.G.* Large amplitude free and driven drop-shape oscillations: experimental observations // J. Fluid Mech. 1982. V. 122. P. 315–338.
19. *Beard K.V.* Oscillation model for predicting raindrop axis and backscattering ratios// Radio Sci. 1984. V.19. № 1. P. 67–74.
20. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* О делении на две части сильно заряженной капли при нелинейных колебаниях // ПЖТФ 2000. Т. 26. Вып. 19. С. 16–23.
21. *Inculet I.I., Floryan J.M., Haywood R.J.* Dynamic of water droplets in electric fields // IEEE Transactions on Ind. Appl. 1989. V. 25. № 5. P. 1203–1209.
22. *Ширяева С.О.* Нелинейные капиллярные колебания и устойчивость сильно заряженной капли при одномодовой начальной деформации большой амплитуды // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
23. *Ширяева С.О.* Нелинейные осцилляции заряженной капли при многомодовой начальной деформации равновесной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 3. С. 173–184.
24. *Tsamopolous J.A., Brown R.A.* Resonant oscillations of inviscid charged drops // J. Fluid Mech. 1984. V. 147. P. 373–395.
25. *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* О внутреннем нелинейном четырехмодовом взаимодействии капиллярных осцилляций заряженной капли // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 9. С. 75–82.
26. *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* О нелинейных осцилляциях заряженной капли в третьем порядке малости по амплитуде одномодового начального возбуждения // ЖТФ. 2003. Т.73. Вып. 6. С.36–45.
27. *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Нелинейные колебания заряженной капли в третьем порядке малости по амплитуде многомодовой начальной деформации // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 12. С. 9–19.
28. *Ширяева С.О.* О влиянии собственного заряда нелинейно осциллирующей капли на внутреннее резонансное взаимодействие мод // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 17. С. 28–35.
29. *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Об условиях реализации внутреннего нелинейного резонанса при осцилляциях заряженной капли // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 22. С. 45–51.
30. *Ширяева С.О., Жаров А.Н., Григорьев А.И.* О некоторых особенностях нелинейного резонансного четырехмодового взаимодействия капиллярных осцилляций заряженной капли // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 10–20.

31. *Дьячук В.А., Мучник В.М.* Коронный разряд с обводненной градины, основной механизм инициирования молнии // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
32. *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* The possible physical mechanism of initiation and growth of lightning // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.
33. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В.* О напряженности электростатического поля в окрестности нелинейно осциллирующей заряженной капли // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 31–36.
34. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В., Филиппова Е.О.* О возможности зажигания коронного разряда в окрестности нелинейно осциллирующей слабо заряженной капли // Электронная обработка материалов. 2003. № 6. С. 19–24.
35. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* О росте амплитуды осцилляций основной моды заряженной капли при внутреннем нелинейном резонансе // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 6. С. 69–75.
36. *Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П.* О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
37. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Голованов А.С., Рыбакова М.В.* Электромагнитное излучение заряженной капли // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 8–14.
38. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Голованов А.С.* Влияние релаксации заряда на электромагнитное излучение осциллирующей заряженной вязкой капли // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 2. С. 6–11.
39. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А.* Капиллярные осцилляции излучающей заряженной вязкой капли конечной проводимости // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 6. С. 19–27.
40. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Электромагнитное излучение осциллирующей заряженной вязкой капли конечной проводимости // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 74–80.
41. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Голованов А.С.* Электромагнитное излучение нелинейно осциллирующей заряженной капли // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. Вып. 20. С. 65–71.
42. *Ширяева С.О.* Нелинейные капиллярные колебания объемно заряженной диэлектрической капли // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 1. С. 104–113.
43. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н.* О расчете амплитуды трансляционной моды при нелинейных осцилляциях капли во внешней среде // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 60–63.
44. *Григорьев А.И., Гаибов А.Р.* Об излучении звука при осцилляциях заряженной капли // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 11. С. 6–11.
45. *Григорьев А.И., Гаибов А.Р., Ширяева С.О.* О взаимодействии заряженной капли с внешним акустическим полем // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 3. С. 17–23.
46. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Гаибов А.Р., Белоножко Д.Ф.* Акустическое излучение нелинейно колеблющейся заряженной капли // Письма в ЖТФ. 2001. Т. 27. Вып. 22. С. 7–13.
47. *Гаибов А.Р., Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* Центрально-симметричное акустическое излучение нелинейно осциллирующей заряженной капли // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 4. С. 22–27.
48. *Гаибов А.Р., Григорьев А.И.* Об акустическом излучении нелинейно колеблющейся заряженной капли // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 7. С. 13–20.
49. *Гаибов А.Р., Григорьев А.И.* О некоторых особенностях акустического излучения капли, связанного с ее нелинейными осцилляциями // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 10. С. 23–28.
50. *Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Нелинейные капиллярные колебания заряженной капли в диэлектрической среде при одномодовой начальной деформации формы // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 44–51.
51. *Волкова М.В., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* О резонансном взаимодействии нелинейных осцилляций заряженной капли, находящейся во внешней диэлектрической среде // Электронная обработка материалов. 2003. № 5. С. 24–31.
52. *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* О нелинейных поправках к частотам осцилляций заряженной капли в несжимаемой внешней среде // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 7. С. 19–26.
53. *Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Нелинейные осцилляции и устойчивость заряженной капли, движущейся относительно диэлектрической среды // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 23–31.
54. *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* Неустойчивость заряженной сферической капли, движущейся относительно среды // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 5. С. 7–14.
55. *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О.* Неустойчивость заряженной сферической вязкой капли, движущейся относительно среды // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 7. С. 26–34.

56. *Jog M.A., Ayyaswamy P.S., Cohen I.M.* Evaporation and combustion of slowly moving liquid fuel droplet: higher-order theory // J. Fluid Mech. 1996. V. 307. P. 135–165.
57. *Feng Z.C.* A method of multiple-parameter perturbations with an application to drop oscillations in an electric field // Quart. Appl. Math. 1990. V. 47. № 3. P. 555–567.
58. *Feng Z.C., Beard K.V.* Small-amplitude oscillation of electrostatically levitated drops. // Proc. R. Soc., Landon. 1990. V.430. P.133–150.
59. *Ширяева С.О.* О спектре капиллярных движений жидкости в заряженной сфероидальной капле // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. Вып. 4. С. 84–88.
60. *Ширяева С.О.* Об устойчивости капиллярных колебаний слабо сфероидальной заряженной капли // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 9. С. 12–20.
61. *Feng Z.C., Beard K.V.* Three-dimensional oscillation characteristics of electrostatically levitated drops // J. Fluid Mech. 1991. V. 227. P. 429–447.
62. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Критические условия неустойчивости сплюснутой сфероидальной сильно заряженной капли // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 10–14.
63. *Ширяева С.О.* Влияние релаксации заряда на капиллярные колебания вязкой заряженной сфероидальной капли // ЖТФ. 1999. Т. 66. Вып. 8. С. 28–36.
64. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* О некоторых особенностях реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости // ЖТФ. 1999. Т. 66. Вып. 7. С. 15–22.
65. *Bratz A., Egry I.* Surface oscillations of electromagnetically levitated viscous metal droplets // J. Fluid Mech. 1995. V. 298. P. 341–359.
66. *Marston Ph. L.* Shape oscillation and static deformation of drops and bubbles driven by modulated radiation stresses. Theory // J. Acoust. Soc. Am. 1980. V. 67. № 1. P. 15–26.
67. *Won-Kyu Rhim, Sang Kun Chung, Hyson M.T., Trinch E.H., Elleman D.D.* Large charged drop levitation against gravity // IEEE Transaction on Industry Applications. 1987. V.IA-23. № 6. P. 975–979.
68. *Suryanarayana P.V.R., Bayazitoglu Y.* Effect of static deformation and external forces on the oscillations of levitated droplets // Phys. Fluids. 1991. V.3. № 5. P. 967–977.
69. *Lee C.P., Anilcumar A.V., Wang T.G.* Static shape and stability of acoustically levitated liquid drop // Phys. Fluids. 1991. V.3. № 11. P. 2497–2515.
70. *Tao Shi, Apfel R.E.* Oscillations of a deformed liquid drop in an acoustic field // Phys. Fluids. 1995. V.7. № 7. P. 1545–1552.
71. *Trinch E.H., Holt R.G., Thiessen D.B.* The dynamics of ultrasonically levitated drops in an electric field // Phys. Fluids. 1996. V.8. № 1. P. 43–61.
72. *Yarin A.L., Brenn G., Kastner O. et al.* Evaporation of acoustically levitated droplets // J. Fluid Mech. 1999. V. 399. P. 151–204.
73. *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Световой В.Б., Григорьев А.И.* Формулировка задач об аналитическом расчете нелинейных движений вязкой жидкости со свободной поверхностью. Препринт №31. ИМИ РАН. Ярославль, 2001.
74. *Natarajan R., Brown R.A.* Quadratic resonance in the three-dimensional oscillation of inviscid drops with surface tension // Phys. Fluids. 1986. V. 29. № 9. P. 2788–2797.
75. *Natarajan R., Brown R.A.* Third-order resonance effects and the nonlinear stability of drops oscillations // J. Fluid Mech. 1987. V. 183. P. 95–121.
76. *Natarajan R., Brown R.A.* The role of three-dimensional shapes in the break-up charged drops // Proc. R. Soc. London, 1987. V.A410. P. 209–227.
77. *Pelekasis N.A., Tsamopolous J.A., Manolis G.D.* Equilibrium shape and stability of charged and conducting drops // Phys. Fluids. 1990. V.A2. № 8. P. 1328–1340.
78. *Basaran O.A.* Nonlinear oscillations of viscous drops // J. Fluid Mech. 1992. V. 241. P. 169–198.
79. *Becker E., Hiller W.J., Kowalewski T.A.* Nonlinear dynamics of viscous droplets // J. Fluid Mech. 1994. V. 258. P. 191–216.
80. *Prosperetti A.* Viscous effects on perturbed spherical flow // Quarterly of Applied Mathematics. 1977. V.35. P. 339–352.
81. Prosperetti A. Free oscillations of drops and bubbles: the initial-value problem // J. Fluid Mech. 1980. V.100. P. 333–347.

Поступила 22.09.04

Summary

Review of scientific publications on the nonlinear oscillations of charged drops is presented. The peculiarities: of nonlinear internal resonance interaction of oscillation modes; of electromagnetic and acoustic waves radiation; role of liquids viscosity; role of drop deformation in external force fields are discussed.