ВЛИЯНИЕ ПЛОТНОСТИ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТРУИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ КОЛЛИНЕАРНО ОДНОРОДНОМУ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМУ ПОЛЮ

А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Н.А. Полянцев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, grig@uniyar.ac.ru

Введение. Проблемы спонтанного капиллярного и электростатического распада струй представляют значительный интерес в связи с многочисленными приложениями феномена электродиспергирования жидкости в технике и технологии [1–7]. В частности, исследование феноменов стабилизации капиллярных волн продольным электростатическим полем [8–15] и дестабилизации движением относительно материальной внешней среды [5, 16–17] представляет значительный интерес благодаря попыткам физической трактовки многочисленных режимов электродиспергирования жидкости, наблюдаемых экспериментально [3, 18–20]. В связи со сказанным представляется интересным исследовать устойчивость цилиндрической струи при одновременном влиянии обоих вышеупомянутых факторов: стабилизирующего влияния внешнего однородного коллинеарного струе электростатического поля и дестабилизирующего влияния движения струи относительно внешней материальной среды.

Формулировка задачи. Пусть бесконечная цилиндрическая струя идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости с массовой плотностью ρ_2, диэлектрической проницаемостью ε_{in} и коэффициентом поверхностного натяжения σ, имеющая радиус R, движется параллельно однородному электростатическому полю $\vec{E}_0$ с постоянной скоростью $\vec{U}_0$. Массовую плотность внешней среды обозначим ρ_1, а её диэлектрическую проницаемость – ε_{ex}. Зададимся целью исследования устойчивости капиллярных волн с произвольной симметрией (с произвольными значениями азимутального числа m) на поверхности такой струи.

Перейдем в инерциальную систему отсчета, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью $\vec{U}_0$. В такой системе отсчета поля скоростей течения жидкости в струе и окружающей среде полностью определятся капиллярными волнами на ее поверхности и в безразмерных переменных $\rho_2 = \sigma = R = 1$, где будет проведено все рассмотрение, являются величинами такого же порядка малости, что и амплитуды волн. Движение жидкости в струе и среде будем принимать потенциальным, а потенциалы полей скоростей волновых течений жидкости и среды обозначим $\psi_2(r,t)$ (или ψ_{in}) и $\psi_1(r,t)$ (или ψ_{ex}) соответственно.

Весь анализ проведем в цилиндрической системе координат $\{r, \varphi, z\}$ с осью OZ, совпадающей по направлению с осью симметрии цилиндрической струи, направленной вдоль вектора скорости $\vec{U}_0$. Уравнение свободной поверхности струи, возмущенной тепловым капиллярным волновым движением бесконечно малой амплитуды, запишем в виде

$$F(r,\varphi,z,t) = r - (1+\xi(\varphi,z,t)) = 0,$$

где $\xi(\varphi,z,t)$ – возмущение цилиндрической поверхности струи, вызванное капиллярным волновым движением.

Математическая формулировка задачи имеет вид [8–14]:

$$\Delta\psi_{in}(\vec{r},t) = 0; \qquad \Delta\psi_{ex}(\vec{r},t) = 0; \qquad \Delta\Phi_{in}(\vec{r},t) = 0; \qquad \Delta\Phi_{ex}(\vec{r},t) = 0;$$

$$r=1+\xi:\quad \frac{dF}{dt}\equiv\frac{\partial F}{\partial t}+\left(\nabla\Psi_j,\nabla\right)F=0;\quad \left(\vec{n},\nabla\right)\psi_{in}\left(\vec{r},t\right)=\left(\vec{n},\nabla\right)\psi_{ex}\left(\vec{r},t\right);$$

$$P_{in}\left(\vec{r},t\right)-P_{ex}\left(\vec{r},t\right)+P_E\left(\vec{r},t\right)=P_\sigma\left(\vec{r},t\right);$$

$$P_{in}\left(\vec{r},t\right)\equiv P_{in}^{(0)}-\partial_t\Psi_{in}\left(\vec{r},t\right)-\frac{1}{2}\left(\nabla\Psi_{in}\left(\vec{r},t\right)\right)^2;$$

$$P_{ex}\left(\vec{r},t\right)=-\rho\partial_t\Psi_{ex}\left(\vec{r},t\right)-\frac{\rho}{2}\left(-\vec{U}_0+\nabla\Psi_{ex}\left(\vec{r},t\right)\right)^2;$$

$$\varepsilon_{in}\left[\left(\vec{n},\nabla\right)\Phi_{in}\left(\vec{r},t\right)\right]=\varepsilon_{ex}\left[\left(\vec{n},\nabla\right)\Phi_{ex}\left(\vec{r},t\right)\right];$$

$$\left(\vec{\tau},\nabla\right)\Phi_{in}\left(\vec{r},t\right)=\left(\vec{\tau},\nabla\right)\Phi_{ex}\left(\vec{r},t\right);$$

$$r\to 0:\quad \nabla\psi_{in}\left(\vec{r},t\right)\to 0;\quad \Phi_{in}\left(\vec{r},t\right)<\infty;$$

$$r\to\infty:\ -\nabla\Phi_{ex}\left(\vec{r},t\right)=\vec{E}_0;\ \nabla\Psi_{ex}\left(\vec{r},t\right)\to-\vec{U}_0;$$

$$\int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda}\int\limits_0^{1+\xi}\int\limits_0^{2\pi}dzrdrd\varphi=\pi\lambda,$$

$\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ – единичные векторы касательной и нормали к возмущенной поверхности струи; λ – длина волны; $\psi_{in}\left(\vec{r},t\right)$, $\Phi_{in}\left(\vec{r},t\right)$ и $\psi_{ex}\left(\vec{r},t\right)$, $\Phi_{ex}\left(\vec{r},t\right)$ – гидродинамические и электростатические потенциалы в струе и среде соответственно; $P_{in}\left(\vec{r},t\right)$ и $P_{ex}\left(\vec{r},t\right)$ – поля давлений в струе и внешней среде; $P_{in}^{(0)}$ – постоянное давление в цилиндрической струе в отсутствие волнового движения на её поверхности; $\rho\equiv\rho_1/\rho_2$ – безразмерная плотность среды; $P_\sigma\left(\vec{r},t\right)$ – давление сил поверхностного натяжения [13]:

$$P_\sigma\left(\vec{r},t\right)\equiv div\,\vec{n}\equiv-\left(\xi+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2}\right);$$

$P_E\left(\vec{r},t\right)$ – давление электрического поля на поверхность струи [6, 7]:

$$P_E\left(\vec{r},t\right)=-\frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi}\left[\left(\nabla\Phi_{ex}\left(\vec{r},t\right)\right)^2+2\left(\left(\vec{n},\nabla\right)\Phi_{ex}\left(\vec{r},t\right)\right)^2\right]+$$
$$+\frac{\varepsilon_{in}}{8\pi}\left[\left(\nabla\Phi_{in}\left(\vec{r},t\right)\right)^2-2\left(\left(\vec{n},\nabla\right)\Phi_{in}\left(\vec{r},t\right)\right)^2\right].$$

Дисперсионное уравнение. Решение сформулированной задачи ищется в виде разложений искомых функций по $I_m\left(kr\right)$ и $K_m\left(kr\right)$ – модифицированным функциям Бесселя первого и второго рода соответственно [21] по схеме, подробно описанной в [4, 6–8, 13]. Здесь $k\equiv 2\pi/\lambda$ – волновое число. Процедура отыскания решения не сложна, но достаточно громоздка, а потому, имея в виду цель настоящего рассмотрения, заключающуюся в исследовании устойчивости капиллярных волн на поверхности струи, сразу выпишем дисперсионное уравнение задачи в окончательном виде:

$$\left[\rho_1 G_m(k)-H_m(k)\right]S^2-2k\rho_1 U_0 G_m(k)S+$$
$$+H_m(k)G_m(k)\left\{\frac{k^2\rho_1 U_0{}^2}{H_m(k)}+\frac{1}{4\pi}\frac{(\varepsilon_{ex}-\varepsilon_{in})^2k^2E_0{}^2}{\left[\varepsilon_{in}G_m(k)-\varepsilon_{ex}H_m(k)\right]}-1+k^2+m^2\right\}=0;$$

$$H_m\left(k\right)\equiv m-\frac{k\,K_{m+1}\left(k\right)}{K_m\left(k\right)};\qquad G_m\left(k\right)\equiv m+\frac{k\,I_{m+1}\left(k\right)}{I_m\left(k\right)}.$$

Решения дисперсионного уравнения легко выписываются:

$$S_{1,2} \equiv \omega \pm i\lambda \equiv -\frac{k\rho U_0 G_m(k)}{\rho G_m(k) - H_m(k)} \pm \left\{ \frac{\rho^2 k^2 U_0{}^2 G_m{}^2(k)}{\left[\rho G_m(k) - H_m(k)\right]^2} - \right.$$

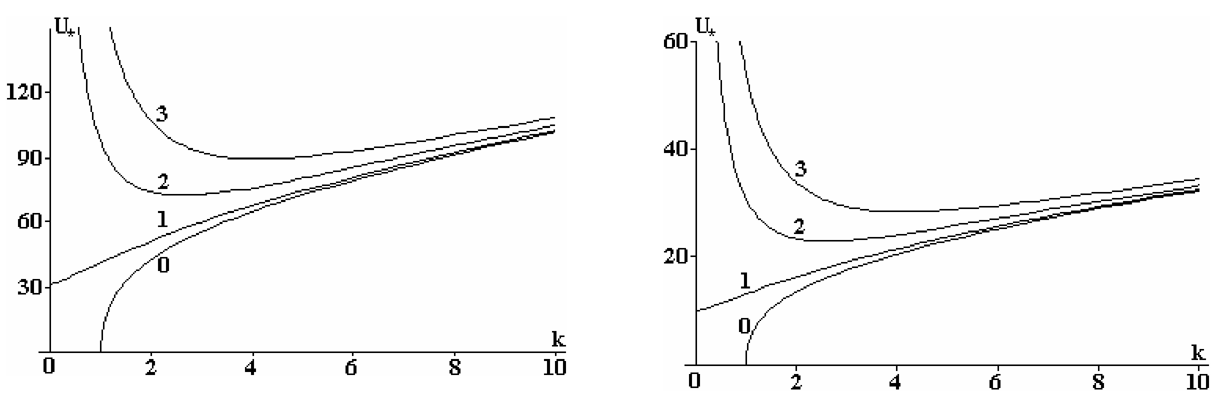
$$\left. -\frac{H_m(k) G_m(k)}{\rho G_m(k) - H_m(k)} \left[\frac{k^2 \rho U_0{}^2}{H_m(k)} + \frac{(\varepsilon_{ex} - \varepsilon_{in})^2 k^2 E_0^2}{4\pi\left[\varepsilon_{in} G_m(k) - \varepsilon_{ex} H_m(k)\right]} - 1 + k^2 + m^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

При изменении физических параметров системы волны на поверхности раздела среды будут сохранять устойчивость до тех пор, пока частоты $S_{1,2}$ остаются вещественными, то есть пока подкоренное выражение в (1) положительно. Когда подкоренное выражение станет отрицательным, у частот $S_{1,2}$ появится мнимая часть, и они образуют пару комплексно-сопряженных корней: $S \equiv \mathrm{Re}\, S \pm i \,\mathrm{Im}\, S \equiv \omega \pm i\gamma$. Амплитуда волны с отрицательной мнимой частью частоты будет экспоненциально со временем увеличивать свою амплитуду, что приведет к распаду струи на отдельные капли. Амплитуда волны с положительной мнимой частью частоты будет экспоненциально во времени затухать.

Приравнивая в (1) подкоренное выражение нулю, получим критическую величину скорости движения струи относительно среды U_*, при которой происходит переход от устойчивых волн к неустойчивым:

$$U_* = \sqrt{\left(1 - k^2 - m^2 - \frac{k^2(\varepsilon_{ex} - \varepsilon_{in})^2 E_0^2}{4\pi\left[\varepsilon_{in} G_m(k) + \varepsilon_{ex} H_m(k)\right]}\right) \frac{\left[H_m(k) - \rho G_m(k)\right] H_m(k)}{\left[3\rho G_m(k) + H_m(k)\right]\rho k^2}}. \qquad (2)$$

Обсуждение полученных результатов. На рис. 1 приведены результаты расчетов по (2) в виде зависимостей $U_* = U_*(k)$ для волн с первыми четырьмя азимутальными числами *m* (с различной симметрией), выполненных в отсутствие электрического поля при различных безразмерных плотностях окружающей среды. Прежде всего бросается в глаза то обстоятельство, что, хотя приведенные кривые при малых значениях волновых чисел *k* существенно различаются, с ростом *k* все кривые асимптотически сближаются. Это означает, что при больших значениях *k* волны с произвольной симметрией будут возбуждаться потоком окружающей среды, имеющим фиксированную скорость U_0 внутри весьма узкого диапазона волновых чисел Δk, который легко найти, пересекая приведенные кривые прямой параллельной оси *k* (при больших *k*). Видно также, что с ростом плотности окружающей среды критические значения скорости снижаются при всех *k*. Рис. 1,*г* иллюстрирует ситуацию, когда плотности струи и среды примерно равны (такая ситуация встречается, например, в канале разряда молнии). Несложно видеть, что граница раздела таких сред будет неустойчива уже при достаточно малых значениях скорости относительного движения так же, как и в ситуации, проиллюстрированной рис. 1,*д*, характерной, например, для струи газа в жидкости. Капиллярная неустойчивость канала разряда линейной молнии может привести к образованию структуры типа четочной молнии [22].



а *б*

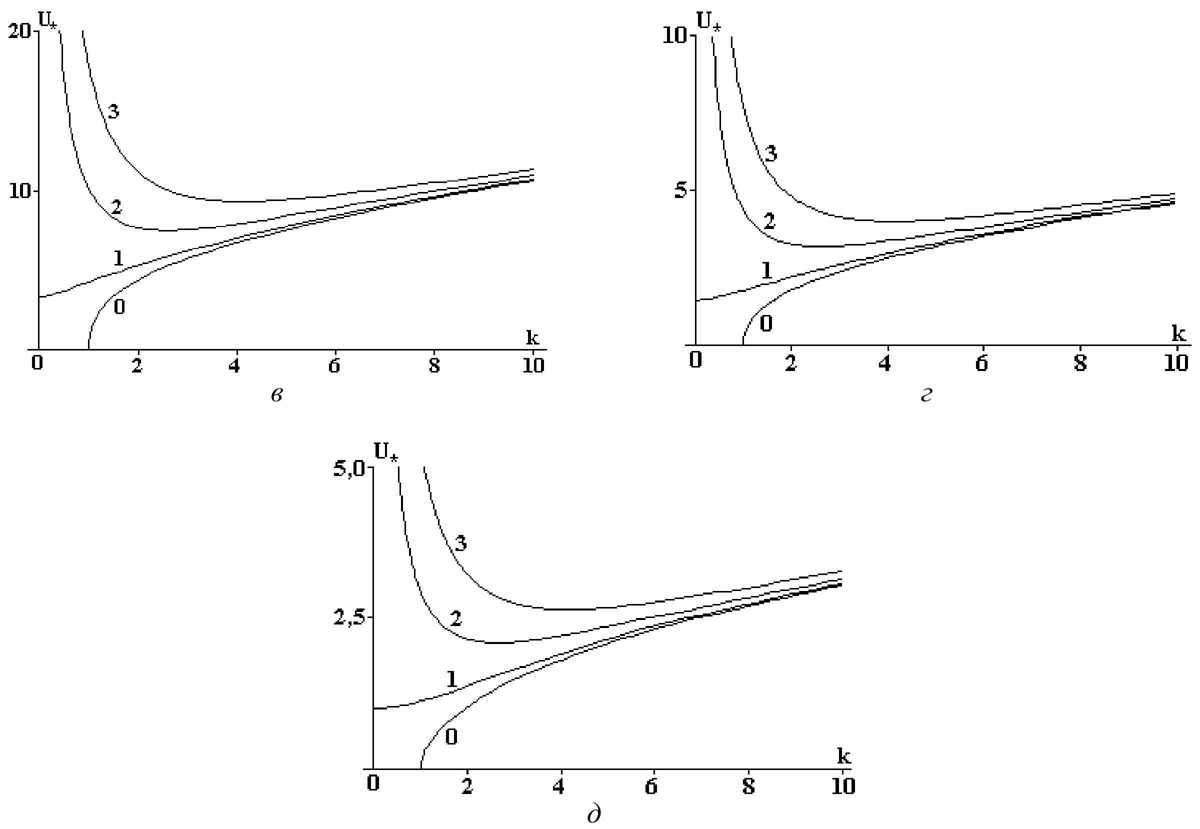


Рис. 1. Зависимости $U_* = U_*(k)$ *для неосесимметричных волн с первыми четырьмя азимутальными числами m, рассчитанные при* $E_0=0$, $\varepsilon_{ex} = 1, \varepsilon_{in} = 80$ *и различных безразмерных плотностях окружающей среды: а)* $\rho = 0{,}001$; *б)* $\rho = 0{,}01$; *в)* $\rho = 0{,}1$; *г)* $\rho = 0{,}9$; *д)* $\rho = 1000$. *Цифра у кривой соответствует азимутальному числу*

Рис. 2 представляют те же зависимости, что и на рис. 1, но построенные уже при наличии внешнего электростатического поля. Видно, что продольное электростатическое поле заметно повышает устойчивость осесимметричных волн, особенно для волн с малыми значениями волновых чисел (для длинных волн). Согласно рис. 2,*б* существует диапазон волновых чисел (при $k<2$), в котором изгибная и изгибно-деформационная моды возбуждаются потоком среды раньше, чем осесимметричная.

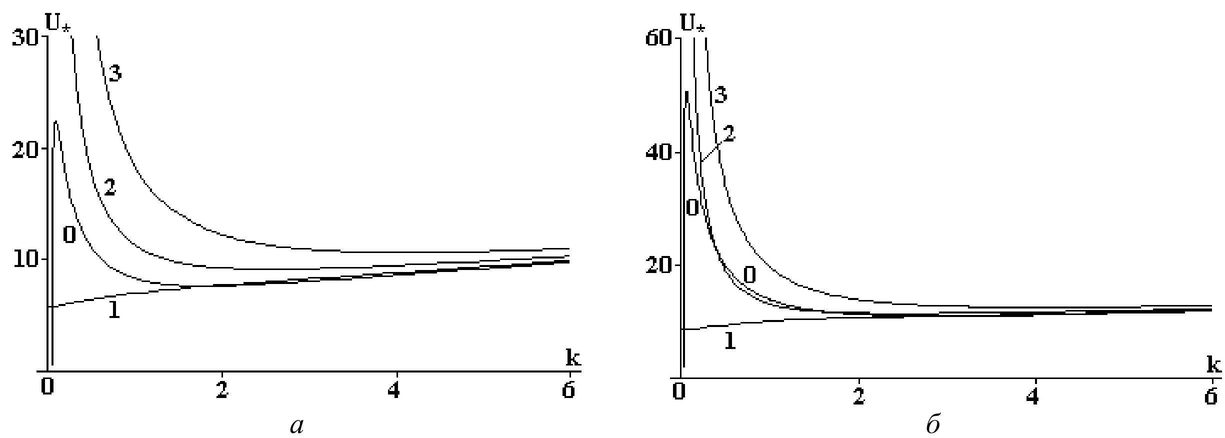


Рис. 2. Зависимости, аналогичные приведенным на рис. 1, но рассчитанные при $\rho = 0{,}1$ *и наличии продольного электростатического поля: а)* $E_0 = 0{,}6$; *б)* $E_0 = 1$

На рис. 3 приведены зависимости $U_* = U_*(k)$ для осесимметричных волн, рассчитанные при трех различных значениях напряженности продольного электрического поля E_0 и трех различных плотностях среды. Из рисунка несложно видеть, что 9 кривых разбиваются на три группы, соответствующие различным плотностям окружающей среды. В каждой группе с одним значением плотности окружающей среды собираются кривые с различными значениями напряженности внешнего электрического поля, которое существенно сказывается на длинных волнах (волнах с малыми волновыми числами). Стабилизирующее влияние продольного электрического поля проявляется в сокращении роста напряженности поля диапазона волновых чисел неустойчивых волн в окрестности начала координат и повышении критического значения скорости движения струи относительно среды, при котором начинается неустойчивость.

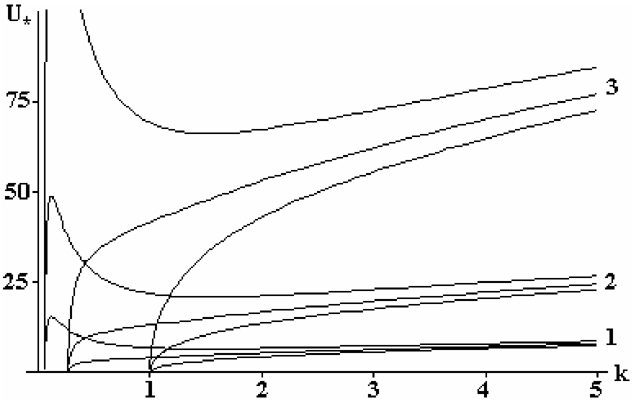


Рис. 3. Зависимости $U = U_*(k)$ для осесимметричных волн, рассчитанные при $\varepsilon_{ex} = 1$, $\varepsilon_{in} = 80$, различных безразмерных плотностях внешней среды: 1) $\rho = 0,1$; 2) $\rho = 0,01$; 3) $\rho = 0,001$ и напряженности внешнего продольного электростатического поля E_0: 0 – крайние нижние кривые; 0,3 – средние; 0,5 – крайние верхние

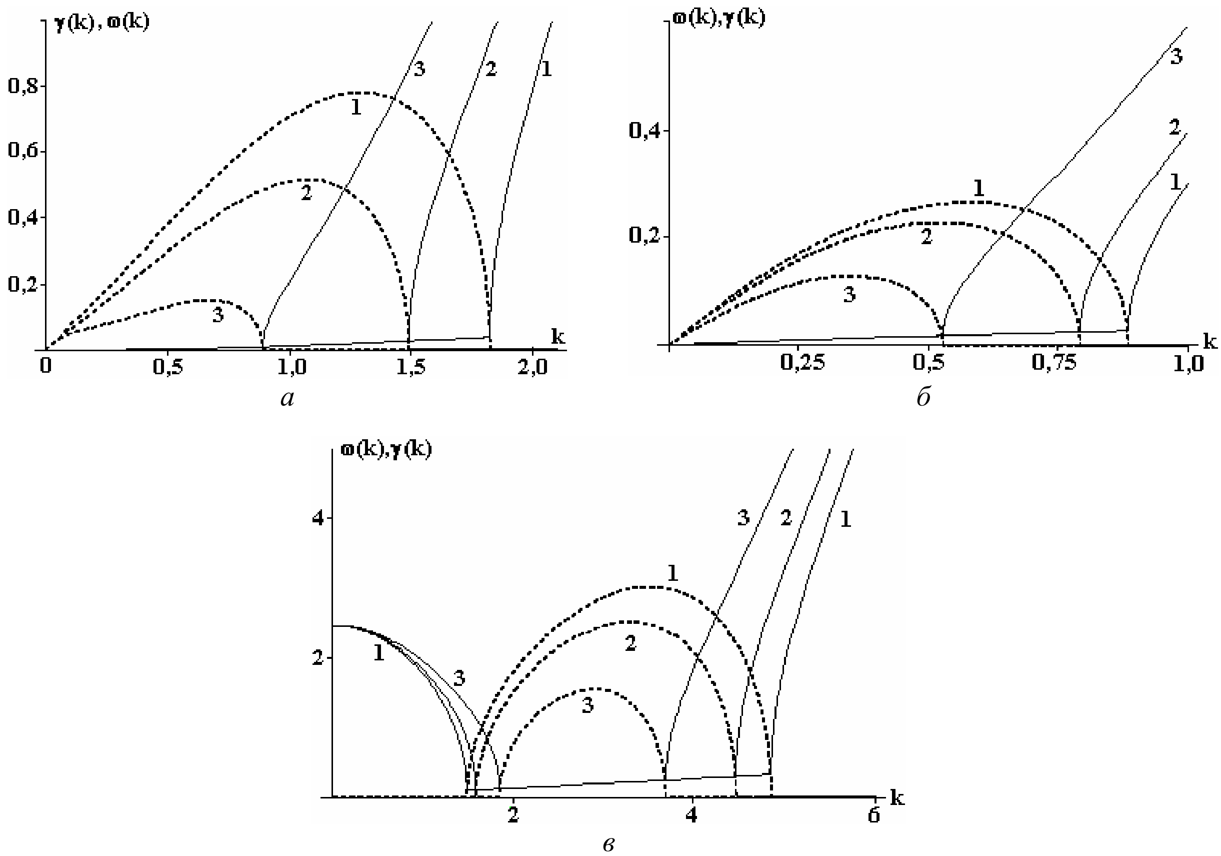


Рис. 4. Зависимости $\omega = \omega(k)$ (сплошные кривые) и $\gamma = \gamma(k)$ (пунктирные кривые), рассчитанные при $\varepsilon_{ex} = 1$, $\varepsilon_{in} = 80$; $\rho = 0,001$. а) $m = 0$; $U_0 = 40$; 1) $E_0 = 0$; 2) $E_0 = 0,2$; 3) $E_0 = 0,3$; б) $m = 0$; $U_0 = 40$; 1) $E_0 = 0$; 2) $E_0 = 0,1$; 3) $E_0 = 0,2$; в) $m = 2$; $U_0 = 80$; 1) $E_0 = 0$; 2) $E_0 = 0,2$; 3) $E_0 = 0,33$

На рис. 4 приведены результаты расчетов по формуле (1) в виде зависимостей $\omega = \omega(k)$ и $\gamma = \gamma(k)$ для волн с первыми тремя азимутальными числами m, выполненных для трех различных значений напряженности внешнего продольного электрического поля при фиксированных величинах скорости струи и плотности окружающей среды. Видно, что решения делятся на два типа: устойчивые и неустойчивые волны. Частоты неустойчивых волн, порождаемых тангенциальным скачком поля скоростей на поверхности струи, определяются выражением

$$\omega \equiv -\frac{k\rho U_0 G_m(k)}{\rho G_m(k) - H_m(k)}, \tag{3}$$

стоящим в (1) перед радикалом (на рис. 4 они приведены отрезками сплошных прямых, проведенных под углом к оси k), а инкремент γ – самим радикалом, когда подкоренное выражение становится отрицательным. Решения в виде неустойчивых волн соответствуют реализации неустойчивости типа Кельвина-Гельмгольца. Сплошные кривые, отходящие вверх от прямых (3), соответствуют обычным капиллярным волнам. Из рис. 4 видно, что с ростом E_0 величины инкрементов неустойчивости снижаются, а диапазоны волновых чисел, соответствующие неустойчивым волнам, сужаются независимо от симметрии волн (независимо от величины азимутального числа m).

Заключение. Проведен анализ дисперсионного уравнения для капиллярных волн с произвольной симметрией на поверхности струи, движущейся коллинеарно внешнему однородному электростатическому полю в идеальной несжимаемой диэлектрической среде. Исследовано влияние отношения плотностей окружающей среды и жидкости струи на устойчивость капиллярных волн с произвольной симметрией на поверхности струи. Показано, что увеличение относительной плотности среды носит дестабилизирующий характер для волн на поверхности струи независимо от их симметрии, так же как и увеличение скорости движения струи относительно струи. Внешнее продольное электростатическое поле повышает устойчивость волн на поверхности струи.

Работа выполнена при поддержке грантов Рособрнауки № РНП 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-08-00148.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Егорова Е.В. О некоторых особенностях нелинейного резонансного взаимодействия мод заряженной струи. *Электронная обработка материалов*. 2005, **41**(1), 42–50.

2. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Воронина Н.В., Егорова Е.В. Об осцилляциях и спонтанном распаде заряженных жидких струй. *Электронная обработка материалов*. 2006. **42**(6), 23–34.

3. Шутов А.А. Формирование и устойчивость заряженной вязкой струи в сильном электрическом поле. *Изв. РАН. МЖГ*. 2006, (6), 52–67.

4. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. *Спонтанный капиллярный распад заряженных струй*. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2007. 340 с.

5. Eggers J., Willermaux E. Physics of liquid jets. *Rep. Prog. Phys*. 2008, **71**(036601), 1–79.

6. Shiryaeva S.O. and Grigor'ev A.I. On stabilization of capillary instability of dielectric liquid jet by volume electric charge. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2009, **45**(5), 357–363.

7. Grigor'ev A.I. and Shiryaeva S.O. On electrostatic instability of a space-charged jet of dielectric liquid. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2009, **45**(6), 465–470.

8. Глонти Г. А. К теории устойчивости жидких струй в электрическом поле. *ЖЭТФ*. 1958, **34**(5), 1328–1330.

9. Nayyar N.K., Murty G.S. The stability of a dielectric jet in a presence of a longitudinal electric field. *Proc. Phys. Soc*. 1960, **75**(Pt.3., 483), 369–373.

10. Saville D.A. Elecrohydrodynamic stability: fluid cylinders in longitudinal electric fields. *Phys. Fluids*. 1970, **13**(12), 2987–2994.

11. Шкадов В.Я., Шутов А.А. Устойчивость поверхностно заряженной вязкой струи в электрическом поле. *Изв. РАН. МЖГ*. 1998, (2), 29–40.

12. Shiryaeva S.O. and Grigor'ev A.I. and Volkova M.V. On the possibility of the full stabilization of the capillary instability of a dielectric liquid jet by a longitudinal static field. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2009, **45**(3), 193–198.

13. Ширяева С.О. О капиллярной устойчивости цилиндрической струи диэлектрической жидкости в продольном электростатическом поле. *ЖТФ*. 2010, **80**(2), 47–51.

14. Григорьев А.И., Воронина Н.В., Ширяева С.О. Асимптотическое исследование нелинейных неосесимметричных волн на поверхности незаряженной диэлектрической струи в продольном электростатическом поле. *ЖТФ*. 2010, **80**(10), 22–29.

15. Ширяева С.О. Об устойчивости объёмно заряженной струи диэлектрической жидкости, ускоренно движущейся в коллинеарной струе электрического поля. *Изв. РАН. МЖГ*. 2010, (3), 57–68.
16. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Волкова М.В. О влиянии плотности внешней среды на устойчивость капиллярных волн на поверхности жидкой струи, движущейся относительно среды. *Электронный журнал "Исследовано в России", http://zhurnal.ape.relarn.ru /articles/2010/017.pdf* 2010, 232–240.
17. Grigor’ev A.I., Shiryaeva S.O., Petrushov N.A. and and Volkova M.V. Instability of the lateral surface of strongly charged jets in a collinear flow of material environment. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2010, **46**(3), 218–222.
18. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes. *J. Electrostatics*. 1990, **25,** 165–184.
19. Jaworek A., Krupa A. Classification of the modes of EHD spraying. *J. Aerosol Sci*. 1999, **30**(7), 873–893.
20. Kim O.V., Dunn P.F. Controlled production of droplets by in-flight electrospraying. Langmuir. 2010, **26,** 15807–15813.
21. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 830 с.
22. Барри Дж. *Шаровая молния и четочная молния*. М.: Мир, 1983. 286 с.

Поступила 21.02.11

Summary

On the basis of the analysis of the dispersion equation for nonaxisymmetric capillary waves on a surface of cylindrical jet ideal incompressible conductive liquids moving collinear to a uniform electrostatic field in a material environment medium, is shown, that increasing of an environment medium density carries destabilizing character. The instability of a nonaxisymmetric waves has threshold character on speed of a jet relative to medium.