С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, М.В. Волкова

О ВОЗМОЖНОСТИ ПОЛНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ КАПИЛЛЯРНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ СТРУИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ПРОДОЛЬНЫМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИМ ПОЛЕМ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, grig@uniyar.ac.ru

Введение. Хорошо известно, что любая изолированная система стремится занять положение с минимальной потенциальной энергией. Поэтому цилиндрический столб жидкости будет неустойчив по отношению к самопроизвольному разбиению под действием сил поверхностного натяжения на сферические капли, общая площадь поверхности которых меньше площади цилиндрической поверхности [1–2]. Такую неустойчивость называют капиллярной, и она впервые была строго исследована Рэлеем в 19-м веке [5]. Он показал, что цилиндрический столб жидкости (струя) неустойчив по отношению к осесимметричным капиллярным волнам с длинами, удовлетворяющими соотношению $\lambda > 2\pi R$, где R – радиус столба жидкости (струи). Короткие же волны с $\lambda < 2\pi R$ могут распространяться по струе, не вызывая ее дробления на капли. Неосесимметричные волны (то есть волны с азимутальными числами m, отличными от нуля, $m \geq 1$) на незаряженной поверхности струи всегда устойчивы. Если же струю (как электропроводной, так и диэлектрической жидкости) зарядить так, чтобы в окружающем ее пространстве появилось радиальное по отношению к оси струи электрическое поле, то устойчивость ее поверхности понижается. В этом случае в зависимости от величины электрического заряда, приходящегося на единицу длины струи, становятся неустойчивыми и несколько первых неосесимметричных волн ($m = 1; 2; 3...$). Волна с m = 1, возбуждение которой приводит к изгибной неустойчивости струи, теряет устойчивость уже при каком угодно малом заряде [4]. Коллинеарное же незаряженной струе внешнее электростатическое поле увеличивает устойчивость капиллярных волн на поверхности струи [6–7] за счет сокращения диапазона неустойчивых длин волн. В этой связи в [8] была высказана идея, что достаточно сильное электростатическое поле может полностью подавить капиллярную неустойчивость струи. Исследованию такой возможности и посвящена настоящая работа.

1. Формулировка задачи. Пусть имеется бесконечная, движущаяся параллельно однородному электростатическому полю E_0 с постоянной скоростью U_0 (то есть $U_0 \| E_0$) цилиндрическая струя идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости с массовой плотностью ρ, диэлектрической проницаемостью ε_{in} и коэффициентом поверхностного натяжения γ, имеющая радиус R. Диэлектрическая проницаемость внешней среды ε_{ex}.

В инерциальной системе отсчета, движущейся вместе со струей со скоростью U_0, поле скоростей течения жидкости в струе $U(r,t)$ полностью определится имеющими тепловую природу капиллярными волнами на поверхности. Движение жидкости будем считать потенциальным, то есть $U(r,t) \equiv \nabla U(r,t) \equiv \nabla \psi(r,t)$, где $\psi(r,t)$ – потенциал поля скоростей волнового движения жидкости. Зададимся целью исследования критических условий реализации неустойчивости капиллярных волн на поверхности такой струи.

Весь анализ проведем в цилиндрической системе координат с осью OZ, орт n_z которой совпадает по направлению с осью симметрии цилиндрической струи. Уравнение свободной поверхности струи, возмущенной тепловым капиллярным волновым движением бесконечно малой амплитуды, запишем в виде

$$F(r,\varphi,z,t) = r - \big(R + \xi(\varphi,z,t)\big) = 0.$$

В этом соотношении $\xi(\varphi,z,t)$– возмущение цилиндрической поверхности струи, вызванное капиллярным волновым движением.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярного волнового течения жидкости в струе имеет вид:

$$\Delta\psi(r,t)=0;\quad \Delta\Phi_{in}(r,t)=0;\ \Delta\Phi_{ex}(r,t)=0;$$

$$E_j=-\nabla E_j=-\nabla\Phi_j(r,t),\ \ j\in\{in;ex\};$$

с граничными условиями:

$$r=R+\xi:\quad \frac{dF}{dt}\equiv\frac{\partial F}{\partial t}+\nabla\psi\cdot F=0;\ \ P_{in}-P_{ex}+P_E=P_\gamma;$$

$$\varepsilon_{in}\cdot\left[n\cdot\nabla\Phi_{in}(r,t)\right]=\varepsilon_{ex}\cdot\left[n\cdot\nabla\Phi_{ex}(r,t)\right];$$

$$\tau\cdot\nabla\Phi_{in}(r,t)=\tau\cdot\nabla\Phi_{ex}(r,t);$$

$$r\to 0:\ \nabla\psi(r,t)\to 0;\ \ \Phi_{in}(r,t)<\infty;$$

$$r\to\infty:\ \ \nabla\Phi_{ex}(r,t)=E_0,$$

τ и n – единичные вектора касательной и нормали к возмущенной поверхности струи; $\Phi_{in}(r,t)$ и $\Phi_{ex}(r,t)$ – электростатические потенциалы в струе и в среде соответственно; P_{ex} – давление во внешней среде;

$$P_{in}(r,t)=P_{in}^{(0)}-\rho\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial t}-\frac{\rho}{2}\left(\nabla\psi(r,t)\right)^2$$

– поле давлений внутри струи; $P_{in}^{(0)}$ – постоянное давление в цилиндрической струе в отсутствие волнового движения в ней; $P_\gamma\equiv\gamma\cdot div\,n$ – давление сил поверхностного натяжения; P_E – давление электрического поля на поверхность капли:

$$P_E=-\frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi}\left[\left(\nabla\Phi_{ex}\right)^2-2\left(n\cdot\nabla\Phi_{ex}\right)^2\right]+\frac{\varepsilon_{in}}{8\pi}\left[\left(\nabla\Phi_{in}\right)^2-2\left(n\cdot\nabla\Phi_{in}\right)^2\right].$$

Кроме выписанных условий должно выполняться требование постоянства объема участка струи, длина которого равна длине волны λ:

$$\int_{z_0}^{z_0+\lambda}\int_0^{R+\xi}\int_0^{2\pi}dzrdrd\varphi=\pi\lambda\,.$$

Решая сформулированную задачу стандартными методами [1–2], нетрудно получить дисперсионное уравнение задачи для капиллярной волны с произвольным азимутальным числом m:

$$\omega_m^2(k,\varepsilon_{in},\varepsilon_{ex},w)\equiv F_m(kR)\left\{k^2R^2+m^2-1+w\frac{\left(\varepsilon_{in}-\varepsilon_{ex}\right)^2k^2R^2}{\varepsilon_{in}\cdot F_m(kR)+\varepsilon_{ex}\cdot D_m(kR)}\right\}\frac{\gamma}{\rho R^3};\tag{1}$$

$$w\equiv\frac{E_0^2R}{4\pi\gamma};\qquad F_m(kR)\equiv kR\frac{I_{m+1}(kR)}{I_m(kR)}+m;\qquad D_m(kR)\equiv kR\frac{K_{m+1}(kR)}{K_m(kR)}-m,$$

где $\omega_m(k)$ – частота волны с волновым числом k и азимутальным числом m; $I_m(kR)$ и $K_m(kR)$ - модифицированные функции Бесселя первого и второго рода соответственно. При m=0 получается дисперсионное уравнение для осесимметричных капиллярных волн на незаряженной струе идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости в однородном электростатическом поле, выведенное ранее в [6–7]. Безразмерный параметр w, входящий в уравнение (1), составлен по тому же правилу, что и безразмерный параметр, характеризующий электростатическую неустойчивость заряженной струи, капли или плоской заряженной поверхности жидкости [3–4], и, кроме величины напряженности электростатического поля, зависит от радиуса струи R и величины коэффициента поверхностного натяжения жидкости γ.

2. Анализ дисперсионного уравнения. Волна с задаными значениями волнового k и азимутального m чисел претерпевает неустойчивость, когда квадрат ее частоты $\omega_m^2(k,\varepsilon_{in},\varepsilon_{ex},w)$ переходит через ноль и становится отрицательным. Тогда частоты становятся мнимыми $\omega\sim\pm i$, а амплитуда одной из волн начинает экспоненциально нарастать со временем, а амплитуда волны с противоположным знаком при мнимой единице экспоненциально убывает со временем.

Как видно из рис. 1 и 2, функциональные множители $F_m\left(kR\right)$ и $D_m\left(kR\right)$ в дисперсионном уравнении (1) являются вещественными положительными при произвольных *k* и *m*. Это означает, что при $m \geq 1$ правая часть (1) всегда положительна, частоты $\omega_m(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}, w)$ вещественны и, следовательно, струя устойчива по отношению к неосесимметричным виртуальным деформациям ее поверхности. При *m*=0 приходим к дисперсионному уравнению, выведенному ранее в [6–7], имеющему мнимые решения для длинных волн, волновые числа которых удовлетворяют условию

$$k^2R^2 + w\frac{\left(\varepsilon_{in}-\varepsilon_{ex}\right)^2 k^2R^2}{\varepsilon_{in}\cdot F_0\left(kR\right)+\varepsilon_{ex}\cdot D_0\left(kR\right)} \leq 1. \qquad (2)$$

В указанном диапазоне волновых чисел струя претерпевает осесимметричную капиллярную неустойчивость, приводящую к дроблению струи на капли. Из (2) видно, что в отсутствие электрического поля (при *w*=0) диапазон волновых чисел неустойчивых осесимметричных волн определяется условием $0 < kR < 1$, как и было получено Рэлеем [1].

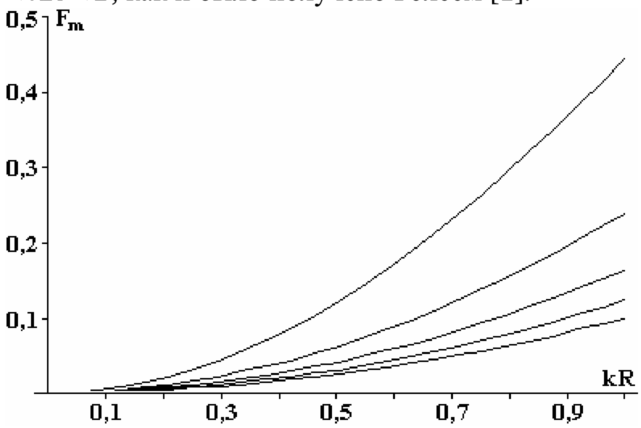


Рис. 1. Зависимости $F = F(k, m)$ *для первых пяти мод, расположенных в порядке убывания азимутального числа m, нижняя линия соответствует m=4, верхняя – m=0*

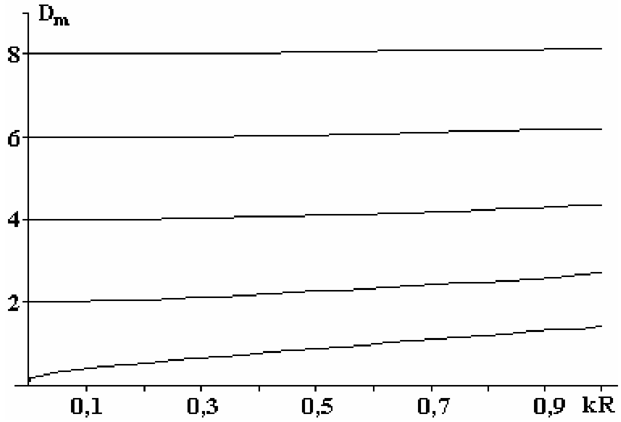
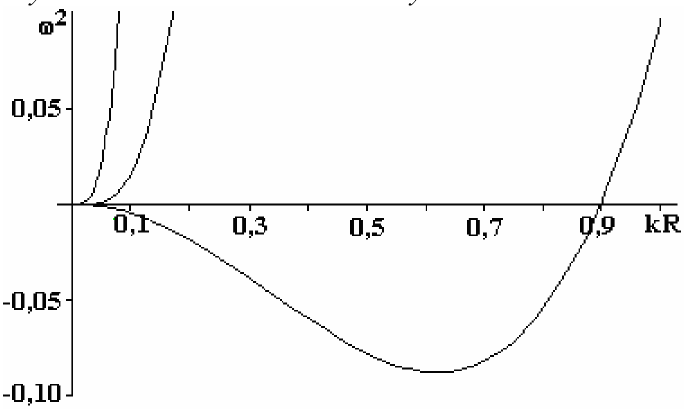
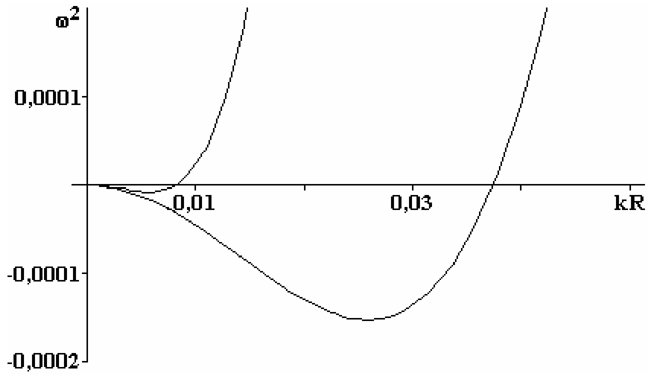


Рис. 2. Зависимости $D = D(k, m)$ *для первых пяти мод, расположенных в порядке возрастания m, нижняя линия соответствует m=0, верхняя – m=4*

На рис. 3–4 приведены результаты численного расчета при *m*=0 по дисперсионному уравнению (1) зависимости обезразмеренного на $\gamma/\rho R^3$ квадрата частоты ω^2 осесимметричных волн от произведения волнового числа k на радиус струи *R* при различных значениях параметров w, ε_{in} и ε_{ex}. Несложно видеть, что с ростом параметров w, ε_{in} и ε_{ex} ширина диапазона волновых чисел волн, претерпевающих капиллярную неустойчивость, сужается, а максимальные величины инкрементов неустойчивости (соответствующие минимумам кривых на рис.3) уменьшаются. Этот феномен и интерпретируется как стабилизация электростатическим полем, коллинеарным оси струи, капиллярных волн на ее поверхности. Теперь исследуемую проблему можно сформулировать более конкретно: *существует ли такой набор реальных значений физических параметров,* *характеризующих задачу, w, ε_{in} и ε_{ex}, при которых правая граница диапазона волновых чисел неустойчивых волн достигнет нуля.*



а



б

Рис. 3. Зависимости обезразмеренного на $\gamma/\rho R^3$ квадрата частоты ω^2 осесимметричных волн от произведения волнового числа k на радиус струи R при $w=0{,}5$ и $\varepsilon_{ex}=1$, рассчитанные для жидкостей с различными диэлектрическими проницаемостями:

а) слева направо: вода $\varepsilon_{in}=80$; этиловый спирт $\varepsilon_{in}=25$; жидкий водород $\varepsilon_{in}=1{,}23$;

б) те же зависимости, что и на рис. 3,а, для воды $\varepsilon_{in}=80$ и этилового спирта; $\varepsilon_{in}=25$, рассчитанные в другом масштабе

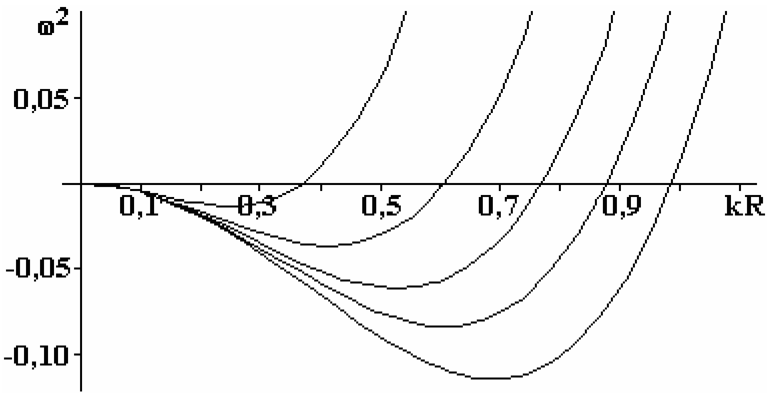
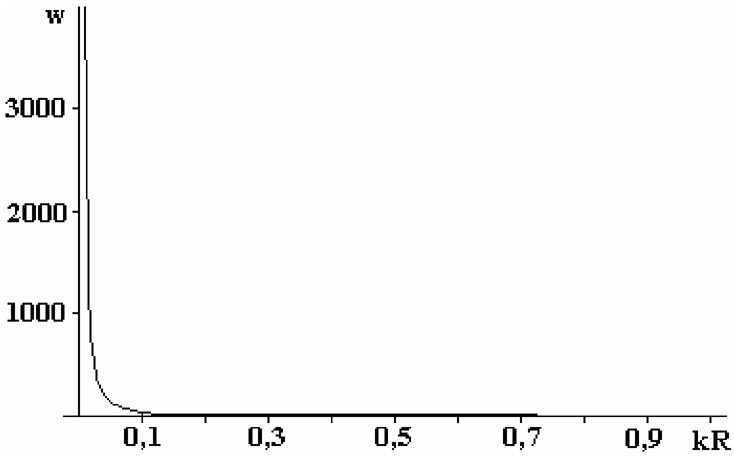


Рис. 4. Зависимости обезразмеренного на $\gamma/\rho R^3$ квадрата частоты ω^2 осесимметричных волн от произведения волнового числа k на радиус струи R, рассчитанные для жидкого водорода при $\varepsilon_{ex}=1$ и различных значениях параметра w: справа налево $w=1;10;20;40;100$

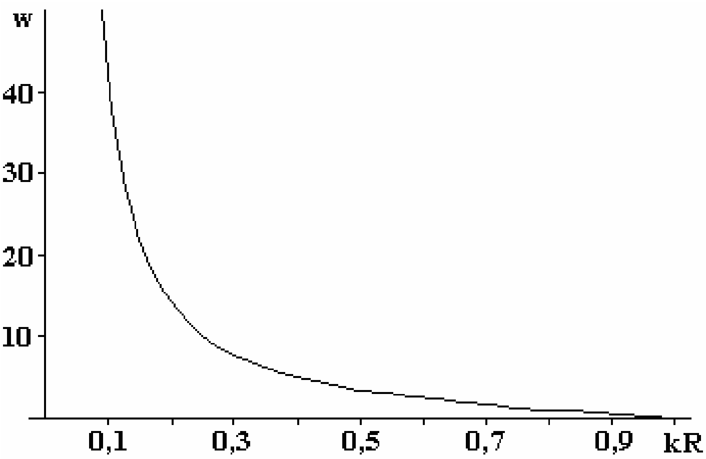
Перепишем выражение (2) в виде

$$k^2R^2 + w\frac{\left(\varepsilon_{in}-\varepsilon_{ex}\right)^2 k^2R^2}{\varepsilon_{in}\cdot F_0\left(kR\right)+\varepsilon_{ex}\cdot D_0\left(kR\right)} - 1 = 0 \qquad (3)$$

и разрешим его относительно w как функцию от остальных физических параметров. По полученному соотношению можно исследовать зависимость ширины диапазона волновых чисел неустойчивых волн от физических параметров системы. В частности, при фиксированных значениях ε_{in} и ε_{ex} это соотношение определит правую границу диапазона неустойчивых волн на плоскости $\left\{w,kR\right\}$. При заданном w неустойчивым волнам соответствует диапазон значений kR от $kR=0$ слева до пересечения с кривой $w=w(kR)$ справа. На рис. 5 приведены результаты расчетов по (3) для жидкого водорода. На рис. 5,*а* приведены результаты формального расчета для произвольных значений параметра w, характеризующего напряженность электростатического поля, а на рис. 5,*б* – результаты реалистических расчетов, учитывающих невозможность создания в среде сколь угодно больших напряженностей поля из-за явления электрического пробоя. Тем не менее из рис. 5,*а* видно, что при сколь угодно больших значениях напряженности электростатического поля диапазон значений волновых чисел, для которых будет реализовываться капиллярная неустойчивость, остается отличным от нулевого. Согласно рис. 5,*б* для реальных условий струи жидкого водорода в газе при атмосферном давлении ширина диапазона неустойчивых волн на поверхности струи относительно велика даже при предпробойных значениях напряженности электростатического поля. Из (3) также видно, что при фиксированном W ни при каких конечных значениях ε_{in} и ε_{ex} не может быть достигнуто значение $kR = 0$. Из сказанного следует, что полная стабилизация капиллярной неустойчивости струи диэлектрической жидкости коллинеарным оси струи электростатическим полем невозможна.



а



б

Рис. 5. Зависимость $w = w(kR)$*, полученная при* $\varepsilon_{ex} = 1$ *по (3) для жидкого водорода, определяющая положение правой границы диапазона волновых чисел, соответствующих неустойчивым волнам: а) для больших значений параметра* W*; б) для значений параметра* W*, ограниченных предпробойными для воздуха (при атмосферном давлении) значениями напряженности электростатического поля*

Отметим, что напряженность электростатического поля, при которой реализуется пробой воздушной среды $E = E_*$, зависит от давления газа и его сорта, а соответствующее значение параметра W согласно его определению имеет вид: $w = w_* \equiv E_*^2 R / 4\pi\gamma$, то есть кроме E_*, зависит от величины коэффициента поверхностного натяжения γ и радиуса струи R. Поэтому для струи жидкого водорода с $\gamma = 1{,}8\, dyne \cdot cm^{-1}$ значение W_* будет в четырнадцать раз больше, чем для струи этилового спирта с $\gamma = 25\, dyne \cdot cm^{-1}$ при R = const. Для жидкостей с большими значениями диэлектрической проницаемости, например для этилового спирта, значения параметра *w*, соответствующие предпробойным величинам напряженности электрического поля, будут ниже ($w < 1$), а диапазон волновых чисел неустойчивых волн уже, как это видно из рис. 6.

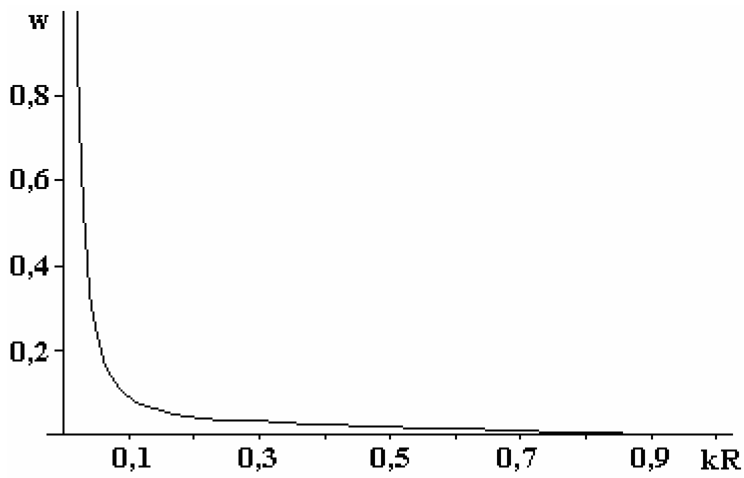


Рис. 6. Та же зависимость, что и на рис.5,б, но построенная для этилового спирта ($\varepsilon_{in} = 25$ *)*

Проведенный анализ был основан на модели идеальной жидкости. Тем не менее учет реальной вязкости струи не может привести к изменению полученных результатов, поскольку роль вязкости сводится лишь к уменьшению величин инкрементов неустойчивости [2–4, 9–12]. Иными словами, влияние вязкости приведет лишь к замедлению скорости нарастания амплитуд перетяжек, возникающих из-за действия сил поверхностного натяжения и дробящих струю на отдельные капли, так как действие вязкости проявляется только при наличии относительного движения частиц жидкости и сводится к замедлению этих движений.

Представляется необходимым провести нелинейное исследование закономерностей распада струи диэлектрической жидкости в коллинеарном электростатическом поле, например по методике, использованной в [13–16]. Нелинейные поправки к частотам волн, порождаемые их взаимодействием и включающие в себя слагаемые, пропорциональные квадрату напряженности электростатического поля, возможно, смогут привести к качественному изменению схемы капиллярного распада, получающейся в проведенном линейном анализе.

Заключение. В проведенном исследовании выяснилось, что продольное однородное электростатическое поле в отличие от радиального электростатического поля [3–4, 9–12] частично стабилизирует капиллярную неустойчивость струи диэлектрической жидкости по отношению к осесимметричным волновым деформациям, однако полная стабилизация капиллярной неустойчивости не реализуется. Иными словами, ни при каких значениях физико-химических характеристик жидкости и величины напряженности электрического поля, коллинеарного оси симметрии невозмущенной цилиндрической струи, невозможно добиться прекращения дробления струи на отдельные капли.

Работа выполнена в рамках тематического плана университета при поддержке грантов: губернатора Ярославской области, Рособразования №2.1.1/3776, РФФИ № 09-01-00084 и № 09-08-00148.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стретт Дж. В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т.2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
2. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
3. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Воронина Н.В., Егорова Е.В.* Об осцилляциях и спонтанном распаде заряженных жидких струй // ЭОМ. 2006. №6. С.23-34.
4. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2007. 340 с.
5. *Strutt J.W.* (Lord Rayleigh) On the instability of jets // Proc. London Math. Soc. 1878. V.10. P. 4–13.
6. *Глонти Г. А.* К теории устойчивости жидких струй в электрическом поле // ЖЭТФ. 1958. Т.34. №5. С.1328–1330.
7. *Nayyar N.K., Murty G.S.* The stability of a dielectric jet in a presence of a longitudinal electric field // Proc. of the Phys. Soc. 1960. V.75. Pt.3. №483. P.369–373.
8. *Saville D.A.* Elecrohydrodynamic stability: fluid cylinders in longitudinal electric fields // Phys. of Fluids. 1970. V.13. №12. P.2987–2994.

9. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В.* О спонтанном распаде заряженной струи вязкой электропроводной жидкости // Электронная обработка материалов. 2003. №1. С. 38–43
10. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В.* Об устойчивости неосесимметричной заряженной струи вязкой электропроводной жидкости // ЖТФ. 2003. Т.73. Вып.5. С. 5–12.
11. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В.* Об устойчивости неосесимметричных мод объемно заряженной струи вязкой диэлектрической жидкости // ЖТФ. 2003. Т.73. Вып.11. С. 22–30.
12. *Григорьев А.И., Воронина Н.В., Ширяева С.О.* Неосесимметричные осцилляции заряженной струи вязкой жидкости конечной проводимости // ЖТФ. 2008. Т.78. Вып.2. С. 33–41.
13. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Егорова Е.В.* О некоторых особенностях нелинейного резонансного взаимодействия мод заряженной струи // ЭОМ. 2005. № 1. С. 42–50.
14. *Воронина Н.В., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* О нелинейных поправках к частотам неосесимметричных мод объемно заряженной струи диэлектрической жидкости // ЖТФ. 2008. Т.78. Вып.6. С.1–14.
15. *Григорьев А.И., Воронина Н.В., Ширяева С.О.* Нелинейные неосесимметричные осцилляции объемно заряженной струи // ЖТФ. 2008. Т.78. Вып.7. С. 21–29.
16. *Ширяева С.О.* Аналитическое асимптотическое решение задачи о нелинейных осцилляциях толстой заряженной струи вязкой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 5. С. 14–29.

Поступила 26.02.09

Summary

On the base of dispersion equation for capillary waves on a surface of volumetrically charged jet of dielectric liquids in a longitudinal electrostatic field analysis was found that full stabilization of the capillary instability did not occure at any finite values of physical parameters.