С.О. Ширяева, Д.О. Корниенко, М.В. Волкова

ОБ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ КАПЛИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, shir@uniyar.ac.ru

Введение. Исследование физического механизма реализации неустойчивости заряженной капли по отношению к собственному заряду представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями в технике и технологии (см., например, обзоры [1–7] и приведенные там ссылки). Первое корректное аналитическое исследование проведено Рэлеем еще в 19-м веке [8]. Тем не менее многие вопросы, касающиеся устойчивости заряженной капли, остаются малоизученными. Сказанное в первую очередь относится к осцилляциям и устойчивости заряженных капель, отличных от сферических форм [9–11]. Этой проблеме и посвящена данная работа, выполненная по аналогии с [12], но с учетом слагаемых в асимптотических разложениях более высоких порядков малости по отклонению формы капли от сферической.

Формулировка задачи. Будем решать задачу об устойчивости капиллярных осцилляций бесконечно малой амплитуды капли радиуса R_0 несжимаемой идеально проводящей жидкости, имеющей заряд Q и находящейся в идеальной несжимаемой диэлектрической среде.

Предположим, что заряд капли чуть больше критического в смысле реализации ее неустойчивости по отношению к поверхностному заряду [8]. При этом теряет устойчивость основная мода капиллярных осцилляций капли, и она принимает вытянутую слабосфероидальную форму, эксцентриситет которой растет по мере роста амплитуды неустойчивой основной моды.

Уравнение поверхности вытянутого сфероида в сферических координатах с началом в его центре имеет вид

$$r(\vartheta)=\frac{(1-e^2)^{1/6}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\vartheta}}, \qquad (1)$$

где e – эксцентриситет сфероида, который будем принимать малым $e^2 \ll 1$.

Примем, что поверхность сфероидальной капли возмущена капиллярным волновым движением тепловой природы так, что уравнение свободной поверхности капли имеет вид

$$F(r,\vartheta,t)\equiv r-r(\vartheta)-\xi(\vartheta,t)=0, \qquad (2)$$

где $\max|\xi(\vartheta,t)|\ll \min r(\vartheta)$, а функция $\xi(\vartheta,t)$ описывает отклонение осциллирующей поверхности капли от сфероидальной поверхности.

Будем исследовать устойчивость мод капиллярных осцилляций такой капли на интервале времени, много меньшем характерного времени увеличения амплитуды неустойчивой основной моды осцилляций так, что на указанном интервале времени эксцентриситет сфероида можно считать постоянным.

Движения жидкости в капле и среде, так же как и электрическое поле собственного заряда капли во внешней среде, будем считать потенциальными с потенциалами $\psi_1(\vec r,t)$, $\psi_2(\vec r,t)$ и $\Phi(\vec r,t)$ соответственно. Математическая формулировка задачи расчета капиллярных осцилляций будет иметь вид

$$\Delta\psi_i(\vec r,t)=0, \qquad i=1;2, \qquad \Delta\Phi(\vec r,t)=0, \qquad (3)$$

$$r\to\infty: \quad |\nabla\psi_2|\to 0; \qquad |\nabla\Phi(\vec r,t)|\to 0;$$

$$r\to 0: \quad |\nabla\psi_1|\to 0;$$

$$r=r(\vartheta)+\xi(\vartheta,t): \quad \Phi(\vec r,t)=\mathrm{const}\equiv\Phi_0;$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n_1}=-\frac{\partial\psi_2}{\partial n_2}\equiv\frac{\partial\psi}{\partial n}; \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}=\frac{\partial \psi}{\partial n}, \qquad (5)$$

$$-\rho_1\frac{\partial \psi_1}{\partial t}+\rho_2\frac{\partial \psi_2}{\partial t}+P_E=P_\sigma, \qquad (6)$$

где ρ_1, ρ_2 – плотность сред внутри и вне капли; $P_E\equiv\left(-\nabla\Phi(\vec{r},t)\right)^2/8\pi$ – давление электростатических сил на границе раздела сред, происходящее при наличии заряда на капле; $P_\sigma\equiv\sigma\cdot div\,\vec{n}$ – давление сил поверхностного натяжения; $\vec{n}_i$ – нормаль к границе раздела, внешняя к *i*-й среде. Аналитические выражения для P_E и P_σ приведены в Приложении А и Приложении В соответственно.

Все рассмотрение проведем в сферических координатах, связанных с центром массы капли, в безразмерных переменных, в которых $R_0=\rho_1=\sigma=1$, в линейном по $|\xi|$ и квадратичном по e^2 приближении.

Процедура определения решения. Неизвестные функции будем искать в виде разложений по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$:

$$\xi(\vartheta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}M_n(t)\cdot P_n(\mu);\qquad \psi_1(\vec{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(1)}(t)\cdot r^n\cdot P_n(\mu);$$

$$\psi_2(\vec{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(2)}(t)\cdot r^{-(n+1)}\cdot P_n(\mu);\quad \Phi(\vec{r},t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(t)\cdot r^{-(n+1)}\cdot P_n(\mu);\quad \mu\equiv\cos\vartheta. \qquad (7)$$

Удовлетворяя граничным условиям (4) и (5), можно найти связь между коэффициентами $A_n^{(1)}(t)$, $A_n^{(2)}(t)$ и $M_n(t)$.

Производную по нормали в (4) можно представить в виде

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial n}\equiv\vec{n}\bullet\nabla\psi_i, \qquad (8)$$

$$\vec{n}=\frac{\nabla F(r,\vartheta,t)}{|\nabla F(r,\vartheta,t)|},\qquad \nabla F(r,\vartheta,t)=\vec{e}_r-\frac{\partial_\vartheta r(\vartheta)+\partial_\vartheta\xi}{r}\vec{e}_\vartheta,$$

$$|\nabla F(r,\vartheta,t)|\approx\sqrt{1+\frac{\left(\partial_\vartheta r(\vartheta)\right)^2+2\cdot\partial_\vartheta r(\vartheta)\cdot\partial_\vartheta\xi}{r(\vartheta)^2}}. \qquad (9)$$

Оператор ∂_ϑ означает частную производную по полярному углу. Выражение (9) выписано в линейном приближении по $|\xi|$.

Раскладывая (1) в ряд по e^2 и сохраняя слагаемые до e^4 включительно, получим

$$\mathrm{r}(\vartheta)=1+\mathrm{e}^2\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot(3\cdot\cos^2\vartheta-1)\right)+\mathrm{e}^4\cdot\left(\frac{1}{72}\cdot(27\cdot\cos^4\vartheta-6\cdot\cos^2\vartheta-5)\right)$$

или

$$r(\vartheta)=1+\frac{1}{3}e^2P_2(\mu)+\frac{1}{315}e^4(50P_2(\mu)+27P_4(\mu)-7). \qquad (2a)$$

Подставляя (2а) в (9), можно получить для орта нормали к поверхности капли, возмущенной волновым движением, выражение

$$\vec{\mathrm{n}}=n_r\cdot\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{r}+n_\vartheta\cdot\vec{\mathrm{e}}_\vartheta,$$

где $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\vartheta$ – единичные векторы радиального и полярного направлений в сферической системе координат, а n_r и n_ϑ – соответствующие проекции вектора нормали на орты сферической системы координат, определяющиеся следующим образом:

$$n_r=1-\mathrm{e}^4\cdot\left(\frac{1}{18}\cdot\partial_\vartheta\mathrm{P}_2(\mu)^2\right)-\frac{1}{3}\cdot e^2\cdot\partial_\vartheta\mathrm{P}_2(\mu)\cdot\partial_\vartheta\xi(\vartheta,t)+e^4\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\left(\partial_\vartheta\mathrm{P}_2(\mu)\right)^2\cdot\xi(\vartheta,t)+\right.$$

$$+\left(-\frac{10}{63}\cdot\partial_\vartheta \mathrm{P}_2(\mu)+\frac{2}{9}\cdot\partial_\vartheta \mathrm{P}_2(\mu)\cdot\partial_\vartheta P_2(\vartheta,t)-\frac{3}{35}\cdot\partial_\vartheta \mathrm{P}_4(\mu)\right)\cdot\partial_\vartheta\xi(\vartheta,t)\Bigg);$$

$$n_\vartheta=e^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\partial_\vartheta P_2(\mu)\right)+e^4\cdot\left(-\frac{10}{63}\cdot\partial_\vartheta P_2(\mu)+\frac{1}{9}\cdot P_2(\mu)\cdot\partial_\vartheta P_2(\mu)-\frac{3}{35}\cdot\partial_\vartheta P_4(\mu)\right)-$$

$$-\partial_\vartheta\xi(\vartheta,t)+e^2\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\partial_\vartheta P_2(\mu)\cdot\xi(\vartheta,t)+\frac{1}{3}\cdot P_2(\mu)\cdot\partial_\vartheta\xi(\vartheta,t)\right)+$$

$$+e^4\Bigg(\left(-\frac{10}{63}\cdot\partial_\vartheta P_2(\mu)-\frac{2}{9}\cdot P_2(\mu)\cdot\partial_\vartheta P_2(\mu)+\frac{3}{35}\cdot\partial_\vartheta P_4(\mu)\right)\cdot\xi(\vartheta,t)+$$

$$+\left(-\frac{1}{45}+\frac{10}{63}\cdot P_2(\mu)-\frac{1}{9}\cdot P_2(\mu)^2+\frac{3}{35}\cdot P_4(\mu)+\frac{1}{6}\cdot\left(\partial_\vartheta P_2(\mu)\right)^2\right)\cdot\partial_\vartheta\xi(\vartheta,t)\Bigg). \qquad (10)$$

В итоге выражение (8) можно представить в виде

$$\vec{\mathrm{n}}\bullet\nabla\psi_i=\left(n_{\mathrm{r}}\cdot\partial_r\psi_i+n_\vartheta\cdot r^{-1}\cdot\partial_\vartheta\psi_i\right)\Big|_{r=r(\vartheta)}. \qquad (8а)$$

Оператор ∂_r означает частную производную по радиальной координате.

Поскольку ψ_i имеет тот же порядок малости, что и ξ вместе со своими производными, то при подстановке компонентов вектора нормали (10) в (8а) слагаемые вида $\partial_j\xi(\vartheta,t)\cdot\partial_j\psi_i$ и $\xi(\vartheta,t)\cdot\partial_j\psi_i$, где $j=r;\vartheta$, имеют второй порядок малости и в линейном по $|\xi|$ приближении должны быть отброшены.

Подставляя выражения для проекций вектора нормали в (8а), из кинематического граничного условия (5) можно найти связь коэффициентов $A_n^{(1)}(t)$, $A_n^{(2)}(t)$ и $M_n(t)$:

$$A_n^{(i)}(t)\sim\partial_t M_n(t), \qquad i=1;2. \qquad (11)$$

Оператор ∂_t по-прежнему означает частную производную. Подставляя (11), (А.9), (В.2.) в динамическое граничное условие (6), получаем систему связанных дифференциальных уравнений для отыскания временной зависимости неизвестных коэффициентов $M_n(t)$:

$$\begin{gathered}\alpha_{n\pm4}\cdot\partial_{tt}M_{n\pm4}+\alpha_{n\pm2}\cdot\partial_{tt}M_{n\pm2}(t)+\alpha_n\cdot\partial_{tt}M_n(t)=\\=-\beta_{n\pm4}\cdot M_{n\pm4}(t)-\beta_{n\pm4}\cdot M_{n\pm2}(t)-\beta_n\cdot M_n(t),\end{gathered} \qquad (12)$$

$$\alpha_{n-4}=e^4\left(\frac{(4\cdot n^4-30\cdot n^3+53\cdot n^2+10\cdot n-45)}{9n\cdot(n-3)(n-1)(n+1)}\cdot K_{2(n-4)n-2}\cdot K_{2(n-2)n}-\right.$$

$$\left.-\frac{(2n-9)(4n-9)}{35n\cdot(n-3)}\cdot K_{4(n-4)n}\right),$$

$$\alpha_{n+4}=e^4\cdot\left(\frac{(6\cdot n^3+33\cdot n^2+22\cdot n-32)}{9n\cdot(n+1)(n+2)(n+4)}\cdot K_{2(n+2)n}\cdot K_{2(n+4)(n+2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{(2\cdot n^3+20\cdot n^2+82\cdot n+145)\cdot K_{4(n+4)n}}{35\cdot(n+1)(n+4)}\right),$$

$$\alpha_{n-2}=e^2\left(-\frac{(2n^2-3n-1)}{3n\cdot(n-1)(n+1)}K_{2(n-2)n}\right)+$$

$$+e^4\left(\left(-\frac{(2n-3)}{63}-\frac{(n^3+6n^2-10n-3)}{9n(n-2)(n-1)^2(n+1)}\cdot K_{2(n-2)(n-2)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(4n^4+4n^3-14n^2+n+3)}{9n^2(n-1)(n+1)^2}K_{2nn}\right)\cdot K_{2(n-2)n}-\frac{2n-3}{35}\cdot K_{4(n-2)n}\right),$$

$$\alpha_{n+2}=e^2\cdot\left(-\frac{2n^2+7n+4}{3n\cdot(n+1)(n+2)}\cdot K_{2(n+2)n}\right)+$$

$$+e^4\cdot\left(-\frac{1}{35}(2n+5)\cdot K_{4(n+2)n}+\left(-\frac{2n+5}{63}+\frac{(4n^4+12n^3-2n^2-25n-12)}{9n^2(n+1)^2(n+2)}\cdot K_{2nn}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(n^3-3n^2-19n-12)}{9n(n+1)(n+2)^2(n+3)}\right)\cdot K_{2(n+2)n}\right),$$

$$\alpha_n=-\frac{2n+1}{n(n+1)}+e^2\cdot\left(-\frac{(2n+1)(n^2+n+3)}{3n^2(n+1)^2}\cdot K_{2nn}\right)+$$

$$+e^4\left(-\frac{(2n+1)(30\cdot P_2(\mu)-75\cdot P_4(\mu)+14)}{630n\cdot(n+1)}-\frac{(2n+1)}{9n^2(n+1)^2}\left(\frac{2}{7}(4n^2+4n+15)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(n^4+2n^3+10n^2+9n+9)}{n(n+1)}\cdot K_{2nn}\right)\cdot K_{2nn}-\frac{(2n+1)(n^2+n+30)}{35n^2\cdot(n+1)^2}\cdot K_{4nn}-$$

$$-\frac{(4n^4+2n^3-9n^2-n+2)}{9n^2(n-1)(n+1)}K_{2(n-2)n}K_{2n(n-2)}+$$

$$\left.+\frac{(4n^4+14n^3+9n^2-7n-4)}{9n(n+1)^2(n+2)}\cdot K_{2n(n+2)}\cdot K_{2(n+2)n}\right),$$

$$\beta_{n-4}=e^4\cdot\left(-\frac{1}{70}(25n^2-75n-196)\cdot K_{4(n-4)n}+\right.$$

$$\left.+W\cdot\left(\frac{2}{9}(n^2+15n-42)\cdot K_{2(n-4)(n-2)}+\frac{1}{105}(12n^2-237n-613)\cdot K_{4(n-4)n}\right)\right),$$

$$\beta_{n+4}=e^4\cdot\left(-\frac{1}{70}(25n^2+125n-96)\cdot K_{4(n+4)n}+\right.$$

$$\left.+W\cdot\left(\frac{1}{105}(463+237n+12n^2)\cdot K_{4(n+4)n}-\frac{2}{9}(n+10)(n+5)\cdot K_{2(n+2)n}\cdot K_{2(n+4)(n+2)}\right)\right),$$

$$\beta_{n-2}=e^2\cdot\left(\frac{1}{3}\left(2n^2-6n+12)+W\cdot(n-5)\right)\cdot K_{2(n-2)n}\right)+$$

$$+e^4\cdot\left(\frac{1}{63}(23n^2-51n+30)\cdot K_{2(n-2)n}-\frac{1}{70}(25n^2-25n-561)\cdot K_{4(n-2)n}+\right.$$

$$+\frac{W}{2}\cdot\left(-\frac{2}{63}\cdot K_{2(n-2)n}\cdot\left(-n\cdot(n^2-12n-9)+7(2n^3-5n+12)\cdot K_{2(n-2)(n-2)}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-7(2n^2+7n-16)\cdot K_{2nn}\right)+\frac{2}{105}(3n^3-15n^2+36n+37)\cdot K_{4(n-2)n}\right)\right),$$

$$\beta_{n+2}=e^2\cdot\left(\frac{1}{3}(2n^2+10n+20)+W\cdot(n-7))\cdot K_{2(n-2)n}\right)+$$

$$+e^2\cdot\left(\frac{1}{63}(23n^2+97n+104)\cdot K_{2(n+2)n}-\frac{1}{70}(25n^2+75n-271)\cdot K_{4(n+2)n}+\right.$$

$$+\frac{W}{2}\cdot\left(\frac{2\cdot K_{2(n+2)n}}{63}\cdot(n^3-n-40-7(2n^2+19n+36)\cdot K_{2nn}-21(n+8)\cdot K_{2(n+2)(n+2)})+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{105}\cdot(3n^3+21n^2+144n+115)\cdot K_{4(n+2)n}\right)\right),$$

$$\beta_n=-(n-1)(n-2)+W\cdot(n-1)+e^2\cdot\left(\frac{1}{3}(2n^2+2n+8)+W\cdot(n-4)\cdot K_{2nn}\right)+$$

$$+e^4\cdot\left(\frac{2}{45}(2n^2+2n-13)+\frac{1}{63}(23n^2+23n-7)\cdot K_{2nn}-\right.$$

$$-\frac{1}{70}(25n^2+25n-346)\cdot K_{4nn}+W\cdot\left(-\frac{13}{45}(n-1)-\frac{2}{63}(n+8+42\cdot K_{2nn})\cdot K_{2nn}+\right.$$

$$+\frac{1}{105}(57n-23)\cdot K_{4nn}+\frac{1}{9}(n-1)(n+1)(n+2)\cdot K_{2(n-2)n}\cdot K_{2n(n-2)}+$$

$$\left.\left.+\frac{2}{9}n\cdot(n+6)\cdot K_{2n(n+2)}\cdot K_{2(n+2)n}\right)\right);\qquad \left(W\equiv Q^2/4\pi\right).$$

При записи (12) были использованы рекуррентные формулы:

$$\Delta_{\vartheta}P_n(\mu)=-n(n+1)\cdot P_n(\mu);\qquad \Delta_{\vartheta}\equiv\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\cdot\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right);$$

$$P_l(\mu)\cdot P_k(\mu)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}K_{lkn}\cdot P_n(\mu);\qquad \partial_{\vartheta}P_l(\mu)\cdot\partial_{\vartheta}P_k(\mu)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{lkn}\cdot P_n(\mu),$$

$$K_{lmn}=\left[C_{l0m0}^{n0}\right]^2;\qquad \alpha_{lmn}=-\sqrt{m\cdot(m+1)\cdot l\cdot(l+1)}\cdot C_{l0m0}^{n0}\cdot C_{l(-1)m1}^{n0}.$$

C_{l0m0}^{n0} и $C_{l(-1)m1}^{n0}$ – коэффициенты Клебша-Гордана.

Решения системы (12) будем искать в виде

$$M_n(t)=D_n\cdot\exp(-i\omega t). \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), получаем однородную бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов D_n, которая связывает между собой частоты осцилляций, номера мод и физические параметры задачи. Чтобы система однородных алгебраических уравнений имела нетривиальные решения, необходимо, чтобы определитель, составленный из ее коэффициентов, был равен нулю, что и даст дисперсионное уравнение задачи в виде алгебраического уравнения относительно ω^2 [12]. При некоторых значениях физических параметров квадрат частоты ω^2 может уменьшиться до нуля и стать отрицательным, что будет соответствовать появлению мнимых ω и экспоненциальному росту амплитуд соответствующих волн, т.е. проявлению неустойчивости.

Приравнивая нулю свободный коэффициент дисперсионного уравнения (необходимое условие появления нулевых решений [12]), несложно получить уравнение для отыскания критических условий проявления неустойчивости.

Для сферы ($e^2=0$) система уравнений (12) после подстановки в нее (13) приводится к системе несвязанных уравнений: $\alpha_n\cdot\omega^2+\beta_n=0$, или

$$\frac{(2n+1)}{n\cdot(n+1)}\cdot\omega^2-(n-1)\cdot\left(n+2-W\right)=0,$$

Приравнивая свободный член этого уравнения нулю, легко получить критическое условие реализации неустойчивости *n*-й моды сферической капли: $W=n+2$, совпадающее с найденным Рэлеем [8].

Если учесть сфероидальность капли, то критические условия появления неустойчивости для первых осесимметричных мод осцилляций получатся в виде

$$n=2:\ W_2=4\left(1-0{,}285\cdot e^2-0{,}075\cdot e^4\right);\qquad n=3:\ W_3=5\left(1-0{,}240\cdot e^2-0.138\cdot e^4\right);$$

$n=4$: $W_4 = 6\left(1\text{-}0{,}232\cdot e^2 - 0{,}202\cdot e^4\right)$; $n=5$: $W_5 = 7\left(1\text{-}0.229\cdot e^2 - 0.267\cdot e^4\right)$;

$n=6$: $W_6 = 8\left(1\text{-}\ 0{,}229\cdot e^2 - 0{,}334\cdot e^4\right)$; $n=7$: $W_7 = 9\left(1\text{-}\ 0{,}230\cdot e^2 - 0{,}402\cdot e^4\right)$;

$$n=8:\quad W_8 = 10\left(1\text{-}\ 0{,}231\cdot e^2 - 0{,}471\cdot e^4\right). \tag{14}$$

Из (14) видно, что для всех мод с ростом e^2 критические значения параметра W_n снижаются, причем величина снижения растет с увеличением номера моды.

Заключение. В проведенном анализе выяснилось, что с увеличением эксцентриситета заряженной сфероидальной капли снижаются критические условия реализации электростатической неустойчивости всех мод ее осцилляций.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. Для того чтобы найти электростатическое давление на поверхность заряженной капли P_E , воспользуемся выражением [14]:

$$P_E = \frac{E^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi}(\nabla\Phi(\vec{r},t))^2, \tag{A.1}$$

где E, Φ − напряженность и электростатический потенциал электрического поля на поверхности капли. Электростатический потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi(\vec{r},t) = 0 \tag{A.2}$$

и граничным условиям

$$r\to\infty:\quad \Phi(\vec{r},t)\to 0;$$

$$r\to r(\vartheta)+\xi(\vartheta,t):\ \ \Phi(\vec{r},t)\to \mathrm{const}\equiv\Phi_S(t), \tag{A.3}$$

$\Phi_S(t)$ – электростатический потенциал, постоянный на всей поверхности капли и зависящий только от времени.

Вне капли $\Phi(\vec{r},t)$ в линейном по $\xi(\vartheta,t)$ приближении можно представить в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi, \tag{A.4}$$

где Φ_0 – потенциал невозмущенной поверхности капли, а $\delta\Phi$ – добавка, вызванная волновым возмущением поверхности капли, имеющая тот же порядок малости, что и $\xi(\vartheta,t)$. В линейном по $|\xi|$ приближении из (A.4) получим

$$\Phi\big|_{r=r(\vartheta)+\xi(\vartheta,t)} = \Phi_0\big|_{r=r(\vartheta)} + \partial_r\Phi_0\big|_{r=r(\vartheta)}\cdot\xi(\vartheta,t) + \delta\Phi\big|_{r=r(\vartheta)}\ . \tag{A.4a}$$

В окрестности заряженного сфероида в сферических координатах Φ_0 определяется выражением (см. (C.5)) в Приложении C:

$$\Phi_0 = \frac{Q}{R}\cdot\frac{(1-e^2)^{1/3}}{e}\times \mathrm{Arth}\Big(eR\cdot\sqrt{2}\cdot\Big((1-e^2)^{2/3}\cdot r^2 + e^2R^2 +$$

$$+\sqrt{(1-e^2)^{4/3}\cdot r^4 + e^4R^4 - 2e^2\cdot(1-e^2)^{2/3}\cdot r^2R^2\cdot\cos(2\vartheta)}\Big)^{-1/2}, \tag{A.5}$$

R – радиус равновеликой сферической капли, а поскольку задача решается в безразмерных переменных, то $R = 1$.

Раскладывая (A.5) в ряд по e^2, ограничиваясь слагаемыми ~ e^4, получаем

$$\Phi_0 = Q\cdot\left(\frac{1}{r} + e^2\cdot\frac{P_2(\mu)}{3\cdot r^2} - e^4\cdot\frac{9\cdot P_4(\mu) + 10\cdot r^2\cdot P_2(\mu)}{45\cdot r^5}\right). \tag{A.6}$$

Поскольку для потенциала Ф справедливо уравнение (A.2), то, учитывая (A.4), имеем

$$\Delta\delta\Phi = 0 \tag{A.7}$$

при условии:

$$r\to\infty:\quad \delta\Phi\to 0. \tag{A.8}$$

Решение уравнения (A.7) с учетом (A.8) имеет вид

$$\delta\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} D_n(t)\cdot r^{-(n+1)}\cdot P_n(\mu), \qquad (A.9)$$

где $D_n(t)$ – неизвестная функция времени, которую можно выразить через функцию $M_n(t)$. Из (A.4a) по порядку малости получим

в нулевом порядке:

$$r = r(\vartheta):\ \Phi_0 = \Phi_s(t),$$

в первом порядке:

$$r = r(\vartheta): \quad \delta\Phi + \partial_r\Phi_0\cdot\xi(\vartheta,t) = 0. \qquad (A.4b)$$

Из соотношения (A.4b) можно найти связь между функциями $D_n(t)$ и $M_n(t)$.

Раскладывая $(\nabla\Phi)^2$ в выражении (A.1) на возмущенной волновым движением поверхности в ряд с учетом (A.4), будем иметь

$$(\nabla\Phi)^2\Big|_{r=r(\vartheta)+\xi(\vartheta,t)} = (\nabla(\Phi_0+\delta\Phi))^2\Big|_{r=r(\vartheta)+\xi(\vartheta,t)} =$$

$$(\nabla\Phi_0)^2\Big|_{r=r(\vartheta)} + \partial_r\left((\nabla\Phi_0)^2\right)\cdot\xi(\vartheta,t) + 2(\nabla\Phi_0)(\nabla\delta\Phi)\Big|_{r=r(\vartheta)}. \qquad (A.10)$$

Подставляя (A.6), (A.9), (2a) в (A.10) и учитывая полученную в (A.4b) связь, разложим все выражение в ряд по e^2, сохраняя слагаемые, содержащие e^4. В итоге получим искомое выражение для электростатического давления на возмущенной капиллярными осцилляциями поверхности заряженной капли:

$$P_E = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi}\Bigg|_{r=r(\vartheta)+\xi(\vartheta,t)} = \frac{\mathrm{Q}^2}{8\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\mathrm{e}^4\cdot\left(\frac{4}{9}\cdot(n^2-n-10)\cdot K_{2(n-4)(n-2)}\cdot K_{2(n-2)n} -\right.$$

$$\left.-\frac{2}{105}(12n^2-69n+173)\cdot K_{4(n-4)n}\right)\cdot \mathrm{M_{n\text{-}4}(t)} + \Bigg(e^2\cdot\frac{2}{3}(n-5)\cdot K_{2(n-2)n} +$$

$$+e^4\cdot\left(\frac{2}{63}\cdot K_{n(n-2)n}\Big(n\cdot(n^2-12n-9) - 7(n+12)\cdot K_{2(n-2)(n-2)} +\right.$$

$$\left.+7(2n^2+7n-16)\cdot K_{2nn}\Big) + \frac{2}{105}(3n^3-15n^2+36n-59)\cdot K_{4(n-2)n}\right)\Bigg)\cdot \mathrm{M_{n\text{-}2}(t)} +$$

$$+\Bigg(2(n-1) + e^2\cdot\frac{2}{3}(n-4)\cdot K_{2nn} +$$

$$+e^4\cdot\left(-\frac{26(n-1)}{45} - \frac{4}{63}(n+8+42\cdot K_{2nn}) + \frac{2\cdot(57n-23)}{105}\cdot K_{4nn} -\right.$$

$$\left.-\frac{4}{9}(n^2+6n+4)\cdot K_{2(n-2)n}\cdot K_{2n(n-2)} + \frac{4}{9}\cdot n\cdot(n+6)\cdot K_{2n(n+2)}\cdot K_{2(n+2)n}\right)\Bigg)\cdot \mathrm{M_n(t)} +$$

$$+\Bigg(\mathrm{e}^2\cdot\frac{2(n-7)}{3}\cdot K_{2(n+2)n} + e^4\cdot\Bigg(\frac{2}{105}(3n^3+21n^2+144n+115)\cdot K_{4(n+2)n} +$$

$$+\frac{2}{63}\cdot K_{2(n+2)n}\cdot\Big(n(n+1)(n-1) - 40 - 7\cdot(2n^2+19n+36)\cdot K_{2nn} -$$

$$-21\cdot(n+8)\cdot K_{2(n+2)(n+2)}\Big)\Bigg)\Bigg)\cdot \mathrm{M_{n+2}(t)} +$$

$$+e^4\cdot\left(-\frac{4}{9}(n+5)(n+10)\cdot K_{2(n+2)n}\cdot K_{2(n+4)(n+2)} +\right.$$

$$\left.+\frac{2}{105}\cdot(12n^2+237n+463)\cdot K_{4(n+4)n}\right)\cdot M_{n+4}(t)\Bigg\}\cdot P_n(\mu). \qquad (A.11)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Лапласовское давление P_σ на поверхности сфероидальной капли, искаженной капиллярными осцилляциями, будем искать в линейном по $\xi(\vartheta,t)$ и квадратичном по e^2 приближении, используя выражение

$$P_\sigma \equiv \sigma \cdot div\,\vec{n}\,, \qquad \text{(B.1)}$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности капли.

Известно, что нормаль к поверхности $F\left(r,\vartheta,t\right)=0$ определяется выражениями

$$\vec{n}=\frac{\nabla F(r,\vartheta,t)}{|\nabla F(r,\vartheta,t)|}, \quad \nabla F(r,\vartheta,t)=\vec{e}_r-\frac{\partial_\vartheta r(\vartheta)+\partial_\vartheta \xi}{r}\vec{e}_\vartheta, \qquad \text{(B.2)}$$

где учтен явный вид функции $F(r,\vartheta,t)$ (см.(2)). Подставляя (B.2) в (B.1), с точностью до e^4 получим

$$div\vec{n}=\frac{2}{r}-\frac{1}{r^2}\Delta_\vartheta\left(\frac{1}{3}e^2\cdot P_2(\mu)+e^4\left(\frac{10}{63}P_2(\mu)+\frac{3}{35}P_4(\mu)\right)+\xi(\vartheta)\right)+$$

$$+e^4\frac{1}{6\cdot r^2}\frac{1}{\sin(\vartheta)}\partial_\vartheta\left(\sin(\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_2(\mu)\cdot\partial_\vartheta\xi(\vartheta)\right).$$

Последнее слагаемое может быть представлено в виде

$$e^4\frac{1}{6\cdot r^2}\frac{1}{\sin(\vartheta)}\partial_\vartheta\left(\sin(\vartheta)\cdot\partial_\vartheta P_2(\mu)\cdot\partial_\vartheta\xi(\vartheta)\right)=e^4\frac{1}{6\cdot r^4}\left[\frac{6}{5}\Delta_\vartheta\left(\xi(\vartheta,t)\right)+\right.$$

$$+\frac{6}{7}\left(\partial_\vartheta P_2(\mu)\cdot\partial_\vartheta\xi(\vartheta,t)+P_2(\mu)\cdot\Delta_\vartheta\xi(\vartheta,t)\right)-$$

$$\left.-\frac{72}{35}\left(\partial_\vartheta P_4(\mu)\cdot\partial_\vartheta\xi(\vartheta,t)+P_4(\mu)\cdot\Delta_\vartheta\xi(\vartheta,t)\right)\right].$$

В итоге для давления Лапласа находим:

$$P_\sigma=\sigma\cdot\sum_{n=0}^{\infty}[\,f_n^{(1)}(e,n)\cdot M_n(t)+\,f_{n\pm2}^{(2)}(e,n)\cdot M_{n\pm2}(t)+\,f_{n\pm4}^{(4)}(e,n)\cdot M_{n\pm4}(t)]\cdot P_n(\mu);$$

$$f_n^{(1)}(e,n)=(\text{n-1})\cdot(\text{n+2})\text{ - e}^2\cdot\left(-\frac{2}{3}(n^2+n+4)\cdot K_{2nn}\right)+\text{e}^4\left(-\frac{2}{45}\cdot(2n^2+2n-13)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{63}\cdot(23n^2+23n-7)\cdot K_{2nn}+\frac{1}{70}\cdot(25n^2+25n-346)\cdot K_{4nn}\right),$$

$$f_{n-2}^{(2)}(e,n)=\text{e}^2\cdot\left(-\frac{2}{3}(n^2-3n+6)\cdot K_{2(n-2)n}\right)+\text{e}^4\cdot\left(-\frac{1}{63}(23n^2-51n+30)\cdot K_{2(n-2)n}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{70}(25n^2-25n-321)\cdot K_{4(n-2)n}\right);$$

$$f_{n+2}^{(2)}(e,n)=\text{e}^2\cdot\left(-\frac{2}{3}(n^2+5n+10)\cdot K_{2(n+2)n}\right)-$$

$$-\text{e}^4\cdot\left(-\frac{1}{63}(23n^2+97n+104)\cdot K_{2(n+2)n}+\frac{1}{70}(25n^2+75n-271)\cdot K_{4(n+2)n}\right);$$

$$f_{n-4}^{(4)}(e,n)=\text{e}^4\cdot\left(\frac{1}{70}(25n^2-75n-196)\cdot K_{4(n-4)n}\right);$$

$$f_{n+4}^{(4)}(e,n)=\text{e}^4\cdot\left(\frac{1}{70}(25n^2+125n-96)\cdot K_{4(n+4)n}\right). \qquad \text{(B.3)}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ С. Согласно [13] выражение для электростатического поля заряженного сфероида в вытянутых сфероидальных координатах имеет вид

$$\Phi_0 = \frac{Q}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{Arth} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\xi + a^2}}, \tag{C.1}$$

где a и b – большая и малая полуоси вытянутого сфероида; ξ – сфероидальная координата, задающаяся корнями уравнения:

$$\frac{z^2}{a^2 + \xi} + \frac{\rho^2}{b^2 + \xi} = 1,\ \rho^2 = x^2 + y^2;\ \ \xi \ge -b^2, \tag{C.2}$$

x, y, z – декартовы координаты, ось OZ направлена вдоль оси сфероида .

Чтобы записать выражение (С.1) для Φ_0 в сферических координатах с началом в центре сфероида, выразим a и b через эксцентриситет сфероида e и радиус равновеликой сфероиду капли – R, а z и ρ в сферических координатах:

$$a = R(1-e^2)^{-1/3};\quad b = R(1-e^2)^{1/6};\quad z = r\cdot\cos(\vartheta);\quad \rho = r\cdot\sin(\vartheta). \tag{C.3}$$

Подставив (С.3) в (С.2) и решив квадратное уравнение относительно сфероидальной координаты ξ, получим два корня:

$$\xi_1 = \frac{1}{2(1-e^2)^{2/3}}((1-e^2)^{2/3}r^2 + (e^2-2)R^2 +$$
$$+\sqrt{(1-e^2)^{4/3}r^4 + e^4R^4 - 2e^2(1-e^2)^{2/3}r^2R^2\cos(2\vartheta)};$$
$$\xi_2 = \frac{1}{2(1-e^2)^{2/3}}((1-e^2)^{2/3}r^2 + (e^2-2)R^2 -$$
$$-\sqrt{(1-e^2)^{4/3}r^4 + e^4R^4 - 2e^2(1-e^2)^{2/3}r^2R^2\cos(2\vartheta)}. \tag{C.4}$$

Поскольку области пространства вне сфероида соответствуют значения сфероидальной координаты ξ в пределах от 0 до +∞, то следует ограничиться корнем ξ_1, так как второй отрицателен.

Используя (С.3) и (С.4), из (С.1) для электростатического потенциала в окрестности заряженного сфероида получим выражение

$$\Phi_0 = \frac{Q}{R}\cdot\frac{(1-e^2)^{1/3}}{e}\times \operatorname{Arth}(eR\cdot\sqrt{2}\cdot\Big((1-e^2)^{2/3}\cdot r^2 + e^2R^2 +$$
$$+\sqrt{(1-e^2)^{4/3}\cdot r^4 + e^4R^4 - 2e^2\cdot(1-e^2)^{2/3}\cdot r^2R^2\cdot\cos(2\vartheta)}\Big)^{-1/2}. \tag{C.5}$$

Работа выполнена в рамках тематического плана университета, при поддержке грантов: губернатора Ярославской обл., Рособразования № 2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коженков В.И., Фукс Н.А.* Электрогидродинамическое распыление жидкости (обзор) // Успехи Химии. 1976. Т.45. №12. С. 2274–2284.
2. *Bailey A.G.* The theory and practice of electrostatic spraying (revue) // Atomization and Spray Technology. 1986. V.2. P. 95–134.
3. *Бураев Т.К., Верещагин И.П., Пашин Н.М.* Исследование процесса распыления жидкостей в электрическом поле // Сб. Сильные электрические поля в технологических процессах. М.: Энергия. 1979. № 3. С.87–105.
4. *Григорьев А.И.* Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.
5. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.

6. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А.* Нелинейные осцилляции заряженных капель. Часть I. Аналитические и численные исследования общих закономерностей нелинейных осцилляций. Экспериментальные работы (обзор) // Электронная обработка материалов. 2005. № 3. С. 25–36.
7. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А.* Нелинейные осцилляции заряженных капель. Часть II. Внутреннее резонансное взаимодействие и излучение. Влияние внешних полей. Учет вязкости / (обзор) // Электронная обработка материалов. 2005. № 4. С. 24–35.
8. *Rayleigh (Strutt J.W.)* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1882. V.14. P.184–186.
9. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Мокшеев П.В.* Равновесная форма заряженной капли, вращающейся вокруг своей оси симметрии // Электронная обработка материалов. 2006. № 4. С. 46–52.
10. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Мокшеев П.В.* Об устойчивости вращающейся заряженной капли // Электронная обработка материалов. 2007. № 4. С. 42–45.
11. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Мокшеев П.В.* Нелинейный анализ равновесной формы заряженной капли в стенке воронки смерча // ЖТФ. 2008. Т.78. Вып. 3. С. 11–20.
12. *Григорьев А.И.* О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли // ЖТФ. 1985. Вып.7. С. 1272–1278.
13. *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.

Поступила 26.02.09

Summary

In the range of analytical asymptotic method by series development on small parameters: amplitude of oscillation in first power and amplitude of spheroidal deformation in second power, was found dispersion equation for capillary oscillation of charged spheroidal drop. Results show that critical conditions of electrostatic instability all modes of a drop oscillation are lower down with growth up spheroidal deformation range.