

А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева

**О КОРОННОМ РАЗРЯДЕ У ПОВЕРХНОСТИ НЕЛИНЕЙНО-ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ СЛОЯ ВОДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ТАЮЩЕЙ ГРАДИНЫ**

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, grig@uniyar.ac.ru*

**Введение.** Исследование возможности зажигания коронного разряда у поверхности тающей градины в грозовом облаке представляет значительный интерес для теории грозового электричества [1–3], так как согласно существующим представлениям именно с него инициируется разряд молнии. Тем не менее многие вопросы, связанные с возможностью зажигания коронного разряда в окрестности крупных капель и тающих градин, до сих пор исследованы мало. В этой связи и предпринята настоящая работа.

**1. Постановка задачи.** Будем решать задачу о нахождении напряженности электрического поля вблизи поверхности нелинейно-осциллирующего сферического слоя идеально проводящей несжимаемой жидкости радиуса  $R$ , находящейся на поверхности твердого сферического ядра  $R_0$ . Примем, что жидкость имеет плотность  $\rho$  и коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$ , а вся градина находится в однородном электростатическом поле с напряженностью  $E_0$ . Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых  $R = \sigma/\rho = 1$ , в сферической системе координат с началом в центре масс системы. Тогда уравнение свободной поверхности жидкости запишется в виде

$$F(r, \vartheta, t) = r - 1 - \xi(\vartheta, t) = 0, \quad |\xi| \ll 1.$$

Течение жидкости будем полагать потенциальным, то есть примем, что поле скоростей  $V(r, t)$  волнового движения в жидком слое полностью определяется функцией потенциала скорости  $\psi(r, t)$  известным соотношением:  $V(r, t) \equiv \nabla\psi(r, t)$ .

Математическая формулировка задачи расчета нелинейных осцилляций жидкого слоя на поверхности твердого сферического ядра состоит из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей  $\psi(r, t)$  и электростатического потенциала  $\Phi(r, t)$ :

$$\Delta\psi(r, t) = 0; \quad \Delta\Phi(r, t) = 0$$

и граничных условий к ним:

$$r = 1 + \xi: \quad \Phi(r, t) = 0; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \xi}{\partial \vartheta},$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi} - \text{div } n = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad -\nabla\Phi(r, t) \rightarrow E_0; \quad r = R_0: \quad \partial\psi(r, t)/\partial r = 0.$$

В выписанных соотношениях  $\Delta p$  – перепад постоянных давлений внутри и вне жидкости в состоянии равновесия;  $n \equiv \nabla F(r, \vartheta, t)/|\nabla F(r, \vartheta, t)|$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности капли.

Следует учесть также следующие условия: отсутствие в начальный момент времени собственного электрического заряда градины

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi) dS = 0; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\vartheta, t); \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \end{cases}$$

неизменность объема слоя жидкости:

$$\int_{V_1} r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{4}{3} \pi (1 - R_0^3); \quad V_1 = \begin{cases} R_0 \leq r \leq 1 + \xi(\vartheta, t); \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \end{cases}$$

неподвижность центра масс градины:

$$\frac{\int_{V_1} r dV_1 + \rho_* \int_{V_2} r dV_2}{\int_{V_1} dV_1 + \rho_* \int_{V_2} dV_2} = 0; \quad V_2 = \begin{cases} 0 \leq r \leq R_0; \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \end{cases}$$

$\rho_*$  – безразмерная плотность твердого ядра.

Начальные условия к поставленной задаче сформулируем в виде задания начальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы свободной поверхности жидкого слоя и равенства нулю начальной скорости движения свободной поверхности:

$$t = 0: \xi(\vartheta, t) = \xi_0 \cdot P_0(\mu) + \xi_1 \cdot P_1(\mu) + \varepsilon \cdot P_k(\mu); \quad (k \geq 2); \quad \mu \equiv \cos \vartheta; \quad \frac{\partial \xi(\vartheta, t)}{\partial t} = 0.$$

Здесь  $\varepsilon$  – безразмерная амплитуда начальной деформации, являющаяся малым параметром задачи;  $P_k(\mu)$  – полином Лежандра  $k$ -го порядка;  $\xi_0$  и  $\xi_1$  – константы, определяемые условиями неизменности объема капли и неподвижности центра масс системы в виде

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \frac{1}{(2k+1)} + O(\varepsilon^3); \quad \xi_1 = 0 + O(\varepsilon^3).$$

**2. Процедура разложения задачи на порядки малости.** Сформулированную задачу в квадратичном по  $\varepsilon$  приближении будем решать методом многих временных масштабов, как это проделано в [4–6]. Для этого искомые функции  $\xi(\vartheta, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $\Phi(r, t)$  представим в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра  $\varepsilon$  и будем считать зависящими не просто от времени  $t$ , но от разных его масштабов  $T_m$ , определенных соотношением  $T_m \equiv \varepsilon^m \cdot t$ :

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, \dots); \quad \psi(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \psi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots);$$

$$\Phi(r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \Phi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots). \quad (1)$$

Подставляя разложения (1) в исходную систему уравнений и граничные условия к ней и приравнивая в каждом из соотношений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций  $\xi^{(m)}$ ,  $\psi^{(m)}$ ,  $\Phi^{(m)}$ , которые для  $m \geq 1$  будем искать в виде рядов по полиномам Лежандра:

$$\begin{aligned}\xi^{(m)}(\mathcal{G}, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) P_n(\mu). \\ \Psi^{(m)}(\mathcal{G}, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} (H_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^n + G_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1}) P_n(\mu); \\ \Phi^{(m)}(r, \mathcal{G}, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1} P_n(\mu).\end{aligned}\quad (2)$$

**3. Отыскание решения.** В нулевом порядке малости по амплитуде волн возмущения свободной поверхности жидкого слоя отсутствуют, поэтому решение задачи имеет простой вид:

$$\Phi^{(0)} \equiv -E_0 \mu (r - r^{-2}); \quad M_n^{(0)} = E_n^{(0)} = H_n^{(0)} \equiv 0. \quad (3)$$

В расчетах первого порядка малости получим бесконечную систему связанных дифференциальных уравнений для отыскания коэффициентов  $F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$ ,  $H_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$ ,

$$\begin{aligned}G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots), M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots): \\ M_0^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0; \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0; \\ A_n M_{n-2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) + \frac{\partial^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} + \\ + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) + D_n M_{n+2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = 0; \quad n \geq 2; \\ A_n = -w \chi_n \frac{n(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)}; \quad D_n = -w \chi_n \frac{n(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}; \\ \omega_n^2 = \chi_n \left[ (n-1)[(n+2)] - w \frac{n(4n^3 + 2n^2 - 6n - 1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right]; \\ \chi_n = \frac{n(n+1)(1 - R_0^{2n+1})}{n+1 + n R_0^{2n+1}};\end{aligned}\quad (4)$$

$$H_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{1}{n(1 - R_0^{2n+1})} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0}; \quad (n \geq 2);$$

$$G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{R_0^{2n+1}}{(n+1)(1 - R_0^{2n+1})} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0}; \quad (n \geq 2);$$

$$F_0^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0; \quad F_1^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0;$$

$$F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = 3E_0 \mu M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots); \quad n \geq 2.$$

В расчетах второго порядка малости также получим систему неоднородных дифференциальных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов  $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$ :

$$M_0^{(2)}(T_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left( M_n^{(1)}(T_0) \right)^2;$$

$$A_n M_{n-2}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) + \frac{\partial^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) + D_n M_{n+2}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) = f_n(T_0); \quad n \geq 1; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f_n(T_0) = & \chi_n \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0^2} M_l^{(1)}(T_0) \left[ K_{m,l,n} \left( \frac{\nu_m}{\chi_n} - 1 \right) - \frac{\alpha_{m,l,n}}{\chi_n \chi_m} \right] + \right. \\ & + \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \left[ K_{m,l,n} \left( \frac{\nu_m}{\chi_n} - \frac{1}{2} \right) - \frac{\alpha_{m,l,n}}{\chi_m} \left( \frac{1}{\chi_n} + \frac{1}{2\chi_l} \right) \right] + \\ & + M_m^{(1)}(T_0) M_l^{(1)}(T_0) \left\{ K_{m,l,n} \left( 2 \left[ l(l+1) - 1 \right] + w \frac{(13m(m+1) - 7)}{(2m-1)(2m+3)} \right) + \right. \\ & + \frac{11w}{2(2m+1)} \left[ \frac{m(m-1)}{(2m-1)} K_{m-2,l,n} + \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)} K_{m+2,l,n} \right] + \\ & + \left( \frac{m}{(2m-1)} M_{m-1}^{(1)}(T_0) + \frac{(m+1)}{(2m+3)} M_{m+1}^{(1)}(T_0) \right) M_l^{(1)}(T_0) \times \\ & \times \left\{ m w \left[ \frac{n^2}{2n-1} K_{m,l,n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} K_{m,l,n+1} \right] - \right. \\ & \left. - w \frac{m+1}{2m+3} \left[ (m+2)^2 K_{m+1,l,n} + m(m+5) K_{m-1,l,n} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \left[ (m+1)(l+1) K_{m,l,n} + \alpha_{m,l,n} \right] \left( \frac{l M_{l-1}^{(1)}(T_0)}{(2l-1)} + \frac{(l+1) M_{l+1}^{(1)}(T_0)}{(2l+3)} \right) \times \\ & \times \left\{ w \left( \frac{m M_{m-1}^{(1)}(T_0)}{2m-1} + \frac{(m+1) M_{m+1}^{(1)}(T_0)}{2m+3} \right) \right\} \Bigg\}; \end{aligned}$$

$$\nu_m = \frac{m-1 + (m+2)R_0^{2m+1}}{1 - R_0^{2m+1}};$$

$$K_{m,l,n} \equiv \left[ C_{m0l0}^{n0} \right]^2; \quad \alpha_{m,l,n} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{m0l0}^{n0} \cdot C_{m-1l0}^{n0};$$

$C_{m0l0}^{n0}$  и  $C_{m-1l0}^{n0}$  – коэффициенты Клебша-Гордана [7].

Рассмотрение задачи в квадратичном по  $\varepsilon$  приближении позволяет определить зависимость коэффициентов  $M_n^{(2)}(T_0, T_1)$  только от временного масштаба  $T_0 \equiv t$ . При этом  $M_n^{(2)}(T_0, T_1) \approx M_n^{(2)}(t) + O(T_1)$ , а для возмущения поверхности получается следующая оценка:

$$\xi(\mathcal{G}, t) = \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\mathcal{G}, t) + \varepsilon^2 \cdot \xi^{(2)}(\mathcal{G}, t) + O(\varepsilon^3 t) =$$

$$= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)}(t) P_n(\mu) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu) + O(\varepsilon^3 t). \quad (6)$$

Неизвестные коэффициенты  $M_n^{(1)}$  и  $M_n^{(2)}$  получаются в результате численного решения методом последовательных приближений систем (4) и (5). Тогда коэффициенты  $F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$ ,  $H_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$  и  $G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$  с учетом (6) можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} H_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &\equiv H_n^{(2)}(t) = \frac{1}{n(1 - R_0^{2n+1})} \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(t)}{\partial t} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left[ v_m K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{\chi_m} \right] \frac{\partial M_m^{(1)}(t)}{\partial t} M_l^{(1)}(t) \right\}; \\ G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &\equiv G_n^{(2)}(t) = \frac{R_0^{2n+1}}{(n+1)(1 - R_0^{2n+1})} \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(t)}{\partial t} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left[ v_m K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{\chi_m} \right] \frac{\partial M_m^{(1)}(t)}{\partial t} M_l^{(1)}(t) \right\}; \quad F_0^{(2)}(t) = 0; \\ F_n^{(2)}(t) &\equiv 3E_0 \left[ M_n^{(2)}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} m M_m^{(2)}(t) M_l^{(2)}(t) \right]; \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение для потенциала электрического поля с точностью до константы, зависящей только от времени, имеет вид:

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} = -E_0 \mu (r - r^{-2}) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} (F_n^{(1)}(t) + \varepsilon F_n^{(2)}(t)) r^{-(n+1)} P_n(\mu).$$

**4. Вывод аналитического выражения для напряженности электрического поля у поверхности заряженной градины.** Выражение для напряженности электростатического поля  $E(r, t) \equiv -\nabla \Phi(r, t)$  в окрестности свободной поверхности нелинейно-осциллирующего жидкого слоя имеет вид:

$$\begin{aligned} r \geq 1 + \xi(\vartheta, t): \quad E &= E^{(0)} + \varepsilon E^{(1)} + \varepsilon^2 E^{(2)}; \\ E^{(0)} &= e_r \left( E_0 \cos \vartheta \left( 1 + \frac{2}{r^3} \right) \right) - e_\vartheta \left( E_0 \sin \vartheta \left( 1 - \frac{1}{r^3} \right) \right); \\ E^{(1)} &= e_r 3E_0 \mu \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) M_n^{(1)} r^{-(n+2)} P_n(\mu) - e_\vartheta 3E_0 \mu \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)} r^{-(n+2)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \vartheta}; \\ E^{(2)} &= e_r \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) F_n^{(2)}(t) r^{-(n+2)} P_n(\mu) - e_\vartheta \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(2)}(t) r^{-(n+2)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \vartheta}, \quad (7) \end{aligned}$$

где  $e_r$  и  $e_\vartheta$  – орты сферической системы координат. Из выражения (7) найдем напряженность электрического поля на невозмущенной сферической поверхности свободной поверхности капли. Для

этого разложим (7) в окрестности равновесной сферической формы по амплитуде деформации и умножим на выражение для вектора нормали у свободной поверхности жидкости:

$$n \equiv \nabla F(r, \mathcal{G}, t) / |\nabla F(r, \mathcal{G}, t)| = n_r \cdot e_r + n_g \cdot e_g.$$

$$r = l: \quad n_r = 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left( \partial_g \xi^{(1)} \right)^2 = 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_m^{(1)} M_l^{(1)} \frac{\partial P_m(\mu)}{\partial \mathcal{G}} \frac{\partial P_l(\mu)}{\partial \mathcal{G}};$$

$$n_g = -\varepsilon \partial_g \xi^{(1)} + \varepsilon^2 \left( \xi^{(1)} \partial_g \xi^{(1)} + \partial_g \xi^{(2)} \right) = -\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mathcal{G}} +$$

$$+ \varepsilon^2 \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} M_m^{(1)}(t) M_l^{(1)}(t) P_m(\mu) \frac{\partial P_l(\mu)}{\partial \mathcal{G}} + \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mathcal{G}} \right).$$

В итоге получим аналитическое выражение для нормальной компоненты напряженности электрического поля на поверхности градины:

$$E_n = 3E_0\mu + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1+n)F_n^{(1)} - 2(3E_0\mu)M_n^{(1)} \right\} P_n(\mu) +$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1+n)F_n^{(2)} - 6E_0\mu M_n^{(2)} + \right.$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \left[ 3(4E_0\mu)M_m^{(1)}M_l^{(2)} - (m+1)(m+2)M_m^{(1)}F_l^{(1)} \right] K_{m,l,n} + \right.$$

$$\left. + \frac{3m(m+1)}{2m+1} E_0 M_m^{(1)} M_l^{(1)} \left[ K_{m+1,l,n} - K_{m-1,l,n} \right] \right\} P_n(\mu). \quad (8)$$

**5. Анализ полученных результатов.** Прежде чем исследовать выражение для напряженности электрического поля (8), необходимо получить решения систем уравнений (4) и (5) для отыскания коэффициентов  $M_n^{(1)}(t)$  и  $M_n^{(2)}(t)$ . Предварительные расчеты показали, что при начальном возбуждении  $k$ -й моды заметный вклад в спектр капиллярных мод вносят только моды, близкие по номеру к изначально возбужденной. Причем амплитуда ближайших мод с номерами  $n+1$  и  $n-1$  меньше амплитуды  $k$ -й моды примерно на порядок; мод с номерами  $n+2$  и  $n-2$  меньше  $k$ -й моды примерно на два порядка и т.д. Таким образом, в нижеследующих расчетах в первом порядке малости учитывались только пять мод ( $n, n \pm 1, n \pm 2$ ). В расчетах второго порядка учитывались моды с номерами от 0 до  $2n+4$ . Здесь учтено, что при одномодовой начальной деформации в расчетах второго порядка малости за счет нелинейного взаимодействия возбуждаются все четные моды с номерами от 0 до  $2n$  [3–6].

На рис. 1 – 4 приведены результаты расчетов по (8), когда начальная деформация равновесной сферической формы слоя воды на поверхности градины определена одной из мод осцилляций с номером  $n \gg 2$ . На рис. 1 приведены зависимости от полярного угла  $\mathcal{G}$  величины безразмерной напряженности электрического поля в окрестности свободной поверхности заряженного слоя жидкости на поверхности обводненной градины, рассчитанные для начального момента времени. Несложно видеть, что распределение напряженности поля в зависимости от угла  $\mathcal{G}$  имеет симметричный вид и что напряженность поля достигает величины, при которой зажигается коронный разряд, только в окрестностях вершин  $\mathcal{G} \approx 0$  и  $\mathcal{G} \approx \pi$ .

На рис. 2 – 4 приведены зависимости от безразмерного времени величины безразмерной напряженности электрического поля на поверхности обводненной градины на оси симметрии системы для различных толщин слоя жидкости в ситуациях, когда начальная деформация определена различными высокими модами. Из приведенных рисунков видно, что напряженность поля на вершинах гра-

дины увеличивается с ростом номера моды и с уменьшением толщины слоя воды на поверхности градины.

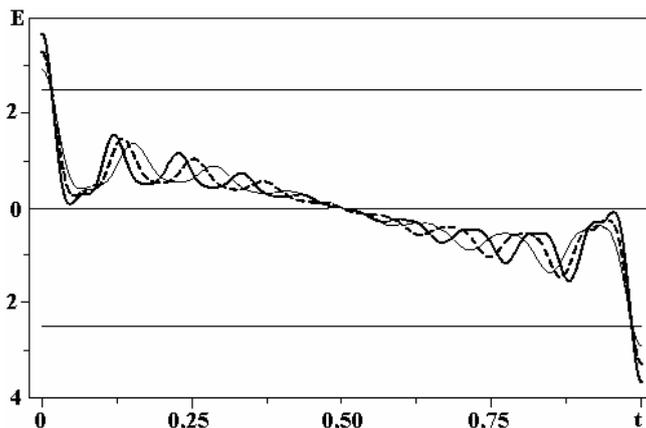
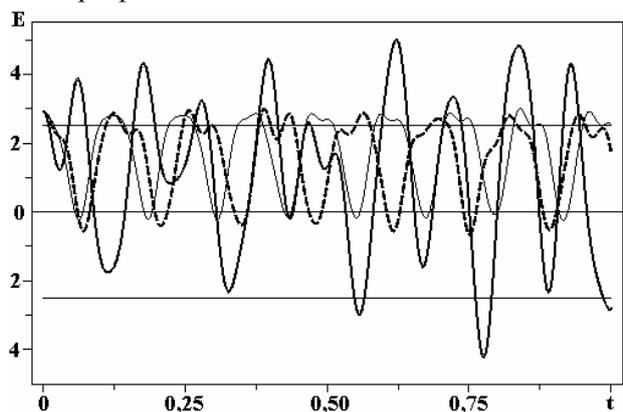
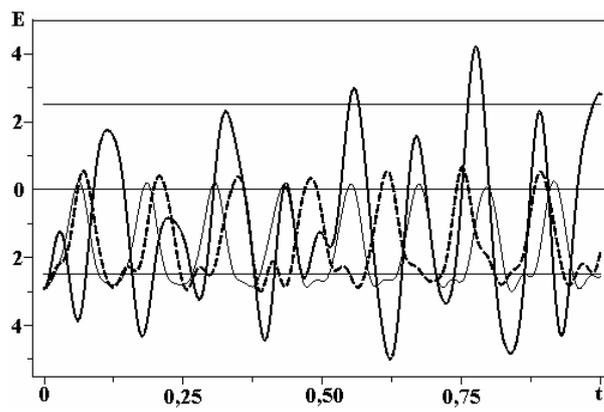


Рис. 1. Зависимости от полярного угла  $\mathcal{G}$  величины безразмерной напряжённости электрического поля в окрестности свободной поверхности заряженного слоя жидкости на поверхности обводненной градины, когда начальная деформация определяется модой с номером  $k = 14$  (тонкая кривая),  $k=16$  (штриховая кривая),  $k=18$  (толстая кривая) при  $t = 0$ ;  $W = 0,1$ ,  $w = 0,1$ ,  $\varepsilon = 0,1$ ;  $R_0 = 0,98$ . Здесь и на остальных рисунках прямая линия  $E = 2,5$ , параллельная оси абсцисс, соответствует безразмерной напряжённости электростатического поля  $20 \text{ кВ/см}$ , критической для зажигания коронного разряда в облаке на высоте  $4 - 5 \text{ км}$

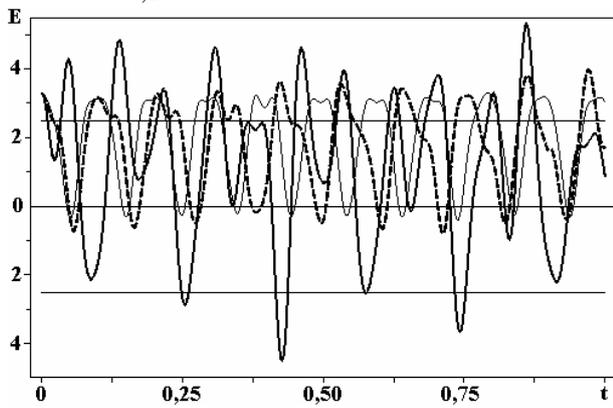


a

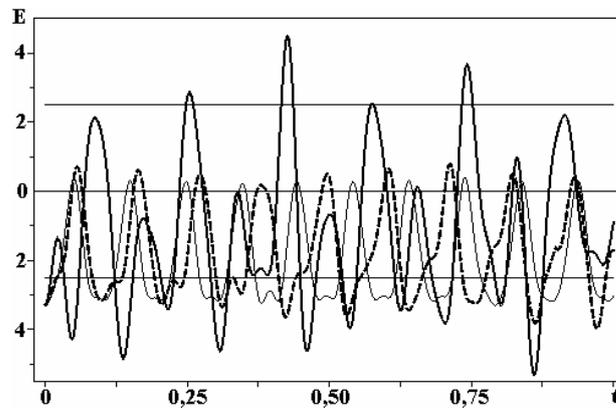


b

Рис. 2. Зависимость от времени величины безразмерной напряжённости электрического поля на поверхности обводненной градины на оси симметрии системы  $\mathcal{G} = 0$  (a),  $\mathcal{G} = \pi$  (b) для различных значений толщины жидкого слоя  $R_0 = 0,9$  (тонкая кривая),  $R_0 = 0,94$  (штриховая кривая),  $R_0 = 0,98$  (толстая кривая), когда начальная деформация определяется четырнадцатой модой ( $n = 14$ ) при  $W = 0$ ,  $w = 0,1$ ,  $\varepsilon = 0,1$



a



b

Рис. 3. То же, что на рис.2, но для шестнадцатой моды ( $n = 16$ )

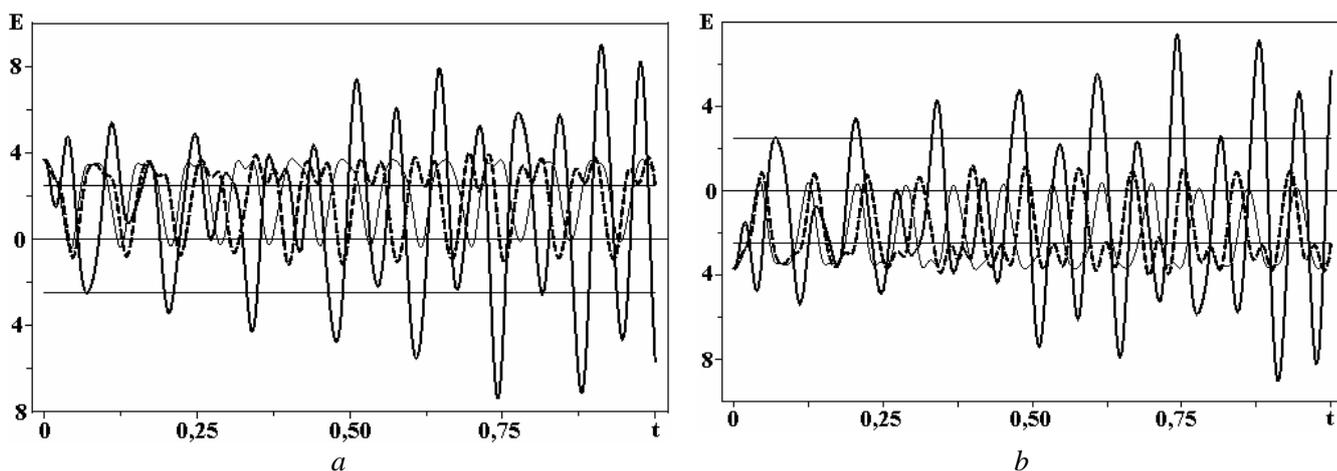


Рис. 4. То же, что на рис.2, но для восемнадцатой моды ( $n = 18$ )

В завершение следует отметить, что приведенные выше иллюстрации к аналитическому выражению (8) для величины напряженности поля на вершинах градины имеют качественный характер и демонстрируют лишь тенденции изменения напряженности при изменении физических параметров, поскольку рассчитаны с нарушением асимптотичности.

**Заключение.** В квадратичном приближении по амплитуде осцилляций слоя воды на поверхности обводненной градины в однородном внешнем электростатическом поле получено и проанализировано выражение для напряженности электрического поля в ее окрестности. Выяснилось, что даже при малых значениях напряженности внешнего электрического поля напряженность электростатического поля у гребней капиллярных волн в слое воды на поверхности градины в окрестности ее вершин достаточно велика для зажигания коронного заряда.

*Работа выполнена при поддержке грантов: Рособразования №2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.*

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дьячук В.А., Мучник В.А. Коронный разряд с обводненной градины, основной механизм инициирования молнии // ДАН СССР. 1979. Т.248. № 1. С. 60–63.
2. Grigor'ev A. I., Shiryayeva S. O. The possible physical mechanism of initiation and growth of lightning // Physica Scripta. 1996. V.54. P. 660–666.
3. Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова. 2008. 535 с.
4. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Волкова М.В. О нелинейных осцилляциях заряженной капли в аэродинамическом потоке // Электронная обработка материалов. 2004. № 6. С. 25–31.
5. Коромыслов В.А., Григорьев А.И. Нелинейные осцилляции заряженного слоя электропроводной жидкости на поверхности твердого сферического ядра // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 2. С. 42–50.
6. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. О возможности зажигания коронного разряда у поверхности нелинейно-осциллирующего жидкого слоя на поверхности заряженной градины // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып.11. С. 10–19.
7. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.

*Поступила 10.11.09*

#### Summary

It is found the solution of a problem of nonlinear oscillation of a water layer on a surface of melting hailstone in external uniform electrostatic field calculation. It is found the electric field intensity near the hailstone surface. It is found that the value of the electric field intensity near the hailstone surface is sufficient for corona discharge ignition.