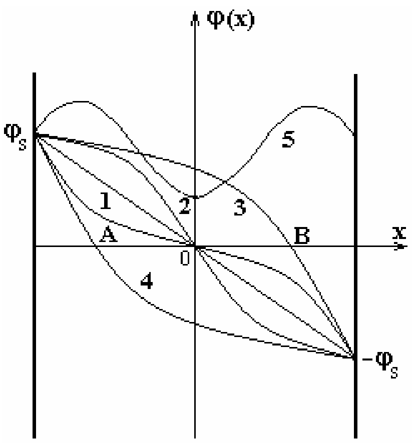
Ф.П. Гросу**, М.К. Болога*

О БИПОЛЯРНЫХ СТРУКТУРАХ ОБЪЕМНОГО ЗАРЯДА В СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

**Институт прикладной физики АНМ,*
ул. Академией, 5, г. Кишинев, MD-2028, Республика Молдова
***Государственный аграрный университет Молдовы,*
ул. Мирчешть, г. Кишинев, MD-2049, Республика Молдова

1. Состояние вопроса. Процессы возникновения пространственных зарядов в жидких слабопроводящих диэлектриках при наличии электростатических полей по-прежнему привлекают внимание исследователей в области электрофизики и электрогидродинамики (ЭГД) жидкостей, о чем можно судить и по материалам различных международных форумов и конференций по этой тематике (см., например, [1]).

И это очевидно, поскольку не до конца раскрыты вопросы зарядообразования, представляющие основной тормоз на пути более адекватного развития указанных научных направлений. И если известные типы объемного распределения электростатического потенциала между обкладками плоскопараллельного конденсатора (см. рисунок), заполненного исследуемой жидкостью, как-то: гетерозарядное распределение (кривая ***1***), гомозарядное (кривая ***2***), монополярные (кривые ***3***, ***4***) – считались эталонными, то за последние одно-два десятилетия установлена тонкая структура (толщиной в десятые доли миллиметра) [2, 3] приэлектродных электрически заряженных слоев жидкости, значительно скорректировавшая классические распределения (кривые ***1–4***). Выяснилось, что при малых (начальных) напряжениях на измерительной ячейке распределение $\varphi(x)$ соответствует гетерораспределению (кривая ***1***), далее, по мере повышения разности потенциалов между электродами, выше некоторой критической $\boldsymbol{U} \geq \boldsymbol{U_{KP}}$ непосредственно прилегающий к поверхности электрода подслой начинает приобретать одноименный с электродом заряд (гомозаряд), его плотность, переходя через нулевое значение ($\rho = 0$), становится, как и первоначально, противоположного знака. На распределении напряженности поля $E(x)$ в приэлектродных слоях появляются экстремумы (горбы) (кривая ***5***), означающие биполярные структуры объемного заряда в приэлектродных пограничных слоях. Обнаружение биполярных структур имеет принципиальное значение, поскольку по-новому заставляет смотреть на трактовку и описание многих вторичных электрогидродинамических явлений. Тем не менее сам факт существования этих структур иногда подвергается сомнению: якобы зондовая методика, при помощи которой были обнаружены биполярные распределения поля, на таких близких к поверхности электрода расстояниях неприменима.



Распределения потенциала в плоскопараллельном конденсаторе

Однако дальнейшие исследования, в том числе и теоретические [4], подтвердили достоверность полученных результатов. Самими авторами [2, 3] появление гомозарядов на поверхности электрода после достижения критической напряженности поля ($\boldsymbol{E} > \boldsymbol{E}_{KP}$) объясняется вполне логично, а именно: процессы инжекции зарядов с электрода преобладают над миграционным приходом зарядов из жидкости к электроду [3]. Нами выдвинута также гипотеза [5] о том, что по мере гетерозарядки жидкости в приэлектродном слое напряженность поля растет до величины, достаточной для электрического "микропробоя" жидкости на поверхности, что вызывает резкое понижение начальной ("пробивной") напряженности. Таким образом, образуется слой повышенной электрической проводимости и пониженной напряженности. По физической сути объяснения одинаковы, однако основная задача состоит в создании математической модели рассматриваемого явления. В [5] предпринята попытка создания такой модели на основе гипотезы микропробоя, которая, однако, еще далека до завершенности. В данной работе преследуется цель – выяснить принципиальную возможность существования биполярных структур в рамках классических уравнений Нернста–Планка и Максвелла. Если такая возможность подтвердится, то следующим этапом исследований явится решение задачи в окончательном виде.

2. Общая система уравнений. Основное уравнение и критерии подобия. Поскольку биполярные структуры экспериментально обнаруживаются при введении в исследуемую жидкость примесей, то система многокомпонентная и парциальные плотности токов выражаются в виде сумм:

$$\begin{cases} \boldsymbol{j}_{+} = \boldsymbol{E} \cdot \sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{k}_{+\boldsymbol{i}} \rho_{+\boldsymbol{i}} - \sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{D}_{+\boldsymbol{i}} \rho'_{+\boldsymbol{i}}, \\ \boldsymbol{j}_{-} = \boldsymbol{E} \cdot \sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{k}_{-\boldsymbol{i}} \rho_{-\boldsymbol{i}} + \sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{D}_{-\boldsymbol{i}} \rho_{-\boldsymbol{i}}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ – числа компонент соответственно. Введя усредненные коэффициенты подвижностей $\overline{\boldsymbol{k}}_{\pm} \equiv \overline{\boldsymbol{k}}_{\pm}$ и диффузии $\overline{\boldsymbol{D}}_{\pm} \equiv \boldsymbol{D}_{\pm}$

$$\boldsymbol{K}_{+} \equiv \left(\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{k}_{+\boldsymbol{i}} \rho_{+\boldsymbol{i}} \right) / \rho_{+}; \boldsymbol{k}_{-} \equiv \left(\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{k}_{-\boldsymbol{i}} \rho_{-\boldsymbol{i}} \right) / \rho_{-};$$

$$\boldsymbol{D}_{+} \equiv \left(\sum_{\boldsymbol{i}+1}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{D}_{+\boldsymbol{i}} \rho_{+\boldsymbol{i}} \right) / \rho_{+}; \boldsymbol{D}_{-} \equiv \left(\sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{D}_{-\boldsymbol{i}} \rho_{-\boldsymbol{i}} \right) / \rho_{-}; \tag{2}$$

$$\rho_{+} \equiv \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{m}} \rho_{+\boldsymbol{i}}; \rho_{-} \equiv \sum_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \rho_{-\boldsymbol{i}}; \boldsymbol{k}_{\pm \boldsymbol{i}}, \boldsymbol{D}_{\pm \boldsymbol{i}} = \boldsymbol{const},$$

получим случай двухкомпонентной системы:

$$\boldsymbol{j}_{\pm} = \boldsymbol{k}_{\pm} \rho_{\pm} \boldsymbol{E} \mp \boldsymbol{D}_{\pm} \rho'_{\pm} \ , \tag{3}$$

где "штрих" означает производную по $\boldsymbol{x}$. Следует заметить, что усреднения (2), строго говоря, не приводят к постоянным по объему коэффициентам $\boldsymbol{k}_{\pm}$,$\mathrm{D}_{\pm}$ ввиду зависимостей $\rho_{\pm}(\boldsymbol{x})$, однако ввиду дробнолинейного характера зависимостей $\boldsymbol{k}_{\pm}$, $\mathrm{D}_{\pm}$ от $\rho_{\pm \boldsymbol{i}}(\boldsymbol{x}) > \boldsymbol{o}$ последние являются слабыми функциями координат, поэтому примем их постоянными. Более того, примем также $\boldsymbol{k}_{+} = \boldsymbol{k}_{-} \equiv \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{D}_{+} = \boldsymbol{D}_{-} \equiv \boldsymbol{D}$; асимметрию учтем в неравенстве скоростей химических реакций на электродах, что влечет неравенство $\boldsymbol{j}_{+} \neq \boldsymbol{j}_{-}$ (см. ниже).

Единственное существенное допущение, которое примем, – это выполнение законов сохранения плотностей парциальных токов: $\operatorname{div} \vec{\boldsymbol{j}}_{\pm} = \boldsymbol{j}'_{\pm} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{j}_{+}, \boldsymbol{j}_{-} = \mathrm{const}$. Однако и это предположение не кажется обременительным, так как апробировано в электрохимии [6], где концентрации носителей зарядов гораздо выше, чем в случае жидких диэлектриков.

С учетом сказанного путем сложения и вычитания уравнений (3) получим замкнутую относительно $\boldsymbol{E}, \rho, \sigma, \varphi$ систему дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями:

$$\rho' = \frac{\sigma}{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{D}}; \qquad \rho(\boldsymbol{x})/_{\boldsymbol{x}=\ell} = \rho_0,$$

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\rho}{\varepsilon}; \qquad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})/_{\boldsymbol{x}=\ell} = \boldsymbol{E}_0, \tag{4}$$

$$\sigma' = \frac{\boldsymbol{k}^2}{\boldsymbol{D}}\rho\boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{k}\cdot\delta}{\boldsymbol{D}}; \qquad \sigma(\boldsymbol{x})/_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{l}} = \sigma_0,$$

$$\varphi' = -\boldsymbol{E}; \quad \varphi(\boldsymbol{x})/_{\boldsymbol{x}=0} = \boldsymbol{U}; \quad \varphi(\boldsymbol{x})/_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{l}} = 0,$$

где плотность объемного заряда ρ, удельная электропроводность σ, сумма $\boldsymbol{j}$ и разность δ плотностей тока представлены формулами

$$\rho = \rho_+ - \rho_-; \sigma = \boldsymbol{k}(\rho_+ + \rho_-); \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_+ + \boldsymbol{j}_-; \delta \equiv \boldsymbol{j}_+ - \boldsymbol{j}_-, \tag{5}$$

причем $\sigma > 0; \boldsymbol{j} \geq 0; \rho \geq 0, \delta \geq 0$ или $\rho<0, \delta<0$. Начало координат совмещено с левой обкладкой конденсатора. Правая заземлена. Расстояние между обкладками конденсатора $\boldsymbol{l}$.

Подставив второе уравнение системы (4) в третье, после интегрирования получим

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\varepsilon\boldsymbol{k}^2}{2\boldsymbol{D}}\left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{E}^2{}_0\right) + \frac{\boldsymbol{k}\cdot\delta}{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x}). \tag{6}$$

В этой зависимости σ_0 есть функция от напряженности поля $\boldsymbol{E}_0$, однако σ имеет смысл и без поля (низковольтная проводимость), которая обозначена σ_*. Тогда, полагая в (6) $\sigma = \sigma_*$, $\boldsymbol{E} = 0$, $\delta = 0(\boldsymbol{j}_\pm = 0)$, находим

$$\sigma_0 = \sigma_* + \frac{\varepsilon\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{E}_0{}^2}{2\boldsymbol{D}} \Rightarrow \sigma = \sigma_* + \frac{\varepsilon\boldsymbol{k}^2}{2\boldsymbol{D}}\boldsymbol{E}^2 + \frac{\boldsymbol{k}\cdot\delta}{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x}). \tag{7}$$

Подстановка (7) в первое уравнение (4) приводит к основному уравнению процесса зарядообразования:

$$\rho' = \varepsilon\boldsymbol{E}'' = \frac{\varepsilon\boldsymbol{k}^2}{2\boldsymbol{D}^2}\cdot\boldsymbol{E}^3 + \frac{1}{\boldsymbol{D}}\left(\sigma_* + \frac{\boldsymbol{k}\delta}{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{l} - \boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{E} - \frac{\boldsymbol{j}}{\boldsymbol{D}}. \tag{8}$$

Это уравнение Пенлеве [7], приводим его к безразмерному виду. Введя безразмерную напряженность поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\eta(\xi)$ и координату $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{l}\xi$, получим

$$\eta'' = \pi_0\eta^3 + \pi_1\left(1 + \pi_2(1 - \xi)\right)\eta - \pi_3, \tag{9}$$

где введены обозначения для безразмерных комплексов подобия:

$$\pi_0 \equiv \left(\frac{\boldsymbol{lkE}_0}{\sqrt{2}\boldsymbol{D}}\right)^2; \pi_1 \equiv \frac{\boldsymbol{l}^2}{\tau_*\boldsymbol{D}}; \pi_2 \equiv \frac{\boldsymbol{lk}\delta}{\sigma_*\boldsymbol{D}}; \pi_3 \equiv \frac{\boldsymbol{jl}^3}{\varepsilon\boldsymbol{DE}_0}, \tag{10}$$

причем $\tau_* \equiv \varepsilon/\sigma_*$ – время электрической релаксации. Следует заметить, что, если в последнее уравнение системы (4) ввести $\varphi = \boldsymbol{U}\chi, \chi$ – безразмерный потенциал, получим

$$\chi'(\xi) = -\pi_4 \cdot \eta, \quad \pi_4 \equiv \frac{\boldsymbol{E}_0 \boldsymbol{l}}{\boldsymbol{U}}, \tag{11}$$

то есть появился еще один комплекс подобия π_4, содержащий напряжение ***U.***

Условиями однозначности решения уравнения (9) являются начальные условия:

$$\eta(1) = \eta_0 = 1; \eta'(1) = \eta'_0 = 0, \tag{12}$$

где начальная (при ***x=l***) плотность зарядов ρ_0 принята равной нулю, что имеет место, по крайней мере, в условиях симметричного распределения поля (см. рисунок, кривая ***1***).

Учитывая (9), (12), заключаем, что решения любой задачи рассматриваемого процесса есть функция помимо независимой переменной ξ еще четырех параметров подобия (10):

$$\eta = \eta(\xi, \pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3). \tag{13}$$

Отсюда следует, что в разных процессах (задачах) при одних и тех же значениях параметров $\pi_i \quad (\pi'_i = \pi''_i)$ решения идентичны, поэтому комплексы π_i суть критерии подобия рассматриваемых процессов. Кроме того, заметим, что введение этих критериев свело зависимость напряженности поля от восьми размерных параметров $\boldsymbol{j}, \boldsymbol{E}_0, \varepsilon, \boldsymbol{K}, \sigma_*, \boldsymbol{D}, \delta, \boldsymbol{l}$ к четырем, как того требует π-теорема. На основе критериев подобия становятся яснее планирование эксперимента, а также использование научных результатов в практических целях.

3. О биполярных структурах. Рассмотрим основное уравнение по выяснению принципиальной возможности наличия решений, отражающих указанные структуры, исходя из их характерных особенностей, а именно корней уравнений $\rho(\boldsymbol{x}) \sim \boldsymbol{E}'(\boldsymbol{x}) = 0$ и $\rho'(\boldsymbol{x}) \sim \boldsymbol{E}''(\boldsymbol{x}) = 0$. Рассмотрим порознь отдельные частные случаи.

3.1. Стадия начальной поляризации при полном отсутствии тока в цепи ($\pi_2 = 0; \pi_3 = 0$ **).**

Уравнение (9) принимает вид

$$\eta'' = \pi_0 \eta^3 + \pi_1 \eta. \tag{14}$$

Поскольку $\eta > 0$, то и $\eta'' > 0$, то есть распределение всюду вогнуто, что отвечает гетерозарядному распределению поля, согласно общей физической концепции, о которой речь шла выше. О том, что никаких биполярных структур в этом случае быть не может, говорит и распределение кривой ***5*** (см. рисунок). В этом случае возможно точное решение уравнения (14) через эллиптический интеграл 1-го рода $\boldsymbol{F}(\varphi, \boldsymbol{k})$; решения $\eta(\xi)$ будут приведены в следующей части работы.

3.2. Стадия токопрохождения в симметричных условиях ($\pi_2 = 0(\boldsymbol{j}_+ = \boldsymbol{j}_-), \pi_3 \neq 0$ **).**

Уравнение (9) примет вид

$$\eta'' = \pi_0 \cdot \eta^3 + \pi_1 \eta - \pi_3. \tag{15}$$

Правая часть (15) имеет один-единственный положительный корень, делящий график $\eta(\xi)$ на выпуклую $\eta''(\xi) < 0$ и вогнутую $\eta''(\xi) > 0$ части. Точка $\eta''(\xi) \sim \rho'(\boldsymbol{x}) = 0$ есть точка экстремума плотности заряда. Одно из необходимых условий наличия искомой структуры выполняется, поэтому можно продолжить ее поиск. Для этого из (15) найдем производную η' (безразмерную плотность заряда):

$$\eta'' = \frac{\boldsymbol{d}\eta'}{\boldsymbol{d}\xi} = \frac{\boldsymbol{d}\eta'}{\boldsymbol{d}\eta} \cdot \frac{\boldsymbol{d}\eta}{\boldsymbol{d}\xi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\boldsymbol{d}\eta'^2}{\boldsymbol{d}\eta} = \pi_0 \eta^3 + \pi_1 \cdot \eta - \pi_3.$$

Интегрируя это уравнение с учетом начальных условий (12), получаем

$$\eta'^2 = \frac{\pi_0}{2}\left[(\eta^2 + \boldsymbol{a}^2)(\eta + 1) - \frac{4\pi_3}{\pi_0}\right](\eta - 1), \; \boldsymbol{a}^2 = 1 + \frac{2\pi_1}{\pi_0}. \tag{16}$$

Правая часть, помимо уже известного по начальным условиям корня $\eta = 1$, явно имеет еще один положительный корень, который также будет делить область задания функции на положительную $(\rho > 0)$ и отрицательную $(\rho < 0)$.

Таким образом, существование корня (правда, по напряженности) $\eta' \sim \rho = 0$ дает основание полагать, что биполярные структуры допустимы даже в симметричном варианте.

3.3. Общий случай ($\pi_2 \neq 0; \pi_3 \neq 0$).

Это наиболее интересный случай, так как возможностей вариантов знаков у второй производной η'' гораздо больше, чем в предыдущих случаях, либо этот знак явно зависит и от координаты ξ, причем знак коэффициента η в (9) при $\pi_2 < 0$ будет определяться значением координаты ξ. Более того, имеются перспективы существования не только максимумов напряженности у электродов, но и минимумов. Точное решение задачи приводит к трансцендентным функциям Пенлеве [7], однако здесь мы ограничимся приведением приближенного решения, полученного простым разложением в ряд Тейлора:

$$\eta(\xi) = 1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}(1-\xi)^2 + \frac{1}{6}\boldsymbol{B}(1-\xi)^3 + \frac{1}{24}\cdot\boldsymbol{C}\cdot(1-\xi)^4, \qquad (17)$$

где

$$\boldsymbol{A} \equiv \pi_0 + \pi_1 - \pi_3; \boldsymbol{B} \equiv \pi_1 \cdot \pi_2; \boldsymbol{C} \equiv (3\pi_0 + \pi_1)(\pi_0 + \pi_1 - \pi_3). \qquad (18)$$

У всех коэффициентов зависимости (17) возможны любые знакосочетания, поэтому эта зависимость, с уверенностью можно сказать, будет по крайней мере качественно описывать наблюдаемые на практике структуры объемных зарядов.

Количественный анализ рассматриваемых в данной работе закономерностей будет осуществлен на следующем этапе исследований. Кстати, заметим, что точное решение рассматриваемой задачи в конечном виде также возможно. Оно выражается через эллиптические интегралы и также будет приведено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей // Сб. докладов VIII международной научной конференции 26-28 июня 2006 г. Физический факультет СПбГУ, С.Петербург.
2. *Рычков Ю.М.* **,** *Стишков Ю.К.* Напряженность электрического поля и объемный заряд в технических жидких диэлектриках // Коллоидный журнал. 1978. № 6.
3. *Стишков Ю.К.***,** *Остапенко А.А.* Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Ленинградский госуниверситет, 1989.
4. *Апфельбаум М.С.* **,** *Полянский В.А.* Об образовании объемного заряда в слабопроводящих средах // Магнитная гидродинамика. 1982. № 1.
5. *Гросу Ф.П.***,** *Болога М.К.* Особенности электризации слабопроводящей диэлектрической жидкости во внешнем электрическом поле // Электронная обработка материалов. 2006. № 4. С. 37–45.
6. *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М.: Наука, 1979.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971.

Поступила ***18.09.06***

Summary

General system of equations of electrostatic field in the weakly conducting dielectric liquid in the interelectrode gap of a plane-parallel capacitor is formulated. Main equation for distribution of electric fields intensity is obtained and similarity criteria for the processes of current conducting and charge formation are found. On the basis of the analysis of signs of the first and second derivatives of electric field intensity the conditions of arising some or other field distribution are established In particular, it is shown that in the conditions of “pure” polarization (current is zero) bipolar structures are impossible. On the contrary, their appearance is connected with the passing of enough strong current. Ways of the main equation solving are developed. Approximate solution for the general case of the problem setup is given.