

Асимптотический анализ нелинейного резонансного взаимодействия капиллярных волн произвольной симметрии на движущейся заряженной струе при многомодовой начальной деформации

С. О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 01.09.2020

После доработки 01.10.2020

Принята к публикации 03.10.2020

Представлена задача исследования нелинейного резонанса между капиллярными волнами на поверхности движущейся относительно материальной среды заряженной струи при многомодовой начальной деформации. В аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций показано, что на поверхности струи имеет место реализация внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия капиллярных волн произвольной симметрии как вырожденного, так и вторичного комбинационного. Положения резонансов зависят от физических параметров системы: величин коэффициента поверхностного натяжения и напряженности радиального электрического поля у поверхности струи, скорости ее движения относительно материальной среды, значений волновых и азимутальных чисел взаимодействующих волн, спектра волн, определяющих начальную деформацию.

Ключевые слова: струя, капиллярные волны, симметрия, нелинейность, резонансное взаимодействие

УДК 532.517.013.4

<https://doi.org/10.52577/eom.2021.57.3.72>

ВВЕДЕНИЕ

Аналитическое исследование нелинейного резонансного взаимодействия капиллярных волн на поверхности струи представляет интерес из-за возможности реализации в окрестности нелинейных резонансов переноса энергии между волнами [1]. Накопление энергии в одной из мод может привести к распаду струи. В практике монодисперсного распада струй [2] при получении потоков монодисперсных капель перенос энергии между модами может привести к появлению паразитных капель – сателлитов.

При нелинейном взаимодействии исходных волн, определяющих начальную деформацию струи, во втором порядке малости возбуждаются волны с волновыми и азимутальными числами, получающимися как в результате удвоения аналогичных характеристик исходных волн, так и при их сложении и вычитании.

Из теории нелинейного взаимодействия волн известно, что волны на поверхности жидкости могут эффективно обмениваться энергией при квадратичной нелинейности, характерной для гидродинамических задач, если их частоты ω_j и волновые векторы \vec{k}_j удовлетворяют соотношениям [1]:

$$\omega_1 \pm \omega_2 + \omega_3 = 0; \quad \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \vec{k}_3 = 0.$$

Таким образом, во взаимодействии должны участвовать минимум три волны, а само взаимо-

действие называется трехволновым. Для волн на поверхности струи, бегущих вдоль оси z , соотношение для волновых чисел примет скалярный вид:

$$k_1 \pm k_2 \pm k_3 = 0.$$

Дополнительная степень свободы, связанная с наличием заряда на струе, позволяющего изменять и частоты, и волновые числа волн, обеспечивает выполнение выписанных условий для многочисленных комбинаций волновых k и азимутальных m чисел.

Если волна с k_1 дважды взаимодействует с нелинейно возбуждающейся волной, например с k_3 , передавая ей энергию, то условия резонансного взаимодействия переписутся в виде:

$$2\omega_1 = \omega_3; \quad 2k_1 = k_3.$$

Такое взаимодействие называется вырожденным и является единственно реализуемым, если начальная деформация струи определяется одной волной. Когда в резонансном взаимодействии принимают участие три различных волны: две, входящие в спектр волн, определяющих начальную деформацию, и одна из волн, возбуждающихся за счет нелинейности, то реализуется вторичное комбинационное резонансное взаимодействие. Если начальная деформация струи определена волновым пакетом (суперпозицией нескольких волн), то возможна реализация

взаимодействий как вырожденного, так и вторичного комбинационного типов.

Учет влияния движения жидкой цилиндрической заряженной струи относительно материальной диэлектрической среды на устойчивость границы раздела представляет интерес как в связи с реальными приложениями феномена в технике и технологии [2–4], так и по гносеологическим соображениям [5–7]. В этом случае, кроме неустойчивости поверхности струи по отношению к капиллярным силам [8], в такой системе одновременно могут реализовываться и другие виды неустойчивости поверхности струи: неустойчивость тангенциального разрыва поля скоростей (Кельвина-Гельмгольца) [9, 10], изгибная неустойчивость [5–7, 11–13], а также электростатическая [5–7, 14] (см. фотографии струй в [15]).

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть струя радиуса R идеальной несжимаемой электропроводной жидкости плотностью ρ_{in} движется с постоянной скоростью $\vec{U}_0 = U_0 \times \vec{e}_z$ (\vec{e}_z – орт координаты z) относительно идеальной несжимаемой непроводящей диэлектрической среды с плотностью ρ_{ex} и проницаемостью ϵ_{ex} . В окружающем струю пространстве создается внешнее радиальное электрическое поле $\vec{E}_0 = E_0 \times \vec{e}_r$ (\vec{e}_r – радиальный орт), являющееся причиной появления на поверхности струи заряда с поверхностной плотностью χ . Коэффициент поверхностного натяжения границы раздела сред обозначим σ . Задачу будем решать в цилиндрической системе координат, ось OZ которой совпадает с осью симметрии невозмущенной струи, а начало координат движется с несущей скоростью струи \vec{U}_0 .

Форму свободной поверхности струи (границы раздела сред) опишем уравнением:

$$r = R + \xi(\varphi, z, t) - F(r, \varphi, z, t) \equiv r - (R + \xi(\varphi, z, t)) = 0;$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение равновесной цилиндрической поверхности струи, возникающее вследствие капиллярного волнового движения, генерируемого уже тепловым движением молекул жидкости [16]. Амплитуда таких волн весьма мала и по порядку величины определяется выражением $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура [16].

Безразмерная амплитуда возмущения принимается в качестве малого параметра задачи: $\epsilon \equiv \max |\xi(\varphi, z, t)| / R$.

Математическая формулировка задачи состоит из основных уравнений гидродинамики

идеальной жидкости и уравнений для определения электрического поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{U}_j = 0; \quad \frac{\partial \vec{U}_j}{\partial t} + (\vec{U}_j \times \nabla) \vec{U}_j = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j; \quad (j = in, ex); \\ \operatorname{rot} \vec{E} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0; \end{aligned}$$

и граничных условий:

$$\begin{aligned} r \rightarrow \infty: \quad \vec{U}_{ex} \rightarrow -\vec{U}_0; \quad \vec{U}_0 \rightarrow 0; \quad r \rightarrow 0: \quad \vec{U}_{in} \rightarrow 0; \\ F(r, \varphi, z, t) = 0: \end{aligned}$$

$$\frac{dF(r, \varphi, z, t)}{dt} = \frac{\partial F(r, \varphi, z, t)}{\partial t} + \vec{U}_j \times \nabla F(r, \varphi, z, t) = 0;$$

$$\vec{\tau} \times \vec{E} = 0; \quad P_{in} - P_{ex} + P_E - P_\sigma = 0;$$

$$P_E = \frac{\epsilon_{ex}}{8\pi} (\vec{E})^2; \quad P_\sigma = \sigma \nabla \times \vec{n};$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\nabla F(r, \varphi, z, t)}{|\nabla F(r, \varphi, z, t)|} \right); \quad (1)$$

где в выписанных выше уравнениях \vec{E} – напряженность внешнего электрического поля; $\vec{U}_j \equiv \vec{U}_j(r, \varphi, z, t)$ и $P_j = P_j(r, \varphi, z, t)$ – поля скоростей течения жидкости и гидродинамических давлений в струе ($j = in$) и во внешней среде ($j = ex$); $\vec{\tau}$ и \vec{n} – орты касательной и нормали к поверхности струи.

Примем, что в начальный момент времени возмущение цилиндрической поверхности струи имеет вид суперпозиции конечного спектра волн с разными волновыми числами k_l и различной азимутальной симметрией, определяющейся азимутальными числами m_{lj} :

$$t = 0:$$

$$\xi = \epsilon \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} (\zeta_{l,j} \times \exp(i \times m_{l,j} \varphi) + \bar{\zeta}_{l,j} \times \exp(-i \times m_{l,j} \varphi)) \times \exp(ik_l z);$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \xi = 0; \quad (2)$$

где Ω – спектр волновых чисел изначально возбужденных волн; Ξ_l – спектр азимутальных чисел, определяющих осевую симметрию волны с волновым числом k_l ; $\zeta_{l,j}$ – амплитуды изначально возбужденных мод.

Все нижеследующие расчеты будем проводить в безразмерных переменных, в которых $R = \rho_{in} = \sigma = 1$.

СКАЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

В рамках модели потенциального течения жидкости в квазиэлектростатическом приближении представим поле скоростей и вектор напряженности в виде градиентов гидродинамического [10, 17] и электрического [18] потенциалов соответственно:

$$\vec{U}_j = \nabla \psi_j; \quad (j = in, ex); \quad \vec{E} = -\nabla \Phi.$$

Подстановка данных выражений в задачи (1)–(2) превращает уравнения непрерывности и уравнения для электрического поля в уравнения Лапласа:

$$\Delta \psi_j = 0; \quad \Delta \Phi = 0.$$

Уравнения Эйлера могут быть проинтегрированы, и получены выражения для гидродинамических давлений внутри струи и во внешней среде:

$$P_j = P_{0,j} - \rho_j \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial t} + \frac{(\nabla \psi_j)^2}{2} \right).$$

Естественные граничные условия на оси и на бесконечности преобразуются к виду:

$$r \rightarrow 0: \psi_{in} \rightarrow 0. \quad r \rightarrow \infty: \psi_{ex} \rightarrow -U_0 \times z; \quad \nabla \Phi \rightarrow 0.$$

Граничные условия на поверхности струи также переформулируются. Кинематические граничные условия примут вид:

$$\frac{\partial F(r, \varphi, z, t)}{\partial t} + \nabla \psi_j \times \nabla F(r, \varphi, z, t) = 0.$$

Отсутствие тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля на поверхности струи преобразуется в условие эквипотенциальности этой поверхности:

$$\Phi = \text{const}.$$

Динамическое граничное условие не меняет своего вида, только давление электрических сил может быть записано через электрический потенциал:

$$P_E = \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi)^2.$$

Задача решается асимптотическим методом многих временных масштабов в квадратичном приближении по малому параметру ε [19]. Все искомые функции будем считать зависящими от разных временных масштабов, определяемых через малый параметр ε : $T_p = \varepsilon^p t$; ($p = 0, 1, 2, \dots$) $\rightarrow \infty$. При этом производная по времени вычисляется по правилу [19]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2); \quad (3)$$

где O – символ порядка [19].

Кроме того, представим искомые функции в виде разложений по степеням малого параметра задачи:

$$\psi_{in}(\vec{r}, T_0, T_1) = \varepsilon \times \psi_{in}^{(1)}(\vec{r}, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \psi_{in}^{(2)}(\vec{r}, T_0, T_1) + O(\varepsilon^3);$$

$$\psi_{ex}(\vec{r}, T_0, T_1) = \psi_{ex}^{(0)}(z) + \varepsilon \times \psi_{ex}^{(1)}(\vec{r}, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \psi_{ex}^{(2)}(\vec{r}, T_0, T_1) + O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi(\vec{r}, T_0, T_1) = \Phi^{(0)}(r) + \varepsilon \times \Phi^{(1)}(\vec{r}, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(\vec{r}, T_0, T_1) + O(\varepsilon^3);$$

$$\xi(\varphi, z, T_0, T_1) = \varepsilon \times \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0, T_1) + O(\varepsilon^3). \quad (4)$$

Верхний индекс в скобках указывает на порядок малости соответствующей компоненты.

В виде аналогичных разложений представим входящие в динамическое граничное условие давления на поверхности струи:

$$P_{in} = P_{in}^{(0)} + \varepsilon \times P_{in}^{(1)} + \varepsilon^2 P_{in}^{(2)} + O(\varepsilon^3);$$

$$P_{ex} = P_{ex}^{(0)} + \varepsilon \times P_{ex}^{(1)} + \varepsilon^2 P_{ex}^{(2)} + O(\varepsilon^3);$$

$$P_E = P_E^{(0)} + \varepsilon \times P_E^{(1)} + \varepsilon^2 P_E^{(2)} + O(\varepsilon^3);$$

$$P_\sigma = P_\sigma^{(0)} + \varepsilon \times P_\sigma^{(1)} + \varepsilon^2 P_\sigma^{(2)} + O(\varepsilon^3). \quad (5)$$

Подставим разложения (4)–(5) с учетом соотношения (1) в выше сформулированную задачу. Группируя слагаемые при соответствующих степенях малого параметра ε , разобьем исходную задачу на краевые задачи нулевого, первого и второго порядков малости. Решения задач нулевого и первого порядков трудностей не вызывают, могут быть получены по схеме, использованной в [9], потому их решения выпишем сразу.

ЗАДАЧА НУЛЕВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Решение задачи нулевого порядка малости по ε описывает невозмущенное равновесное состояние системы: то есть цилиндрическую струю, движущуюся относительно среды с постоянной скоростью $\vec{U}_0 = U_0 \vec{e}_z$, распределение электрического потенциала в окрестности невозмущенной цилиндрической равномерно по поверхности заряженной струи и перепад давлений в струе и среде в равновесном состоянии.

ЗАДАЧА ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Решение задачи первого порядка малости по ε будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
\xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) &= \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} A_{l,j} \cos(m_{l,j} \varphi + B_{l,j}) \times \\
&\times \left(\exp[i(k_l z - \omega_1(l,j)T_0)] + d_{l,j} \exp[i(k_l z + \omega_2(l,j)T_0)] \right) + (\kappa.c.); \\
\psi_{in}^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= \\
&= -i \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} b_{l,j} A_{l,j} \cos(m_{l,j} \varphi + B_{l,j}) \times \\
&\times \left(\exp[i(k_l z - \omega_1(l,j)T_0)] - \exp[i(k_l z + \omega_2(l,j)T_0)] \right) \times \\
&\quad \times \frac{I_{m_{l,j}}(k_l r)}{I_{m_{l,j}}(k_l)} + (\kappa.c.); \\
\psi_{ex}^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= \\
&= -i \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} A_{l,j} \cos(m_{l,j} \varphi + B_{l,j}) \left(f_{l,j}^{(1)} \exp[i(k_l z - \omega_1(l,j)T_0)] - \right. \\
&\left. - f_{l,j}^{(2)} d_{l,j} \exp[i(k_l z + \omega_2(l,j)T_0)] \right) \frac{K_{m_{l,j}}(k_l r)}{K_{m_{l,j}}(k_l)} + (\kappa.c.); \\
\Phi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) &= \\
&= 4\pi\chi \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} A_{l,j} \cos(m_{l,j} \varphi + B_{l,j}) \times \\
&\times \left(\exp[i(k_l z - \omega_1(l,j)T_0)] + d_{l,j} \exp[i(k_l z + \omega_2(l,j)T_0)] \right) \times \\
&\quad \times \frac{K_{m_{l,j}}(k_l r)}{K_{m_{l,j}}(k_l)} + (\kappa.c.);
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\omega_{1,2}(k_l, m_{l,j}) &\equiv \omega_{1,2}(l, j) = \\
&= \sqrt{\omega_0^2(l, j) + \left(\frac{1}{2} k_l U_0 \gamma_{l,j} \right)^2} \pm \frac{1}{2} k_l U_0 \gamma_{l,j}; \\
\omega_0^2(k_l, m_{l,j}) &\equiv \omega_0^2(l, j) \equiv \frac{g_{l,j} h_{l,j}}{(h_{l,j} - \rho_{ex} g_{l,j})} \times \\
&\times \left(k_l^2 + m_{l,j}^2 - 1 + 4\pi \varepsilon_{ex} \chi^2 (1 + h_{l,j}) + \frac{k_l^2 U_0^2 \rho_{ex}}{h_{l,j}} \right); \\
\gamma(k_l, m_{l,j}) &\equiv \gamma_{l,j} \equiv \frac{2\rho_{ex} g_{l,j}}{(h_{l,j} - \rho_{ex} g_{l,j})}; \\
g(k_l, m_{l,j}) &\equiv g_{l,j} \equiv k_l \frac{I'_{m_{l,j}}(k_l)}{I_{m_{l,j}}(k_l)}; \\
h(k_l, m_{l,j}) &\equiv h_{l,j} \equiv k_l \frac{K'_{m_{l,j}}(k_l)}{K_{m_{l,j}}(k_l)}; \quad d_{l,j} \equiv \frac{\omega_1(l, j)}{\omega_2(l, j)}; \\
b_{l,j} &\equiv \frac{\omega_1(l, j)}{g_{l,j}};
\end{aligned}$$

$$f_{l,j}^{(1)} \equiv \frac{1}{h_{l,j}} (\omega_1(l, j) + k_l U_0);$$

$$f_{l,j}^{(2)} \equiv \frac{1}{h_{l,j}} (\omega_2(l, j) - k_l U_0).$$

$I_m(x)$ и $K_m(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [20]; $A_{l,j}(T_1)$ и $B_{l,j}(T_1)$ – вещественные функции временного масштаба T_1 ; аббревиатурой (к.с.) обозначены слагаемые, комплексно сопряженные к выпитанным. Частоты $\omega_1(l, j)$ и $-\omega_2(l, j)$ являются корнями дисперсионного уравнения.

ЗАДАЧА ВТОРОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ

Основная сложность решения задачи второго порядка малости – в ее громоздкости. Задача второго порядка малости является неоднородной, где функции неоднородности выражаются через решения задач нулевого и первого порядков малости. Полная формулировка задачи второго порядка малости имеет вид:

$$\Delta \psi_{ex}^{(2)} = 0; \quad \Delta \psi_{in}^{(2)} = 0; \quad \Delta \Phi^{(2)} = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \nabla \psi_{in}^{(2)} \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty:$$

$$\nabla \psi_{ex}^{(2)} \rightarrow 0; \quad \nabla \Phi^{(2)} \rightarrow 0;$$

$$r = 1:$$

$$-\partial_{T_0} \xi^{(2)} + \partial_r \psi_{in}^{(2)} = \partial_{T_1} \xi^{(1)} + \partial_\varphi \xi^{(1)} \partial_\varphi \psi_{in}^{(1)} + \quad (6)$$

$$+ \partial_z \xi^{(1)} \partial_z \psi_{in}^{(1)} - \xi^{(1)} \partial_{r,r} \psi_{in}^{(1)};$$

$$-\partial_{T_0} \xi^{(2)} + U_0 \times \partial_z \xi^{(2)} + \partial_r \psi_{ex}^{(2)} = \partial_{T_1} \xi^{(1)} + \partial_z \xi^{(1)} \partial_z \psi_{ex}^{(1)} + \quad (7)$$

$$+ \partial_\varphi \xi^{(1)} \partial_\varphi \psi_{ex}^{(1)} - \xi^{(1)} \partial_{r,r} \psi_{ex}^{(1)};$$

$$\partial_{T_0} \psi_{in}^{(2)} + \partial_{T_1} \psi_{in}^{(1)} + \frac{1}{2} (\partial_r \psi_{in}^{(1)})^2 + \frac{1}{2} (\partial_\varphi \psi_{in}^{(1)})^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (\partial_z \psi_{in}^{(1)})^2 - \xi^{(1)} \partial_{r,T_0} \psi_{in}^{(1)} - P_E^{(2)} -$$

$$- \rho_{ex} (\partial_{T_0} \psi_{ex}^{(2)} - U_0 \partial_z \psi_{ex}^{(2)} + \partial_{T_1} \psi_{ex}^{(1)} + \frac{1}{2} (\partial_r \psi_{ex}^{(1)})^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (\partial_\varphi \psi_{ex}^{(1)})^2 + \frac{1}{2} (\partial_z \psi_{ex}^{(1)})^2 + \xi^{(1)} \partial_{r,T_0} \psi_{ex}^{(1)} - U_0 \xi^{(1)} \partial_{r,z} \psi_{ex}^{(1)}) =$$

$$= \xi^{(2)} + \partial_{z,z} \xi^{(2)} + \partial_{\varphi,\varphi} \xi^{(2)} - \xi^{(1)2} + \quad (8)$$

$$+ \frac{1}{2} (\partial_z \xi^{(1)})^2 - \frac{1}{2} (\partial_\varphi \xi^{(1)})^2 - 2\xi^{(1)} \partial_{\varphi,\varphi} \xi^{(1)};$$

$$P_E^{(2)} \equiv \frac{\varepsilon_d}{8\pi} \times$$

$$\times \left(2\partial_r \Phi^{(0)} \partial_r \Phi^{(2)} + 2\xi^{(2)} \partial_r \Phi^{(0)} \partial_{r,r} \Phi^{(0)} + (\xi^{(1)})^2 \left((\partial_{r,r} \Phi^{(0)})^2 + \partial_r \Phi^{(0)} \Phi^{(0)3} \right) + \right.$$

$$+(\partial_z \Phi^{(1)})^2 + (\partial_\varphi \Phi^{(1)})^2 + (\partial_r \Phi^{(1)})^2 + 2\xi^{(1)}(\partial_{r,r} \Phi^{(0)} \partial_r \Phi^{(1)} + \partial_r \Phi^{(0)} \partial_{r,r} \Phi^{(1)}).$$

Условие эквипотенциальности поверхности принимает вид:

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} + \xi^{(2)} \partial_r \Phi^{(0)} &= \\ &= -\frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \partial_{r,r} \Phi^{(0)} - \xi^{(1)} \partial_r \Phi^{(1)} \end{aligned} \quad (9)$$

и начальные условия:

$$t = 0: \quad \xi^{(2)} = 0; \quad \partial_{T_0} \xi^{(2)} + \partial_{T_1} \xi^{(1)} = 0.$$

После подстановки в задачу второго порядка малости решений нулевого и первого порядков получим систему неоднородных дифференциальных уравнений относительно функций $\Psi_{in}^{(2)}$, $\Psi_{ex}^{(2)}$, $\Phi^{(2)}$ и $\xi^{(2)}$ имеющую громоздкий вид. Решение ее ищется стандартным методом в виде суммы общих решений однородной системы и частных решений неоднородной системы.

Однородная система граничных условий второго порядка малости полностью совпадет с аналогичной системой для задачи первого порядка малости, поэтому ее общее решение будет иметь такой же вид, как и общее решение задачи первого порядка.

Для нахождения частного решения неоднородной системы граничных условий (6)–(9) необходимо расписать функции неоднородности через решения нулевого и первого порядков малости. При этом они примут вид сумм слагаемых, каждое из которых пропорционально какому-либо из следующих выражений, определяющих вид их зависимости от координат z , φ и временного масштаба T_0 :

$$\begin{aligned} &\exp[i(zk_l - T_0 \times \omega_1(l, j))] \times \\ &\quad \times \exp[\pm i \times m_{l,j} \times \varphi]; \\ &\exp[i(zk_l + T_0 \times \omega_2(l, j))] \times \\ &\quad \times \exp[\pm i \times m_{l,j} \times \varphi]; \end{aligned} \quad (10)$$

а также

$$\begin{aligned} &\alpha_{l,j} \alpha_{n,i} \exp[\pm i z(k_l \pm k_n) + iT_0(\omega_p(l, j) \pm \omega_q(n, i))] \times \\ &\quad \times \exp[i\varphi(m_{l,j} \pm m_{n,i})]; \end{aligned} \quad (11)$$

где индексы p и q независимо друг от друга принимают два значения 1 и 2. Таким образом, функции неоднородности имеют вид суперпозиции отдельных волн, частоты которых – волновые и азимутальные числа – определяются суммами и разностями соответствующих характеристик волн из начального спектра. Всего получится 16 различных комбинаций для двух волн начального спектра.

При записи (11) использовано представление для комплексных функций вида:

$$\alpha_{l,j}(T_1) \equiv \frac{1}{2} A_{l,j}(T_1) \exp[\pm i \times B_{l,j}(T_1)].$$

Слагаемые в функциях неоднородности, пропорциональные выражениям типа (10), являются источником секулярных слагаемых в решениях системы. Поэтому для того чтобы удалить такие слагаемые из решения, необходимо приравнять к нулю коэффициенты при этих экспонентах. Это требование позволяет определить зависимость решения первого порядка малости от временного масштаба T_1 , а именно то, что эти решения от времени T_1 не зависят. Таким образом, в рассматриваемом приближении величины $\alpha_{l,j}$ являются комплексными, а $A_{l,j}$ и $B_{l,j}$ – вещественными константами. Из начальных условий следует, что $A_{l,j}$ и $B_{l,j}$ связаны с комплексными амплитудами мод начального спектра соотношением:

$$\zeta_{l,j} = \left(1 + \frac{\omega_1(l, j)}{\omega_2(l, j)}\right) A_{l,j} \times \exp(i \times B_{l,j}).$$

Полное частное решение неоднородной системы составляет как суперпозиция ее частных решений для каждого вида зависимости правых частей уравнений (функций неоднородности) от координат z , φ и времени T_0 , представленных выражениями вида (11). Частные решения ищутся в виде аналогичных зависимостей от z , φ и T_0 с подлежащими определению неизвестными коэффициентами. Подстановка проектов решений для каждого вида зависимостей (11) в систему граничных условий превращает ее в систему линейных алгебраических неоднородных уравнений для определения этих неизвестных коэффициентов. Решение полученной системы методом Крамера позволяет определить явный вид коэффициентов, а следовательно, и явный вид частных решений исходной неоднородной системы граничных условий. Складывая полученные частные решения с общими решениями однородной системы граничных условий, можно получить общее решение неоднородной задачи второго порядка малости, которое в силу его громоздкости здесь не приводится. Произвольные константы, содержащиеся в этом общем решении, находятся из системы начальных условий второго порядка малости. После внушительных преобразований можно получить окончательные решения задачи второго порядка малости. Но эти решения имеют весьма громоздкий вид. Поэтому ниже для иллюстрации

сказанного приведем только решение для возмущения поверхности струи $\xi^{(2)}(\varphi, z, t)$:

$$\begin{aligned} & \xi^{(2)}(\varphi, z, t) = \\ & = \sum_{l \in \Omega} \sum_{j \in \Xi_l} \sum_{n \in \Omega} \sum_{i \in \Xi_n} \left(\frac{1}{4} \frac{\omega_2(l, j)}{\Lambda(k_l, m_{l, j})} \frac{\omega_2(n, i)}{\Lambda(k_n, m_{n, i})} A_{l, j} A_{n, i} \times \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{I=1}^8 \sum_{J=1}^2 \left[\frac{F_\xi(I, J)}{X_{I, J}} \left[\frac{T(I, J)}{\Lambda(K_{L(I)}, M_J)} + \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \cos\left(K_{L(I)} \times z + t \times s(I) \times \Omega^{(I)}\right) \right] \cos(\varphi M_J + B_J) \right] \right); \\ & T(I, J) \equiv \left(\left(s(I) \times \Omega^{(I)} - \omega_2(K_{L(I)}, M_J) \right) \times \cos\left(K_{L(I)} z - t \omega_1(K_{L(I)}, M_J)\right) - \right. \\ & \quad \left. - \left(s(I) \Omega^{(I)} + \omega_1(K_{L(I)}, M_J) \right) \cos\left(K_{L(I)} z + t \omega_2(K_{L(I)}, M_J)\right) \right); \quad (12) \\ & K_1 \equiv (k_l + k_n); K_2 \equiv (k_l - k_n); \\ & M_1 \equiv (m_{l, j} + m_{n, i}); M_2 \equiv (m_{l, j} - m_{n, i}); \\ & \Lambda(k, m) \equiv \omega_1(k, m) + \omega_2(k, m); \\ & X_{I, J} \equiv \left(h(K_{L(I)}, M_J) - \rho_{ex} g(K_{L(I)}, M_J) \right) \times \\ & \quad \times \left(\omega_1(K_{L(I)}, M_J) + s(I) \Omega^{(I)} \right) \times \\ & \quad \times \left(\omega_2(K_{L(I)}, M_J) - s(I) \Omega^{(I)} \right); \\ & F_\xi(I, J) \equiv d_{n, i}^{(p(I)-1)} \times \\ & \quad \times \left(s(I) U_0 \rho_{ex} d_{l, j}^{(q(I)-1)} f_{l, j}^{q(I)} k_l h_{l, j} g(K_{L(I)}, M_J) - \right. \\ & \quad \left. - \Omega^{(I)} b_{l, j} (\beta_{l, j} - S_{I, J}) \right) h(K_{L(I)}, M_J) - \\ & \quad - \rho_{ex} \left(s(I) U_0 K_{L(I)} - \Omega^{(I)} \right) \times \\ & \quad \times g(K_{L(I)}, M_J) d_{l, j}^{(q(I)-1)} d_{n, i}^{(p(I)-1)} f_{l, j}^{q(I)} (\delta_{l, j} - S_{I, J}) + \\ & \quad + \frac{1}{2} g(K_{L(I)}, M_J) h_{M_J}(K_{L(I)}, M_J) N_{I, J}; \\ & N_{I, J} = -c(I) b_{l, j} b_{n, i} (g_{l, j} g_{n, i} + S_{I, J}) + \\ & \quad + 2b_{l, j} g_{l, j} d_{n, i}^{(p(I)-1)} \omega_{q(I)}(l, j) + \\ & \quad + d_{l, j}^{(q(I)-1)} d_{n, i}^{(p(I)-1)} \Pi(I, J); \\ & \Pi(I, J) \equiv \left[c(I) \rho_{ex} f_{l, j}^{q(I)} f_{n, i}^{p(x)} f_{p(I)}(n, i) \times \right. \\ & \quad \times \left(h_{l, j} h_{n, i} + S_{I, J} \right) + 2 \left(2m_{n, i}^2 - 1 \right) + S_{I, J+1} + \\ & \quad + 4\pi \varepsilon_{ex} \chi^2 \left(3 + h(K_{L(I)}, M_J) \right) \left(1 + 2h_{l, j} \right) + \\ & \quad + h_{l, j} \left(2 + h_{n, i} \right) - 2\delta_{l, j} + S_{I, J} \left. \right) - \\ & \quad - 2\rho_{ex} f_{l, j}^{q(I)} h_{l, j} \omega_{q(I)}(l, j) \left. \right]; \\ & S_{I, J} \equiv (-1)^{L(I)} \left(k_l k_n + (-1)^{L(I)+J} m_{l, j} m_{n, i} \right); \\ & \beta_{l, j} \equiv k_l^2 + m_{l, j}^2 - g_{l, j}; \quad \delta_{l, j} \equiv k_l^2 + m_{l, j}^2 - h_{l, j}. \end{aligned}$$

В табл. 1 приведены значения $S_{I, J}$ при изменении отношения I/J .

В табл. 2 для некоторых вспомогательных объектов, использованных при записи конечных выражений, приведены наборы их значений, приобретаемых, при смене значения индекса суммирования I :

$$\begin{aligned} \Omega 1_1 & \equiv \omega_1(l, j) + \omega_1(n, i); \quad \Omega 1_2 \equiv \omega_1(l, j) - \omega_1(n, i); \\ \Omega 2_1 & \equiv \omega_1(l, j) + \omega_2(n, i); \quad \Omega 2_2 \equiv \omega_1(l, j) - \omega_2(n, i); \\ \Omega 2_1 & \equiv \omega_2(l, j) + \omega_1(n, i); \quad \Omega 2_2 \equiv \omega_2(l, j) - \omega_1(n, i); \\ \Omega 2_2 & \equiv \omega_2(l, j) + \omega_2(n, i); \quad \Omega 2_2 \equiv \omega_2(l, j) - \omega_2(n, i). \end{aligned}$$

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассмотрим подробнее выражение, полученное для поправки к форме поверхности струи (12). В нем $K_{L(I)}$ – волновые числа, принимающие при смене индекса I значения, приведенные в табл. 3 и являющиеся суммами либо разностями волновых чисел волн, определяющих начальную деформацию; азимутальные числа M_J также принимают при смене индекса J значения, определяемые суммами либо разностями азимутальных чисел волн начального спектра:

$$M_1 = (m_{l, j} + m_{n, i}); \quad M_2 = (m_{l, j} - m_{n, i}). \quad (13)$$

В решении (12) в знаменателе каждого из слагаемых (так же как и в невыписанных выражениях для $\psi_{in}^{(2)}$, $\psi_{ex}^{(2)}$ и $\Phi^{(2)}$) стоят величины $X_{I, J}$, явный вид которых приведен выше, содержащие в качестве множителей выражения:

$$\begin{aligned} & \left(\omega_1(K_{L(I)}, M_J) + s(I) \Omega^{(I)} \right) \times \\ & \times \left(\omega_2(K_{L(I)}, M_J) - s(I) \Omega^{(I)} \right); \quad (14) \end{aligned}$$

где $\Omega^{(I)}$ – комбинации частот исходных волн, определяющих начальное возмущение струи (см. табл. 4).

Таким образом, знаменатели $X_{I, J}$ содержат линейные комбинации как частот исходных волн, так и частот волн, возбужденных в результате нелинейного взаимодействия и имеющих волновые и азимутальные числа $K_{L(I)}$ и M_J . Если какая-либо из комбинаций (14) будет близка к нулю, то соответствующая амплитуда окажется неограниченно большой. В теории нелинейных волн это обстоятельство интерпретируется как нелинейное резонансное взаимодействие тех волн, комбинация частот которых становится близкой к нулю [21]. Для реализации резонансных ситуаций важно, чтобы все волны, участвующие во взаимодействии, были устойчивыми.

Рассмотрим подробнее ситуацию, когда в начальный момент времени возмущение поверх-

Таблица 1. Значения $S_{I,J}$

I/J	1	2
1	$k_l k_n - m_{l,j} m_{n,i}$	$-k_l k_n - m_{l,j} m_{n,i}$
2	$k_l k_n + m_{l,j} m_{n,i}$	$-k_l k_n + m_{l,j} m_{n,i}$
3	$-k_l k_n - m_{l,j} m_{n,i}$	$k_l k_n - m_{l,j} m_{n,i}$
4	$k_l k_n + m_{l,j} m_{n,i}$	$-k_l k_n + m_{l,j} m_{n,i}$
5	$-k_l k_n - m_{l,j} m_{n,i}$	$k_l k_n - m_{l,j} m_{n,i}$
6	$-k_l k_n + m_{l,j} m_{n,i}$	$k_l k_n + m_{l,j} m_{n,i}$
7	$-k_l k_n - m_{l,j} m_{n,i}$	$k_l k_n - m_{l,j} m_{n,i}$
8	$-k_l k_n + m_{l,j} m_{n,i}$	$k_l k_n + m_{l,j} m_{n,i}$

Таблица 2. Значения, которые принимают использованные выше обозначения, при смене значений индексов суммирования I и J

I	1	2	3	4	5	6	7	8
$s(I)$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
$L(I)$	2	1	2	1	1	2	1	2
$c(I)$	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
$q(I)$	1	1	1	1	2	2	2	2
$p(I)$	1	1	2	2	1	1	2	2
$\Omega^{(I)}$	$\Omega 11_2$	$\Omega 11_1$	$\Omega 12_1$	$\Omega 12_2$	$\Omega 21_2$	$\Omega 21_1$	$\Omega 22_1$	$\Omega 22_2$
$K_{L(I)}$	K_2	K_1	K_2	K_1	K_1	K_2	K_1	K_2
$f^{(I)}(l,j)$	$f^{(1)}(l,j)$	$f^{(1)}(l,j)$	$f^{(1)}(l,j)$	$f^{(1)}(l,j)$	$f^{(2)}(l,j)$	$f^{(2)}(l,j)$	$f^{(2)}(l,j)$	$f^{(2)}(l,j)$
$d_{l,j}^{(q(I)-1)}$	1	1	1	1	$d_{l,j}$	$d_{l,j}$	$d_{l,j}$	$d_{l,j}$
$d_{n,i}^{(p(I)-1)}$	1	1	$d_{n,i}$	$d_{n,i}$	1	1	$d_{n,i}$	$d_{n,i}$

Таблица 3. Значения азимутальных чисел $K_{L(I)}$

I	1	2	3	4	5	6	7	8
$K_{L(I)}$	$(k_l - k_n)$	$(k_l + k_n)$	$(k_l - k_n)$	$(k_l + k_n)$	$(k_l + k_n)$	$(k_l - k_n)$	$(k_l + k_n)$	$(k_l - k_n)$

Таблица 4. Значения комбинаций частот $\Omega^{(I)}$

I	$\Omega^{(1)}$	I	$\Omega^{(1)}$
1	$\omega_1(l, j) - \omega_1(n, i)$	5	$\omega_2(l, j) - \omega_1(n, i)$
2	$\omega_1(l, j) + \omega_1(n, i)$	6	$\omega_2(l, j) + \omega_1(n, i)$
3	$\omega_1(l, j) + \omega_2(n, i)$	7	$\omega_2(l, j) + \omega_2(n, i)$
4	$\omega_1(l, j) - \omega_2(n, i)$	8	$\omega_2(l, j) - \omega_2(n, i)$

ности струи имеет вид одной волны с волновым числом k и азимутальным числом m . В расчетах линейного приближения это приведет к распространению по поверхности струи (вследствие влияния материальной среды) волн с частотами $\omega_1(k, m)$ и $\omega_2(k, m)$. В результате нелинейного взаимодействия в расчетах второго порядка малости будут возбуждаться волны с удвоенным волновым числом $2k$, азимутальная симметрия которых будет определяться числами M_J , равными либо нулю, либо $2m$. Частоты участвующих в нелинейном взаимодействии вторичных волн, являющиеся линейными комбинациями частот волн начального спектра, в данном случае будут принимать значения:

$$\Omega^{(I)} = \{0, 2\omega_1(k, m), \omega_1(k, m) + \omega_2(k, m), \omega_1(k, m) - \omega_2(k, m), \omega_2(k, m) - \omega_1(k, m), \omega_2(k, m) + \omega_1(k, m), 2\omega_2(k, m), 0\}.$$

Взаимодействие каких-либо из перечисленных волн будет иметь резонансный характер, если их частоты будут удовлетворять соотношению вида:

$$G \equiv \left(\omega_1(2k, M_J) + s(I)\Omega^{(I)} \right) \times \left(\omega_2(2k, M_J) - s(I)\Omega^{(I)} \right) \approx 0;$$

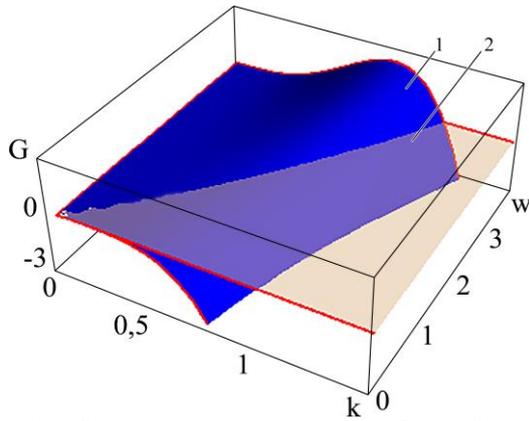


Рис. 1. Зависимость значения комбинаций частот вторичных волн от волнового числа k исходной волны и зарядового параметра w . Расчеты проводились при $We = 0,1$, $\rho_2 = 0,001$, $\varepsilon_{ex} = 1$.

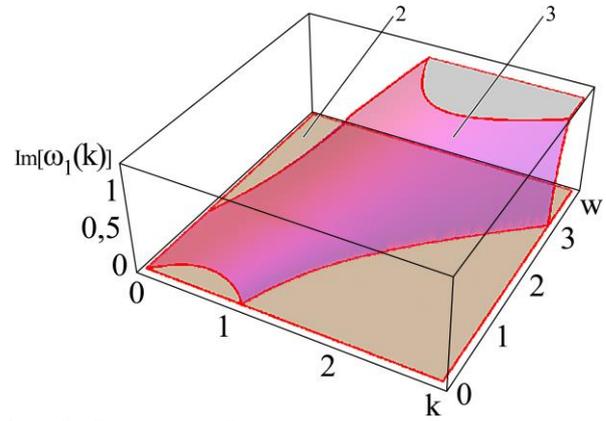


Рис. 2. Зона неустойчивости взаимодействующих волн. Расчеты проводились при $We = 0,1$, $\rho_2 = 0,001$, $\varepsilon_{ex} = 1$.

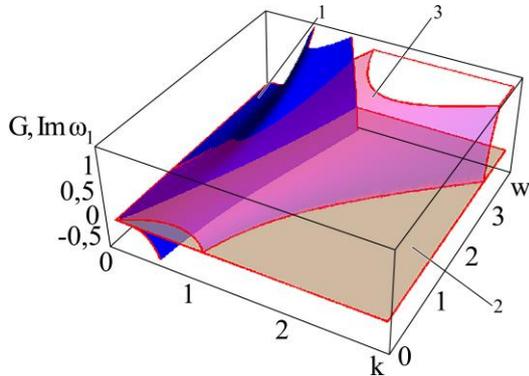


Рис. 3. Совмещение рис. 1 и 2.

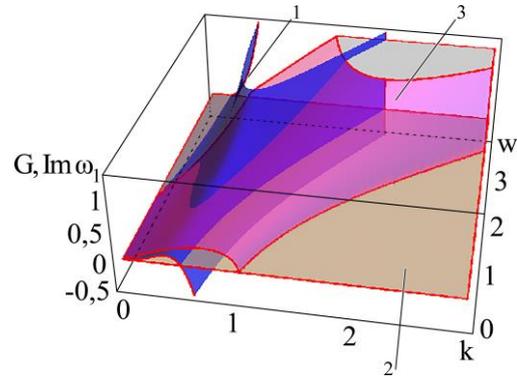


Рис. 4. Взаимное расположение линии возможного резонансного взаимодействия и зоны неустойчивости начальной осесимметричной ($m = 0$) и вторичных осесимметричных ($M = 0$) волн в координатах k и w ; $We = 0,1$, $\rho_2 = 0,001$, $\varepsilon_{ex} = 1$.

то есть величина G , являющаяся некоторой комбинацией частот первичных и вторичных волн, будет близка к нулю.

На рис. 1–4 представлены результаты численного анализа ситуации, когда первичные волны осесимметричны. В этом случае волны, возбуждающиеся во втором порядке, также обладают осевой симметрией.

На рис. 1–3 проведен анализ возможности реализации резонансного взаимодействия для тройки волн:

$$\begin{aligned} & \cos(2kz - \omega_1(2k, 0)t), \\ & \cos(2kz + \omega_2(2k, 0)t), \\ & \cos(2kz - 2\omega_1(k, 0)t). \end{aligned}$$

На рис. 1 поверхностью 1 изображены значения величины разности частот:

$$\omega_1(2k, 0) - 2\omega_1(k, 0);$$

при разных значениях волнового числа k исходной волны и зарядового параметра $w \equiv 4\pi\varepsilon_{ex}\chi^2$.

Положение возможных резонансных состояний определяется кривой, по которой поверхность $G(k, w)$ (поверхность 1) пересекается

плоскостью $G = 0$ (поверхность 2). Реальным резонансное взаимодействие является только в том случае, если линия пересечения лежит в области устойчивости всех вовлеченных во взаимодействие волн. Волны же устойчивы, когда их частоты вещественны.

На рис. 2 поверхность $Im[\omega_1(k, 0)]$ (поверхность 3) очерчивает зону неустойчивости взаимодействующих волн в плоскости $\{k, w\}$. Поверхность 2, как и на рис. 1, соответствует плоскости $G = 0$. Область $Im[\omega_1(2k, 0)]$ находится внутри изображенной.

На рис. 3 обе картинки с рис. 1 и 2 совмещены. Видно, что линия возможных резонансов (линия пересечения поверхности $G(k, w)$ с плоскостью $G = 0$) полностью лежит в области неустойчивости, и, следовательно, реализация резонансов невозможна.

На рис. 4 дан подобный вышеприведенному анализ возможности резонансного взаимодействия другой комбинации волн:

$$\begin{aligned} & \cos(2kz - \omega_1(2k, 0)t), \\ & \cos(2kz + \omega_2(2k, 0)t), \\ & \cos(2kz - (\omega_1(k, 0) - \omega_2(k, 0))t). \end{aligned}$$

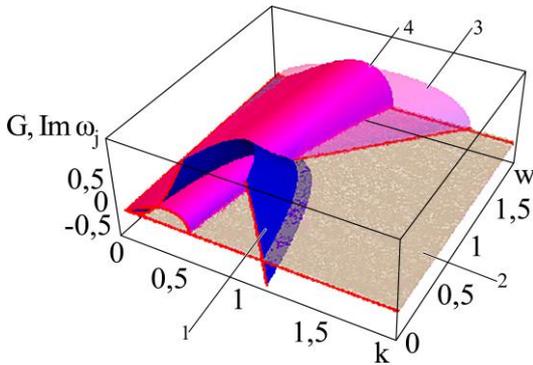


Рис. 5. Взаимное расположение линии возможного резонансного взаимодействия и зоны неустойчивости начальной изгибной ($m = 1$) и вторичных осесимметричных ($M = 0$) волн в координатах k и w ; $We = 0,1$, $\rho_2 = 0,001$, $\epsilon_{ex} = 1$.

Поверхность 1 соответствует комбинации частот:

$$\begin{aligned} & (\omega_1(2k,0) - \omega_1(k,0) + \omega_2(k,0)) \times \\ & \times (\omega_2(2k,0) + \omega_1(k,0) - \omega_2(k,0)). \end{aligned}$$

Поверхность 3 соответствует инкрементам:

$$\text{Im} \omega_1(k,0), \text{Im} \omega_2(k,0).$$

Области $\text{Im} \omega_1(2k,0)$ и $\text{Im} \omega_2(2k,0)$ лежат внутри приведенных на рис. 4.

Из рис. 4 следует, что в данном случае существуют две резонансные линии: левая и правая линии пересечения поверхности 1 и нулевой плоскости – поверхности 2, и одна из них (левая) находится в области устойчивости. Реализация резонансного взаимодействия возможна при значениях зарядового параметра $w \geq 1,5$ в области малых значений волновых чисел: $k \ll 1$.

Расчеты показывают, что если начальное возмущение поверхности струи определяется изгибной волной с азимутальным числом $m = 1$, то возбуждающиеся за счет нелинейного взаимодействия вторичные волны будут иметь значения азимутальных чисел $M = 2$ и $M = 0$. Анализ возможности резонансного взаимодействия неосесимметричной изгибной (с $m = 1$) и вторичных деформационных волн (с $M = 2$):

$$\begin{aligned} & \cos(2kz - (\omega_1(k,1) - \omega_2(k,1))t), \\ & \cos(2kz - \omega_1(2k,2)t), \\ & \cos(2kz + \omega_2(2k,2)t) \end{aligned}$$

показывает, что такое резонансное взаимодействие неосесимметричных волн не реализуется ни при каких значениях как зарядового параметра w , так и параметра Вебера $We \equiv \rho_{ex} U_0^2$: во всех случаях резонансные кривые расположены в пределах области неустойчивости волн.

На рис. 5 результаты аналогичного анализа приведены для случая двух осесимметричных вторичных волн и одной изгибной:

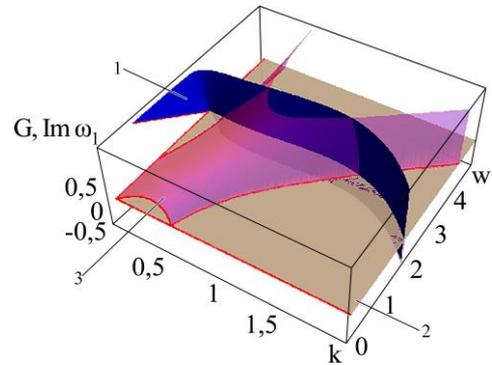


Рис. 6. Взаимное расположение линии возможного резонансного взаимодействия и зоны неустойчивости начальной деформационной ($m = 2$) и вторичных осесимметричных ($M = 0$) волн в координатах k и w ; $We = 0,1$, $\rho_2 = 0,001$, $\epsilon_{ex} = 1$.

$$\begin{aligned} & \cos(2kz - \omega_1(2k,0)t), \\ & \cos(2kz + \omega_2(2k,0)t), \\ & \cos(2kz - 2\omega_1(k,1)t). \end{aligned}$$

Поверхность 4 соответствует величине инкремента $\text{Im} \omega_1(2k,0)$; поверхность 3 – $\text{Im} \omega_1(k,1)$; поверхность 1 – комбинации частот $\omega_1(2k,0) - 2\omega_1(k,1)$.

Как видно из рис. 5, в данном случае резонансное взаимодействие возможно при малых значениях заряда (параметра w) для волн с $k \sim 1$. Как показывают расчеты, на плоскости значений $\{k, We\}$ резонансное взаимодействие реализуется при малых значениях параметра We ($We < 1,5$) для коротких волн.

Анализ ситуации, когда начальное возмущение поверхности струи задается деформационной волной, то есть волной с азимутальным числом $m > 1$, показывает, что для $m = 2$ в случае неосесимметричных вторичных волн ($M = 4$) имеем три волны:

$$\begin{aligned} & \cos(2kz - \omega_1(2k,4)t), \\ & \cos(2kz + \omega_2(2k,4)t), \\ & \cos(2kz - (\omega_1(k,2) - \omega_2(k,2))t), \end{aligned}$$

резонансное взаимодействие между которыми не реализуется ни в плоскости $\{k, w\}$, ни в плоскости $\{k, We\}$.

Для осесимметричных вторичных волн ($M = 0$) и изначально заданной деформационной с $m = 2$ имеем:

$$\begin{aligned} & \cos(2kz - \omega_1(2k,0)t), \\ & \cos(2kz + \omega_2(2k,0)t), \\ & \cos(2kz - 2\omega_1(k,2)t); \end{aligned}$$

то есть резонансное взаимодействие реализуется (см. рис. 6).

Поверхность 1 соответствует комбинации частот:

$$\omega_1(2k,0) - 2\omega_1(k,2);$$

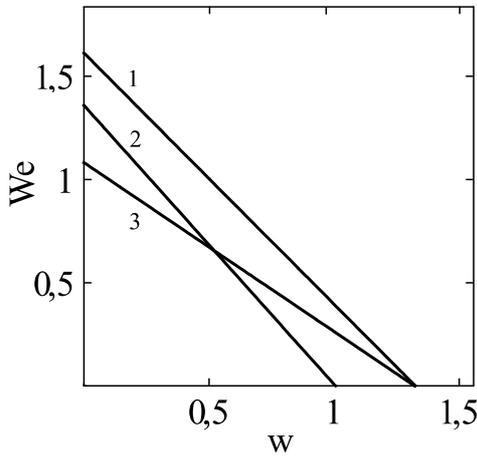


Рис. 7. Нейтральные линии для двух первичных и одной вторичной волн: линия 1 – $\omega_1(k_1 - k_2, m_1 + m_2) = 0$; линия 2 – $\omega_1(k_2, m_2) = 0$; линия 3 – $\omega_1(k_1, m_1) = 0$; рассчитано при $k_1 = 1,5, m_1 = 0, k_2 = 0,6, m_2 = 1, \rho_2 = 0,01$.

поверхность 3 – инкременту $Im\omega_1(2k, 0)$. Область $Im\omega_1(k, 2)$ лежит внутри $Im\omega_1(2k, 0)$.

Геометрическое место точек реальных резонансов в плоскости $\{k, w\}$ (рис. 6) состоит из двух отрезков, один из которых лежит в области малых, а второй в области больших значений волновых чисел.

Расчеты показывают, что в плоскости $\{k, We\}$ резонансное взаимодействие возможно в довольно широком диапазоне значений параметра We , но для очень незначительного диапазона волновых чисел (резонансная линия почти перпендикулярна оси k).

Таким образом, как следует из проведенного анализа, независимо от симметрии одиночной первичной волны резонансный обмен энергией вследствие нелинейного взаимодействия реализуется лишь для осесимметричных вторичных волн.

Рассмотрим ситуацию, когда в начальный момент времени возмущение поверхности струи определяется двумя различными волнами с волновыми числами k_1 и k_2 и азимутальной симметрией с азимутальными числами m_1 и m_2 соответственно. В линейном приближении по малому параметру ε это приведет к распространению по поверхности струи волн с частотами $\omega_1(k_j, m_j)$ и $\omega_2(k_j, m_j)$, ($j = 1, 2$). В результате нелинейного взаимодействия во втором порядке малости по ε будут возбуждаться волны с волновыми числами, равными сумме либо разности волновых чисел исходных волн $k_1 \pm k_2$ азимутальная симметрия которых будет определяться суммой или разностью азимутальных чисел начальных волн $m_1 \pm m_2$. Спектр частот вторичных волн будет весьма широким. Возможности нелинейного резонансного взаимодействия между вторичными волнами в

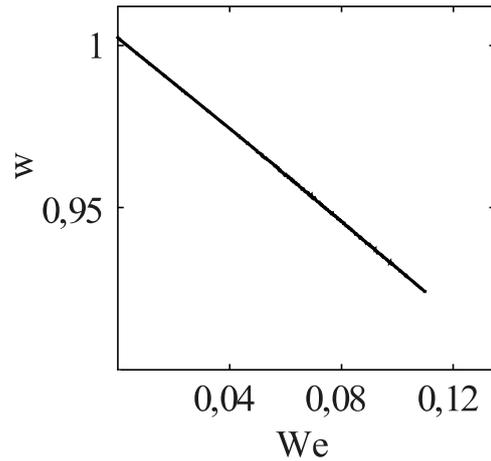


Рис. 8. Линия резонансного взаимодействия, определяемая соотношением: $\omega_1(k_1 - k_2, m_1 + m_2) - \omega_1(k_1, m_1) + \omega_1(k_2, m_2) = 0$. Рассчитано при тех же значениях волновых и азимутальных чисел, что и рис. 7.

данной ситуации также определяются обращением в ноль какой-либо комбинации их частот в области устойчивости всех волн, участвующих во взаимодействии. На рис. 7–8 представлены результаты расчетов для случая, когда начальная деформация струи определяется осесимметричной и изгибной волнами: $k_1 = 1,5, m_1 = 0, k_2 = 0,6, m_2 = 1$. Одна из волн, возникающих в результате нелинейного взаимодействия, будет иметь волновое и азимутальное числа, равные $k_1 - k_2 = 0,9$ и $m_1 + m_2 = 1$.

На рис. 7 в плоскости значения полевых w и скоростного We параметров изображены нейтральные линии, разделяющие области устойчивости и неустойчивости для каждой из трех вышеупомянутых волн. Общая для всех волн область устойчивости лежит ниже всех линий.

На рис. 8 показана линия резонансного взаимодействия, определяемая соотношением (при тех же значениях волновых и азимутальных чисел, что и на рис. 7):

$$\omega_1(k_1 - k_2, m_1 + m_2) - \omega_1(k_1, m_1) + \omega_1(k_2, m_2) = 0.$$

Сравнивая расположение этой линии с областью устойчивости, изображенной на рис. 7, несложно заметить, что она лежит в зоне устойчивости всех взаимодействующих волн. Следовательно, данное резонансное взаимодействие возможно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ возможности нелинейного резонансного взаимодействия волн различной симметрии на поверхности заряженной цилиндрической струи, движущейся относительно внешней диэлектрической среды, показал, что нелинейное взаимодействие первичных

волновых возмущений приводит к возбуждению целого спектра вторичных волн.

В случае начального возбуждения одной волны взаимодействие приводит к генерации вторичных, более коротких волн (с $K = 2k$), как осесимметричных ($M = 0$), так и неосесимметричных ($M > 0$). Между вторичными волнами возможно резонансное взаимодействие, приводящее к обмену энергией. Независимо от симметрии первичной волны, резонансный обмен энергией реализуется лишь для осесимметричных вторичных волн.

Если начальное возмущение поверхности струи определяется несколькими волнами различной симметрии, то спектр возникающих в результате нелинейного взаимодействия вторичных волн значительно шире и между ними реализуется резонансное взаимодействие, сопровождающееся обменом энергией как с осесимметричными, так и с неосесимметричными волнами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Филипс, О.М., Взаимодействие волн, В сборнике *Нелинейные волны*. М.: Мир, 1977, с. 197.
2. Аметистов, Е.В., Блаженков, В.В., Городов, А.К. и др. *Монодиспергирование вещества: принципы и применение*. Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
3. Ентов, В.М., Ярин, А.Л., Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей, *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа*, М.: ВИНТИ, 1984, т. 18, с. 112.
4. Eggers, J., Willermaux E., Physics of liquid jet. *Rep. Prog. Phys.*, 2008, vol. 71, art. ID 036601, p. 1.
5. Cloupeau, M., Prunet Foch B., Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes, *J. Electrostat.*, 1990, vol. 25, p. 165.
6. Shiryayeva, S.O., Grigor'ev, A.I., The semifenomenological classification of the modes of electrostatic dispersion of liquids, *J. Electrostat.*, 1995, vol. 34, p. 51.
7. Jaworek, A., Krupa, A., Classification of the Modes of EHD, *J. Aerosol Sci.*, 1999, vol. 30, no. 7, p. 873.
8. Левич, В.Г., *Физико-химическая гидродинамика*. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
9. Дразин, Ф., *Введение в теорию гидродинамической неустойчивости*. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
10. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986. 736 с.
11. Magarvey, R., Outhouse, L., Note on the breakup of charged liquid jet, *J. Fluid Mech.*, 1962, 13, no. 1, p. 151.
12. Huebner, A., Chu, H., Instability and breakup of charged liquid jets, *J. Fluid Mech.*, 1971, vol. 49, no. 2, p. 361.
13. Ширяева, С.О., Об изгибной неустойчивости объемно заряженной капиллярной струи диэлектрической жидкости, *ЖТФ.*, 2010, т. 80, № 4, с. 24.
14. Григорьев, А.И., Электростатическая неустойчивость сильно заряженной струи электропроводной жидкости, *ЖТФ.*, 2009, т. 79, № 4, с. 35.
15. Kim, O.V., Dunn, P.F., Control Production by in-flight Electro spraying, *Langmuir*, 2010, vol. 26, p. 15807.
16. Френкель, Я.И., К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме, *ЖЭТФ*, 1936, т. 6, № 4, с. 348.
17. Ламб, Г., *Гидродинамика*. М.-Л.: Огиз-Гостехиздат, 1947. 928 с.
18. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Теория поля*. М.: Наука, 1973. 504 с.
19. Найфе, А.Х., *Методы возмущений*. М.: Мир, 1976. 455 с.
20. Абрамовиц, М., Стиган И., *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 830 с.
21. Бреховских, Л.М., Гончаров, В.В., *Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн)*. М.: Наука, 1982. 336 с.

Summary

The problem of research of a nonlinear resonance between capillary waves on a surface of the charged jet at multimode initial deformation moving regarding the material environment is considered. It is shown in analytical asymptotic calculations of the second order on the dimensionless amplitude of oscillations that on a surface of a jet an internal nonlinear resonant interaction of capillary waves of any symmetry, both degenerate and secondary combinational, takes place. Positions of resonances depend on physical parameters of the system: the values of the coefficient of a surface tension and of the radial electric field at a surface of a jet, the velocity of its movement regarding the material environment, the values of the wave and azimuthal numbers of the interacting waves, a range of the waves defining initial deformation.

Keywords: jet, capillary waves, symmetry, nonlinearity, resonance interaction