

# Параметры электростатического распада заряженной капли, висящей в суперпозиции электростатического, гравитационного и аэродинамического полей

\*А. И. Григорьев, С. О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
г. Ярославль, 150000, Россия, \*e-mail: [grig@uniyar.ac.ru](mailto:grig@uniyar.ac.ru)

Поступила в редакцию 23.01.2020

После доработки 27.02.2020

Принята к публикации 03.03.2020

На основе принципа наименьшего рассеяния энергии в неравновесных процессах рассчитаны характерные размеры, заряды и значения параметра Рэлея капелек, образующихся при реализации электростатической неустойчивости родительской капли, висящей в грозовом облаке, в динамических условиях суперпозиции аэродинамического, электростатического и гравитационного полей. Найдено, что по сравнению с такими же характеристиками распада заряженной капли, неустойчивой по отношению к собственному заряду, в модельной ситуации неподвижной капли имеется целый ряд отличий: по количеству эмитированных дочерних капелек, по их размерам и зарядам, по тенденции изменения всех параметров с увеличением порядкового номера дочерней капельки. Установлено, что дочерние капельки изначально неустойчивы по отношению к находящемуся на них электрическому заряду и что степень их неустойчивости растет с увеличением порядкового номера.

*Ключевые слова:* заряженная капля, электрическое, гравитационное и аэродинамическое поля, электродиспергирование

УДК 544.018.2:544.344.-013-14-13:544.772

DOI: 10.5281/zenodo.4045834

## ВВЕДЕНИЕ

Явление электродиспергирования (полидиспергирования) жидкости при реализации неустойчивости ее заряженной поверхности в связи с многообразием академических, технических и технологических приложений неоднократно исследовалось как теоретически [1–7], так и экспериментально [6–14]. Проблема расчета параметров (размеров и зарядов дочерних капелек) электростатического распада сильно заряженной капли, незаряженной капли в сильном электрическом поле или заряженной капли в электрическом поле также многократно исследовалась и экспериментально [12–19], и теоретически [20–24]. В упомянутых экспериментальных исследованиях неустойчивость поверхности жидкости с ее диспергированием имела место в разнообразных внешних условиях: с поверхности капли, висящей в подвесе того-либо иного вида [12–18]; свободно падающей заряженной капли [10, 19, 25]; жидкого мениска на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему [7, 8, 22, 26–32].

В данном исследовании остановимся на расчете параметров распада заряженной капли, неподвижно висящей в грозовом облаке, в суперпозиции аэродинамического, электростатического и гравитационного полей. Общефизи-

ческая ситуация в такой задаче аналогична экспериментально исследованной в [14]: присутствуют и влияют на параметры распада все три поля: аэродинамическое, электростатическое и гравитационное, но ее теоретический анализ не проводился, хотя сама ситуация является весьма распространенной в природе.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В этом разделе опишем физическую модель явления, которую предполагается обсчитать.

Пусть первоначально сферическая капля несжимаемой электропроводной жидкости с коэффициентом межфазного натяжения  $\sigma$ , массовой плотностью  $\rho_1$ , имеющая радиус  $R$  и заряд  $Q$ , находящаяся в гравитационном поле  $\vec{g}$  и обдуваемая потоком воздуха со скоростью  $\vec{U}_0 \parallel -\vec{g}$ , была помещена в однородное электростатическое поле  $\vec{E}_0 \parallel \vec{g}$ . Заряд капли  $Q$  для определенности будем считать отрицательным, чтобы поле  $\vec{E}_0$  помогало аэродинамическому полю  $\vec{U}_0$  удерживать каплю в подвешенном состоянии.

Примем, что в указанных условиях исходная капля (в дальнейшем будем называть ее родительской) приобретает сфероидальную в линей-

ном приближении по величине своей стационарной деформации равновесную форму. Допустим, что в результате реализации электростатической неустойчивости такой капли она выбрасывает в направлении  $-\vec{E}_0 \parallel \vec{U}_0$  дочернюю капельку с зарядом  $q$  и начальным радиусом  $r$ , также имеющую в указанных условиях сфероидальную форму (с эксцентриситетом, отличным от эксцентриситета родительской капли), как это изображено на рис. 1.

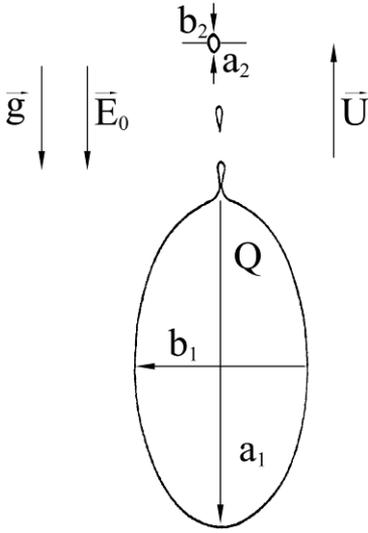


Рис. 1. Схема подвеса заряженной капли в грозовом облаке.

Отметим, что дочерняя капля выбрасывается с того конца родительской капли, на котором знак индукционного заряда совпадает со знаком собственного (в рассматриваемом случае), согласно вышесказанному, дочерняя капелька будет нести отрицательный заряд и выбрасываться в сторону, противоположную направлению поля сил тяжести, то есть вверх.

Эксцентриситет родительской капли обозначим как  $e_1$ :  $e_1 \equiv \sqrt{1 - (b_1/a_1)^2}$ , где  $b_1$  и  $a_1$  – меньшая и большая полуоси сфероидальной родительской капли, выражающиеся через радиус исходной сферической капли  $R$  и квадрат эксцентриситета  $e_1^2$  выражениями:

$$a_1 \equiv R / (1 - e_1^2)^{1/3}, \quad b_1 \equiv R (1 - e_1^2)^{1/6}.$$

Аналогично определяются соответствующие характеристики дочерней капельки:

$$e_2 \equiv \sqrt{1 - (b_2/a_2)^2}, \quad b_2 \equiv r (1 - e_2^2)^{1/6};$$

$$a_2 \equiv r / (1 - e_2^2)^{1/3}.$$

Предположение о сфероидальности родительской и дочерней капель основано на результатах работы [33], в которой оценивалась форма капли в электростатическом подвесе.

Диапазон размеров реальных облачных капель, к которым относятся нижеследующие рассуждения, от 3 до 30  $\mu\text{m}$ , в них содержится основная масса облачной воды [34, с. 131].

Следует отметить, что проблема электростатического распада сильно заряженной капли, а также заряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле на основе принципа наименьшей скорости рассеяния энергии в неравновесных процессах ранее рассматривалась в [23–24], но там все проделывалось в рамках весьма идеализированных моделей, неподвижных капель (заряженная капля в поле должна двигаться с ускорением), позиционирование которых не истолковывалось, а принималось по умолчанию. В данном рассмотрении заряженная капля находится в динамическом состоянии под действием электростатических, гравитационных и аэродинамических сил.

Силу, действующую на каплю со стороны потока воздуха в облаке, в проводимом оценочном (качественном) расчете будем вычислять по формуле Стокса.

Условие неподвижности родительской капли в суперпозиции аэродинамического, электростатического и гравитационного полей запишем в виде:

$$Q \times \vec{E}_0 + 6\pi R \mu_2 \vec{U}_0 = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_1 \times \vec{g}, \quad (1)$$

где  $\mu_2$  – коэффициент динамической вязкости среды (воздуха).

Спроецируем соотношение (1) на направление  $\vec{E}_0$  и в терминах безразмерных параметров Рэлея ( $W \equiv Q^2 / 16\pi R^3 \sigma$ ) [1, 23, 33] и Тейлора ( $w \equiv RE_0^2 / 16\pi \sigma$ ) [5, 23, 33], характеризующих электростатическую устойчивость поверхности капли по отношению к собственному  $Q$  и индуцированным внешним полем  $\vec{E}_0$  зарядом, соответственно получим условие неподвижности родительской капли в виде:

$$\sqrt{w \times W} + \frac{3}{8} \gamma - \frac{1}{12} \eta = 0; \quad \gamma \equiv \mu_2 \times U_0 / \sigma;$$

$$\eta \equiv \rho_1 g R^2 / \sigma. \quad (1a)$$

При эмиссии дочерней капельки свободная энергия системы изменяется. Принимая, что температура системы остается неизменной, а также сохраняются полный объем и электрический заряд жидкой фазы, для изменения энергии системы можно записать:

$$\Delta F \equiv F_f - F_{in} \equiv 4\pi r^2 \sigma \left[ A_2 - \frac{2rA_1}{3R} \right] +$$

$$+ B_2 \frac{q^2}{2r} - B_1 \frac{(Q-q) \times q}{2R} - \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
& +K \frac{(Q-q)q}{R} - E_0 R \times q \times \varphi_e(\zeta) + \\
& + \frac{2\pi r^3 \rho_1 U^2}{3} + \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_1 g \times L; \\
\varphi_e(\zeta) & \equiv \frac{\zeta \times \text{Arth} \left( e_1 \frac{\zeta-1}{\zeta-e_1^2} \right) - e_1(\zeta-1)}{(\text{Arth } e_1 - e_1) \times (1-e_1^2)^{1/3}}; \\
K & \equiv \frac{(1-e_1^2)^{1/3} \text{Arth} \left( \frac{e_1}{\zeta} \right)}{e_1}; \\
A_i & \equiv \frac{1}{2} \left( (1-e_i^2)^{1/2} + e_i^{-1} \times \text{Arcsin } e_i \right) \frac{1}{(1-e_i^2)^{1/6}}; \\
B_i & \equiv \frac{(1-e_i^2)^{1/3}}{e_i} \times \text{Arth}(e_i).
\end{aligned}$$

В (2)  $E_0 R \cdot \varphi_e(\zeta)$  – электростатический потенциал незаряженной родительской капли во внешнем однородном электростатическом поле  $\vec{E}_0$ , в центре маленькой капельки, записанный с помощью  $\zeta = (1 + \xi/a_2^2)^{1/2}$  – безразмерного расстояния между каплями в момент разрыва контакта между ними (поверхности родительской капли соответствует  $\xi = 0$  или  $\zeta = 1$ );  $L$  – размерное расстояние между вершиной родительской капли и центром дочерней в момент ее отрыва;  $F_{in}$  и  $F_f$  – начальное и конечное значения потенциальной энергии системы.

Выражение для  $\varphi_e(\zeta)$  выписано на основе аналитического выражения для потенциала зарядов, индуцированных однородным внешним электростатическим полем  $\vec{E}_0$ , в родительской капле, записанного в сферических координатах ([35, с. 48, задача 5]), и выражения для разности гиперболических арктангенсов ([36, с. 284]), а также с учетом того обстоятельства, что вертикальная координата отсчитывается в направлении, противоположном  $\vec{E}_0$ .

В (2) первое слагаемое определяет изменение свободной энергии сил поверхностного натяжения системы при эмиссии одной капельки; второе и третье – изменение собственной электростатической энергии системы: с учетом зарядов дочерней и родительской капелек (второе – появление собственной электростатической энергии заряда дочерней капельки, третье – изменение собственной электростатической энергии заряда родительской капли);

четвертое дает изменение энергии электростатического взаимодействия заряда дочерней капельки с остатком заряда родительской капли; пятое – появление энергии электростатического взаимодействия заряда дочерней капельки с электрическим полем зарядов, индуцированных в родительской капле полем  $\vec{E}_0$  (знак «минус» перед этим слагаемым отмечает тот факт, что заряд дочерней капельки отрицателен); шестое – появление кинетической энергии дочерней капельки, приобретенной в потоке воздуха (родительская капля, предположительно, неподвижна относительно земли, а дочерняя, имеющая размеры порядка десятых долей  $\mu\text{m}$  и меньше [23], практически неподвижна относительно потока воздуха [34, с. 260]); последнее слагаемое показывает изменение потенциальной энергии дочерней капельки в гравитационном поле.

Введем отношение заряда дочерней капельки к заряду родительской  $Y \equiv (q/Q)$  и получим безразмерный заряд дочерней капельки, то же самое сделаем для радиуса:  $X \equiv (r/R)$  и получим ее характерный радиус, обезразмеренный на радиус родительской капли. Как показывают аналогичные расчеты для распадающейся сильно заряженной капли [23–24] эти величины будут весьма малыми параметрами, много меньшими единицы. Причем  $X$  и  $Y$  будут различны. Выражение (2) справедливо лишь в квадратичном приближении по  $X$  и  $Y$ , а также по их произведению. Выписывать изменение свободной энергии системы с большей точностью не имеет смысла ввиду малости соответствующих слагаемых и во избежание излишней громоздкости используемых соотношений.

Перепишем (2) с учетом введенных малых параметров, а также безразмерных параметров  $w$  и  $W$ , характеризующих электростатическую устойчивость родительской капли по отношению к величине напряженности внешнего электростатического поля и величине собственного заряда:

$$\begin{aligned}
\Delta F & \equiv X^2 \left[ A_2 - \frac{2}{3} X \times A_1 \right] + 2W \times \\
& \times B_2 \frac{Y^2}{X} - 2W \times B_1 (1-Y) \times Y + \\
& + 4W \times K (1-Y) Y - 4\sqrt{w \times W} \times \varphi_e(\zeta) \times \\
& \times Y + \left( \frac{1}{6} \text{We} + \frac{1}{3} \eta \times \Lambda \right) X^3; \quad (2a) \\
\text{We} & \equiv \frac{R \rho_1 \cdot U^2}{\sigma}; \quad \Lambda \equiv \frac{L}{R} \equiv \frac{a_1(\zeta-1)}{R} \equiv \frac{(\zeta-1)}{(1-e_1^2)^{1/3}},
\end{aligned}$$

We – параметр Вебера;  $\Lambda$  – безразмерное расстояние между вершиной родительской капли

(от которой отрывается дочерняя) и центром дочерней капельки.

Изменение энергии системы (2) (или (2a)) связано с появлением новой поверхности в связи с эмиссией дочерней капельки, то есть с изменением величины потенциальной энергии сил поверхностного натяжения, потенциальной энергии дочерней капельки в поле сил тяжести, приобретением ею кинетической энергии, которое можно выразить через радиус дочерней капельки  $r$ , а также с изменением потенциальной энергии электрического поля, выражающимся через ее заряд  $q$ . Потребуем, чтобы в силу принципа наименьшей скорости рассеяния энергии это изменение было экстремальным [23, 37–38], то есть чтобы выполнялись условия  $\partial(\Delta F)/\partial r = 0$  (или  $\partial(\Delta F)/\partial X = 0$ , что, то же самое) и  $\partial(\Delta F)/\partial q = 0$  (или  $\partial(\Delta F)/\partial Y = 0$ ), из которых несложно получить уравнения для нахождения  $r$  (или  $X$ ) и  $q$  (или  $Y$ ):

$$\left\{ A_2 - A_1 \times X - B_2 W \times \frac{Y^2}{X^3} - \left[ \frac{1}{4} W e_1 \eta \times \frac{(\zeta - 1)}{2(1 - e_1^2)^{1/3}} \right] \times X \right\} = 0; \quad (3)$$

$$\left\{ B_2 W \times \frac{Y}{X} - B_1 W \times \frac{(1 - 2Y)}{2} + K W (1 - 2Y) - \sqrt{w W} \varphi_e \right\} = 0. \quad (4)$$

Примем, что отрыв дочерней капельки от родительской происходит с вершины выступа, вырастающего на вершине родительской капли вдоль  $\vec{E}_0$  при развитии в ней неустойчивости. При этом под действием электростатического взаимодействия заряда вершины выступа и электростатического поля родительской капли вершина выступа вместе с находящимся на ней зарядом отрывается (см. [35, с. 55, задача 1]). Это произойдет, как только сумма электрической силы отталкивания и силы Стокса взаимодействия дочерней капли с потоком воздуха превысит сумму сил поверхностного натяжения в наиболее узком месте перетяжки  $2\pi r_* \sigma$  и силы тяжести дочерней капли, удерживающих вершину выступа ( $r_*$  – радиус перетяжки, связывающей капли, в наиболее узком месте).

Следует отметить, что форма перетяжки, связывающей родительскую и дочернюю капельки, должна быть весьма близка к катеноиду, чтобы обеспечить минимальность свободной энергии [39, с. 338, задача 1]. При фиксированных линейных размерах родительской и дочерней капелек должен существовать минимальный радиус перетяжки  $r_*$ , при котором будет иметь место равенство между лапласовской силой в перетяжке  $2\pi r_* \sigma$  и весом дочерней капельки  $mg$ , удерживающими капли

вместе, и суммой силы электрического отталкивания родительской и дочерней капелек и силы Стокса, действующей на дочернюю капельку со стороны потока воздуха,  $6\pi b_2 \mu U_0$ , разрывающими контакт:

$$2\pi r_* \sigma + \frac{4}{3} \pi r_*^3 \rho g = E \times q + 6\pi b_2 \mu U_0. \quad (5)$$

Здесь  $E$  – напряженность поля суперпозиции собственного заряда родительской капли и индуцированного в ней внешним однородным электростатическим полем в месте нахождения маленькой капельки;  $b_2$  играет роль характерного линейного поперечного размера отрывающейся капельки. Отметим, что первое слагаемое справа, определяющее электростатическую силу, отрывающую дочернюю капельку, рассчитываем на основе решения, аналогичного приведенному в [35, с. 53, задача 1].

Для того чтобы найти заряд дочерней капельки, зададимся моделью ее отрыва от родительской капли. Как отмечалось выше, дочерняя капелька отрывается от вершины выступа, вырастающего на ориентированной вверх вершине родительской капли (где плотность поверхностного заряда максимальна), при реализации в ней электростатической неустойчивости. Форму неравновесного выступа для проводимого оценочного анализа будем принимать цилиндрической и моделировать полусфероидом, вытянутым по полю, для удобства аналитических расчетов (точная форма выступа для проводимых рассуждений не существенна). На выступе в силу его большой кривизны будет скапливаться заряд, взаимодействующий с электростатическим полем родительской капли. При некоторой длине выступа, при увеличении силы его отталкивания от родительской капли часть его оторвется и сформирует дочернюю капельку. Другими словами, первоначально цилиндрический выступ, оторвавшись, под действием капиллярных сил будет стягиваться в капельку, несущую заряд, который был на оторвавшейся части выступа.

Выражение (5) представляет собой уравнение для определения параметра  $\zeta$ , характеризующего расстояние между каплями в момент разрыва перетяжки. В безразмерной форме (5) имеет вид:

$$X \frac{\alpha}{8} + X^3 \frac{\eta}{12} = Y \frac{(1 - e_1^2)^{2/3}}{\zeta^2} \quad (5a)$$

$$\left\{ W \varphi_q + \sqrt{w W} \frac{\varphi_e}{(1 - e_1^2)^{1/3}} \right\} + \frac{3\gamma}{8} (1 - e_2^2)^{1/6};$$

$$\varphi_q \equiv \frac{\text{Arth} \left( e_1 \frac{\zeta - 1}{\zeta - e_1^2} \right)}{\text{Arth} e_1};$$

$$\varphi_e \equiv \frac{\zeta \times \text{Arth} \left( e_1 \frac{\zeta - 1}{\zeta - e_1^2} \right) - e_1(\zeta - 1)}{(\text{Arth} e_1 - e_1) \times (1 - e_1^2)^{1/3}}; \alpha \equiv \frac{r_*}{r}.$$

Решая систему уравнений (3)–(4), (5a), можно найти размеры и заряды эмитированных капелек в зависимости от величины скорости восходящего потока воздуха, в [23, 38]. Что касается условия подвешивания родительской капли в грозном облаке (1a), то не следует требовать выполнения в нем равенства нулю. При строгом выполнении равенства (1a) капля будет неподвижна. Но реальное облако является динамической системой: в малой окрестности любой капли непрерывно меняются напряженность внешнего электрического поля и скорость обдувающего ее потока воздуха, меняется и собственный заряд капли в результате многочисленных элементарных процессов заряжения облачных капель, протекающих в грозном облаке (см., например, [40, глава 10, с. 426–460] или [41]). Но скорость движения родительской капли в облаке будем принимать незначительной, порядка десятков сантиметров в секунду.

Предварительные расчеты показали, что размеры и заряды эмитированных капелек в условиях капли, висящей в грозном облаке, примерно на два порядка меньше, чем ранее получалось в модельных расчетах для неподвижной заряженной капли в [23, 42].

Результаты численных расчетов по (3)–(4), (5a) при  $\sigma = 77 \text{ g/s}^2$ ,  $\mu_2 = 1,6 \times 10^{-4} \text{ g/s}\cdot\text{cm}$ ,  $R = 30 \text{ }\mu\text{m}$ ,  $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$ ,  $U_0 = 100 \text{ cm/s}$ ,  $Q = 10^{-2} \text{ CGSE}$ ,  $E_0 = 3 \text{ CGSE}$  представлены на рис. 2–3. На этих рисунках в зависимости от порядкового номера эмитированной дочерней капельки  $n$  приведены расчетные значения ее безразмерных характеристик: для равновеликого радиуса  $X_* \equiv (X - 0,000678) \times 10^7$ , заряда  $Y_* \equiv (Y - 0,000019) \times 10^6$ , расстояния  $\zeta_* \equiv (\zeta - 2,116) \times 10^2$ , параметра Рэлея  $W_d$ , а также размерных радиуса  $R_* \equiv (R - 0,0029999 \text{ cm}) \times 10^9$  и заряда  $Q_* \equiv (Q - 0,0088 \text{ CGSE}) \times 10^4$  остатка родительской капли. Эти величины отложены по оси ординат на рис. 2–3 ввиду малости изменений соответствующих параметров для двух последовательно эмитированных дочерних капелек. Например, по рис. 2 можно определить истинный радиус дочерней капельки по соотно-

шению  $X_* \equiv (X - 0,000678) \times 10^7$  как:  $X \equiv 10^{-7} \times X_* + 0,000678$ .

Видно, что с увеличением  $n$  характерный линейный размер  $X_*$  уменьшается, а  $Y_*$ ,  $\zeta_*$  и  $W_d$  увеличиваются. Бросается в глаза еще одно различие между модельными расчетами параметров распада для заряженной капли [23, 42] и для условий грозного облака: это различие в количестве эмитированных дочерних капелек – для заряженной капли были две сотни [23, 42], а в настоящем расчете – уже несколько тысяч.

Параметр Рэлея дочерней капельки  $W_d$ , выраженный через безразмерные величины  $W$ ,  $X$  и  $Y$ , имеет вид:

$$W_d \equiv W \times Y^2 / X^3, \quad (6)$$

где  $W$  – параметр Рэлея родительской капли. Рост  $W_d$  с увеличением  $n$  объясняется убыванием знаменателя и ростом числителя в (6).

То обстоятельство, что  $W_d$  больше единицы (больше критического значения по Рэлею [1]) и растет с увеличением порядкового номера, нуждается в комментарии.

Напомним еще раз, что в силу значительной вариативности внутриоблачной обстановки [34, 40] проведенные расчеты являются качественными, справедливыми лишь по порядку величины.

## ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ ЭМИТИРОВАННОЙ КАПЕЛЬКИ

Изолированная заряженная зарядом  $q$  сферическая капелька радиусом  $r$  обладает свободной энергией  $F$ , представляющей собой сумму энергии сил поверхностного натяжения и собственной энергии электрического заряда:

$$F = 4\pi r^2 \sigma + \frac{q^2}{2r}.$$

Экстремум потенциальной энергии такой капельки будет иметь место при

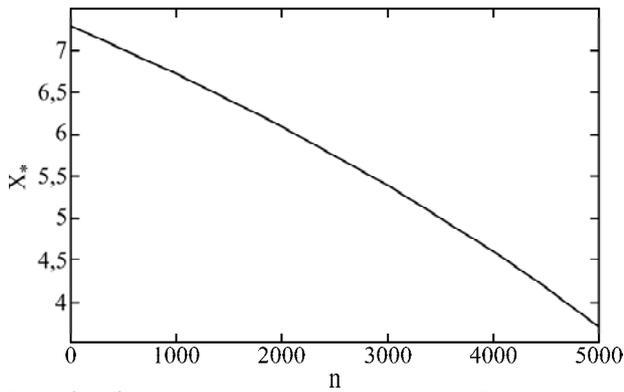
$$\frac{\partial F}{\partial r} = 8\pi r \sigma - \frac{q^2}{2r^2} = 0$$

или при

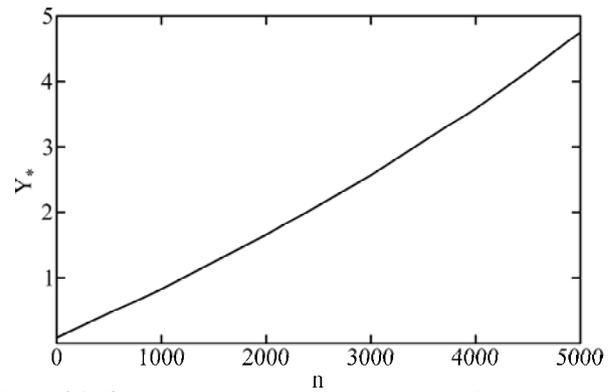
$$\frac{q^2}{16\pi\sigma r^3} \equiv W_* = 1,$$

то есть когда капелька находится на пороге электростатической устойчивости по Рэлею [1].

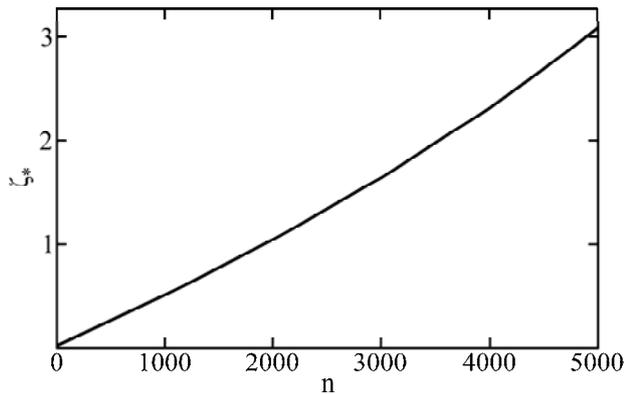
Если взять от  $F$  вторую производную по  $r$ , то получим, что  $(\partial^2 F / \partial r^2) > 0$ . Иначе говоря, экстремуму  $F$  соответствует минимум, и наличие на дочерней капельке предельного по Рэлею



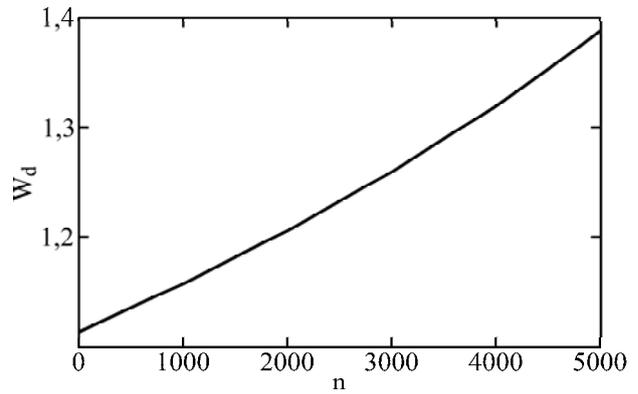
**Рис. 2а.** Зависимость характеристики  $X_*$  безразмерного радиуса дочерней капельки от порядкового номера  $n$  акта эмиссии.



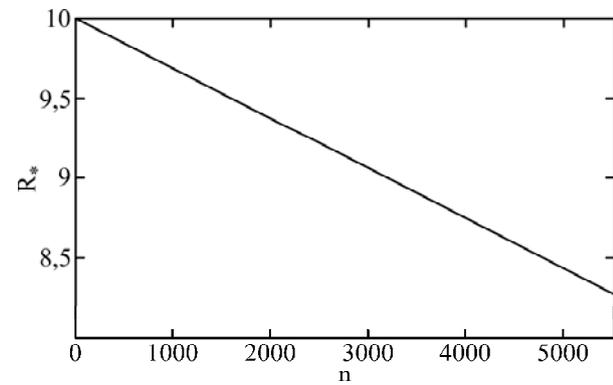
**Рис. 2б.** Зависимость характеристики  $Y_*$  безразмерного заряда дочерней капельки от порядкового номера  $n$  акта эмиссии.



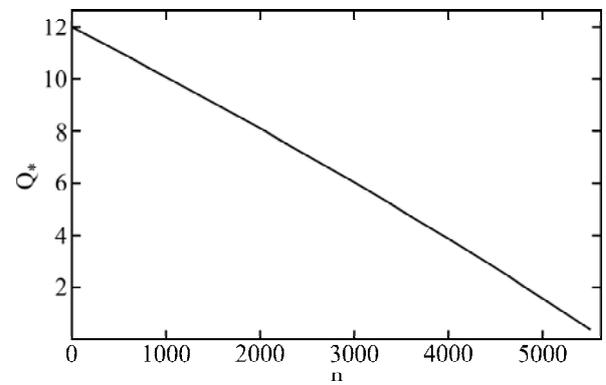
**Рис. 2в.** Зависимость характеристики  $\zeta_*$  безразмерного расстояния, характеризующего положение дочерней капельки, от порядкового номера  $n$  акта эмиссии.



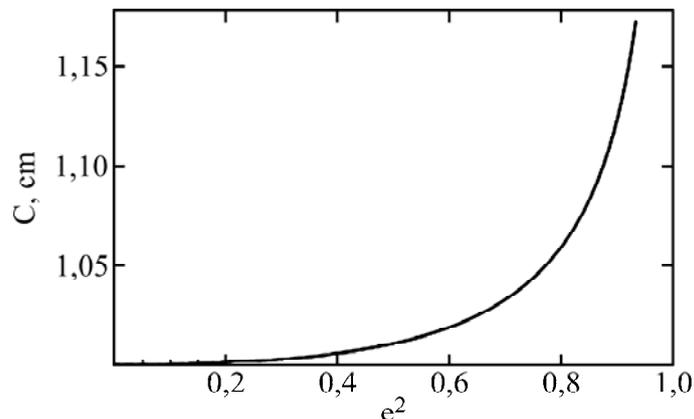
**Рис. 2г.** Зависимость параметра Рэля дочерней капельки  $W_d$  от порядкового номера  $n$  акта эмиссии.



**Рис. 3а.** Зависимость характеристики размерного радиуса  $R_*$  остатка родительской капли от порядкового номера  $n$  акта эмиссии. Радиус измеряется в см.



**Рис. 3б.** Зависимость характеристики размерного заряда  $Q_*$  остатка родительской капли от порядкового номера  $n$  акта эмиссии. Заряд измеряется в CGSE.



**Рис. 4.** Зависимость емкости сфероида от квадрата его эксцентриситета.

(для данного радиуса) заряда наиболее выгодно с термодинамической точки зрения.

Естественно задаться вопросом: как изменится заряд капли, если в месте ее нахождения создано электростатическое поле. Такой вопрос целесообразен, поскольку при электродиспергировании родительской капли (или жидкости с торца капилляра, по которому она подается в разрядную систему [23]), дочерние капельки формируются в электростатическом поле родительской (или в электростатическом поле разрядной системы). Итак, пусть та же капелька находится в однородном (в пределах капельки) электростатическом поле с напряженностью  $E$ . Полная потенциальная энергия капельки  $F_*$  в этом случае запишется в виде:

$$F_* = 4\pi r^2 \sigma + \frac{q^2}{2r} + \frac{E^2}{2} \left( \frac{r^3}{3} + C \right) + q\phi_*.$$

В этом соотношении  $C$  – константа, зависящая от геометрии пространства, занятого электростатическим полем;  $\phi_*$  – полный потенциал электростатического поля, в котором находится капля. Поскольку мы проводим качественный анализ, то сфероидальной деформацией поверхности капли пренебрежем ввиду ее малости.

Находя первую производную от  $F_*$  по  $r$  и приравнявая ее, как и выше, нулю, можно получить условие экстремального (минимального, как и раньше) значения параметра Рэлея для дочерней капельки в виде:

$$W_* = 1 + \frac{E^2 r}{16\pi\sigma} \equiv 1 + w$$

безразмерный параметр  $w$  характеризует устойчивость капли по отношению к индукционному заряду [5, 23]. Так же как и в случае изолированной заряженной сферической капельки, получаем, что минимуму потенциальной энергии системы соответствует значение параметра Рэлея  $W_+$ , большее единицы и, следовательно, запрещенное в смысле электростатической устойчивости по отношению к собственному заряду (нижний индекс «звездочка» поставлен, чтобы отличать изолированную каплю от капельки в электростатическом поле). Несложно видеть, что учет сфероидальности капельки во внешнем электростатическом поле в качественном отношении ничего не изменит.

Рассмотрим более общую ситуацию, описанную при постановке задачи о распаде заряженной капли, неподвижной в грозовом облаке, в суперпозиции аэродинамического, электростатического и гравитационного полей. Другими словами, рассмотрим ситуацию, когда

дочерняя капелька формируется при наличии дополнительно к электростатическому полю гравитационного и аэродинамического. В этом случае изменение потенциальной энергии системы при эмиссии дочерней капельки  $\Delta F_+$  будет:

$$\Delta F_+ = 4\pi r^2 \sigma + \frac{q^2}{2r} + \frac{E^2}{2} \left( \frac{r^3}{3} + C \right) + q\phi_+ + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1 (2U^2 + gL).$$

$\phi_+$  – полный потенциал электростатического поля, в котором находится капелька. Найдем первую производную от  $\Delta F_+$  по  $r$ , приравняем ее нулю и получим условие для нахождения минимального значения параметра Рэлея для дочерней капельки в виде:

$$W_* = 1 + w + \left( We + \frac{1}{2}\eta\Lambda \right) X.$$

Несложно видеть, что и в этом случае минимуму потенциальной энергии системы соответствует значение параметра Рэлея дочерней капельки  $W_+$ , большее единицы.

К такому же выводу можно прийти, анализируя принятую модель отрыва капельки. В самом деле, по принятой модели отрывающийся выступ первоначально имеет полусфероидальную форму и на нем собирается заряд, определяющийся его электроемкостью, которая растет с увеличением эксцентриситета сфероида (см. рис. 4). После отрыва выступа, он под действием капиллярных сил стягивается в каплю, а ее эксцентриситет уменьшается, и заряд становится для образовавшейся капли закритическим.

Из сравнения всех рассмотренных ситуаций следует, что дочерняя капелька несет заряд, больший предельного в смысле электростатической устойчивости по отношению к собственному заряду, и спустя некоторое время, порядка характерного времени реализации электростатической устойчивости, распадется. Поскольку дочерние капельки будут весьма малы, то наиболее вероятными каналами перехода в устойчивое состояние будет полевая эмиссия заряда или деление на части сравнимых размеров [43].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы закономерности электростатического распада облачной капли, висящей в суперпозиции электрического, гравитационного и аэродинамического полей. Показано, что в отличие от распада сильно заряженной капли в рассматриваемой ситуации эмитированные

капельки имеют существенно меньшие размеры и заряды, а их количество много больше. Показано также, что эмитированные капельки неустойчивы в смысле реализации электростатической неустойчивости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh (Strutt J.W.) *Phil Mag.* 1882, **14**, 184–186.
2. Tonks L. *Phys Rev.* 1935, **48**, 562–568.
3. Френкель Я.И. *ЖЭТФ.* 1936, **6**(4), 348–350.
4. Hendrics C.D., Schneider J.M. *J Amer Phys.* 1963, **1**(6), 450–453.
5. Taylor G.I. *Proc Roy Soc. London*, 1964, **A280**, 383–397.
6. Dawson G.A. *J Geophys Res.* 1970, **75**(3), 701–705.
7. Brazier-Smith P.R. *J Roy Met Soc.* 1972, **98**, 434–441.
8. Zeleny J. *Proceeding of the Cambridge Philosophical Society.* 1914, **18**(Part 1), 71–83.
9. Zeleny J. *Phys Rev.* 1917, **10**(1), 1–6.
10. Macky W.A. *Proc Roy Soc. London*, 1931, **133**(A822), 565–587.
11. Drozin V.G. *J Coll Science.* 1955, **10**(2), 158–164.
12. Abbas M.A., Latham J. *J Fluid Mech.* 1967, **30**(4), 663–670.
13. Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B. *J Coll Sci.* 1964, **19**, 136–143.
14. Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U. *J Atmosph Sci.* 1970, **27**(11), 1173–1181.
15. Duft D., Lebbeus H., Huber B.A. *Phys Rev Lett.* 2002, **89**(8), 1–4.
16. Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al. *Nature.* 2003, **421**, P. 128.
17. Fong Chee Sheng, Black N.D., Kiefer P.A., Shaw R.A. *Am J Phys.* 2007, **75**(6), 499–503.
18. Hunter H.C., Ray Asit K. *Phys Chem Chem Phys.* 2009, **11**(29), 6156–6165.
19. Latham J., Myers V. *J Geophys Res.* 1970, **75**(3), 701–705.
20. Roth D.S., Kelly A.J. *IEEE Trans Ind Applications.* 1983, **IA-19**(5), 771–775.
21. Elghazaly H.M.A., Castle G.S.P. *IEEE Trans Ind Applications.* 1987, **IA-23**(1), 108–113.
22. Галль Л.Н., Краснов Н.В. и др. *ЖТФ.* 1984, **54**(8), 1559–1571.
23. Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O. *J Aerosol Sci.* 1994, **25**(6), 1079–1091.
24. Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. *ЖТФ.* 1999, **69**(12), 26–30.
25. Kim O.V., Dunn P.F. *Langmuir.* 2010, **26**, 15807–15813.
26. Коженков В.И., Фукс Н.А. *Успехи химии.* 1976, **45**(12), 2274–2284.
27. Fenn J.B., Mann M., Meng C.K. et al. *Science.* 1989, **246**(4926), 64–71.
28. Габович М.Д. *УФН.* 1983, **140**(1), 137–151.
29. Cloupeau M., Prunet Foch V. *J Aerosol Sci.* 1994, **25**(6), 1021–1035.
30. Baily A.G. *Sci Prog., Oxf.* 1974, **61**, 555–581.
31. Verdoolda S., Agostinhoc L.L.F., Yurterib C.U., Marijnissenb J.C.M. *Journal of Aerosol Science.* 2014, **67**, 87–103.
32. Inyong Park, Sang Bok Kim, Won Seok Hong, Sang Soo Kim. *J Aerosol Sci.* 2015, **89**, 26–30.
33. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. *ЖТФ.* 1989, **59**(6), 27–34.
34. Мазин И.П., Шметер С.М. *Облака. Строение и физика образования.* Л.: Гидрометеиздат, 1983. 280 с.
35. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1982. 620 с.
36. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.* М.: Наука, 1980. 976 с.
37. Базаров И.П., Геворкян Э.В., Николаев П.Н. *Неравновесная термодинамика и физическая кинетика.* М.: Изд. МГУ, 1989. 240 с.
38. Ширяева С.О., Григорьев А.И. *ЖТФ.* 1995, **65**(2), 11–21.
39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика.* М.: Наука, 1982. 620 с.
40. Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. *Облака и облачная атмосфера.* Справочник. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
41. Мучник В.М., Фишман Б.Е. *Электризация грубодисперсных аэрозолей в атмосфере.* Л.: Гидрометеиздат, 1982. 208 с.
42. Григорьев А.И., Ширяева С.О. *ЖТФ.* 1991, **61**(3), 19–28.
43. Григорьев А.И. *ЖТФ.* 2001, **71**(10), 1–7.

#### Summary

On the base of the principle of the minimal energy dissipation rate in nonequilibrium processes, the characteristic sizes, charges, and values of the Rayleigh parameter of daughter droplets formed at realization of electrostatic instability of the parental drop hanging in a storm cloud under dynamic conditions of superposition gravitational, aerodynamic, and electrostatic fields are calculated. It is found that in comparison with the same characteristics of disintegration of the charged drop unstable in relation to their own charges, in a model situation of a motionless drop, there is a number of differences: in the quantity of the emitted daughter droplets, in their sizes and charges, in a trend of change of all parameters with an increase in the serial number of a daughter droplet. It is found that those droplets are initially unstable in relation to the electric charge on them, and that the degree of their instability grows with an increase in the serial number.

*Keywords:* charged drop, electric, gravitationa and aerodynamic fields, electrodispersion