

## ЛИТЕРАТУРА

1. Картошкин П.Б., Миротворский В.О., Стишков Ю.К. Нелинейный оптико-электрогидродинамический эффект в жидких диэлектриках // Вестник С.-Петербургского ун-та, Сер. 4. 1994. Вып. 4. С. 10–16.
2. Картошкин П.Б., Миротворский В.О., Стишков Ю.К. Нелинейный оптико-электрогидродинамический эффект в жидких диэлектриках // Электронная обработка материалов. 1995. № 2.
3. Сухоруков А.П. Дифракция световых пучков в нелинейных средах. Соросовский образовательный журнал, 1996, 5. С. 85–92.
4. Stishkov Y.K. Space charge influence on non-linear beam defocusing. 1998 Annual Report Conference on Electrical Insulation and Dielectric Phenomena. Atlanta, OMNIPRESS USA. Vol. I. P. 170–174.
5. Labjwski M., Skrodzaka E. Theoretical and Experimental evaluations of electric field effect on the ultrasonic wave velocity in carbon tetrachloride // Acustica. 1989. V. 68. № 1. P. 26–32.
6. Скрышевский А.Ф. Структурный анализ жидкостей и аморфных тел // М., 1980.
7. Полторак О.М. Термодинамика в физической химии. М., 1991.
8. Антропов Л.И. Теоретическая электрохимия. М., 1969.
9. Чижик В.И. Ядерная магнитная релаксация / Уч. пособие. Л., 1991.
10. Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкостей. Л., 1975.

Поступила 20.01.2000

### Summary

A new method of investigation for high voltage processes in liquid dielectrics by means of non linear optical effect is established. Non linear optical effect suggests warm defocusing of laser beam, passing through the area of liquid dielectric, which is located in strong electrical field. Two cases are described in the paper: in first case electrohydrodynamic currents are defining processes, which appear in liquid under high voltage. In the second case, the change of the defocusing level of the laser beam is a consequence of structurization-by-the-space-charge of ions. Ions are forming cloud of electrical space charge. Described method has high sensitivity and allows to identify the edge of EHD-currents formation. The paper describes results of computer processing of video raw for non linear optico electrohydrodynamic effect.

---

С.О. Ширяева, Ю.Б. Кузьмичев, А.С. Голованов, Д.Ф. Белоножко

## ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КЕЛЬВИНА-ГЕЛЬМГОЛЬЦА ПРИ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЕ ВЕРХНЕЙ СРЕДЫ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца заряженной границы раздела двух идеальных несмешивающихся жидкостей различных плотностей, каждая из которых заполняет полубесконечное пространство, а верхняя жидкость движется с постоянной скоростью  $U$  параллельно границе раздела, представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в технической физике и химической технологии [1–8] и в этой связи достаточно подробно

---

© Ширяева С.О., Кузьмичев Ю.Б., Голованов А.С., Белоножко Д.Ф., Электронная обработка материалов, 2000, № 2, С. 25–33.

исследована как экспериментально, так и теоретически. Тем не менее, некоторые вопросы, связанные с особенностями реализации такой неустойчивости, остаются пока не выясненными. Сказанное, в частности, относится к ситуации, когда в отличие от классической идеализированной схемы верхняя жидкость имеет конечную толщину, то есть к ситуации, приближенной к реальным условиям. Не понятно, как критические условия реализации неустойчивости и длина наиболее неустойчивой моды будут зависеть от толщины слоя верхней жидкости. Этой проблеме и посвящено настоящее исследование.

1. Рассмотрим простейшую модель идеальных несжимаемых жидкостей, когда верхняя диэлектрическая жидкость имеет толщину  $h$  и плотность  $\rho_1$ , а нижняя с плотностью  $\rho_2$  заполняет в поле сил тяжести  $\vec{g}$  ( $\vec{g} \parallel -\vec{n}_z$ , а  $\vec{n}_z$  есть орт декартовой оси, перпендикулярной границе раздела) полубесконечное пространство  $z < 0$ . Примем, что на невозмущенной капиллярным движением границе раздела имеется электрический заряд с плотностью  $\sigma$ .

Эволюция капиллярных волн в такой системе может быть определена как решение задачи для гармонических потенциалов поля скоростей движения в верхней  $\psi_1$  и нижней  $\psi_2$  жидкостях в декартовой системе координат, плоскость XOY которой совпадает с невозмущенной границей раздела верхней и нижней сред:

$$\Delta\psi_i = 0; \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

С граничными условиями:

$$z = h: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \approx U \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\rho_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \rho_1 g \zeta + \frac{1}{2} \rho_1 (\nabla\psi_1)^2 - \alpha_1 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} = 0; \quad (3)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \approx U \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}; \quad (4)$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial z} \approx \frac{\partial\xi}{\partial t}; \quad (5)$$

$$\rho_1 \left[ \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + g\xi + \frac{1}{2} (\nabla\psi_1)^2 \right] = \rho_2 \left[ \frac{\partial\psi_2}{\partial t} + g\xi \right] + P_\sigma - \alpha_2 \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Здесь  $\zeta(x, t)$  – возмущение свободной поверхности верхнего слоя;  $\xi(x, t)$  – возмущение границы раздела сред, связанное с капиллярным волновым движением;  $\vec{U}$  – постоянная скорость движения верхней жидкости относительно нижней, направление которой определит ориентацию оси OX;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – коэффициенты поверхностного натяжения свободной поверхности и границы раздела;  $P_\sigma = 4\pi\epsilon^{-1}\sigma^2 k\xi$  – электростатическое давление на границе раздела сред, происходящее из-за наличия на ней электрического заряда с равновесной поверхностной плотностью  $\sigma$ ,  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость верхней жидкости [9].

Решение задачи (1)–(6) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (A_1 \exp(kz) + A_2 \exp(-kz)) \cos(kx - \omega t) + Ux; \\ \psi_2 &= B \exp(kz) \cdot \cos(kx - \omega t); \\ \zeta &= C \sin(kx - \omega t); \\ \xi &= D \sin(kx - \omega t). \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в граничные условия (2)–(6), взятые на невозмущенных поверхностях  $z=0$ ,  $z=h$ , в линейном по малым амплитудам  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  приближении, получим систему алгебраических уравнений:

$$A_1 k \exp(kh) - A_2 k \exp(-kh) - (Uk - \omega)C = 0; \quad (2a)$$

$$\rho_1 \exp(kh)(\omega - Uk)A_1 + \rho_1 \exp(-kh)(\omega - Uk)A_2 + (\rho_1 g + \alpha_1 k^2)C = 0; \quad (3a)$$

$$kA_1 - kA_2 - (Uk - \omega)D = 0; \quad (4a)$$

$$kB + \omega D = 0; \quad (5a)$$

$$\rho_1(\omega - Uk)A_1 + \rho_2(\omega - Uk)A_2 + [g(\rho_1 - \rho_2) + 4\pi\varepsilon^{-1}\sigma^2k - \alpha_2k^2] = 0. \quad (6a)$$

Приравнявая нулю определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных амплитудах  $A_1, A_2, B, C, D$  в системе алгебраических уравнений (2a)-(6a), получим дисперсионные уравнения задачи:

$$\begin{aligned} & -[\rho_2 + \rho_1 \cdot th(kh)] \cdot \omega^4 + 2Uk[2\rho_1 \cdot th(kh) + \rho_2] \cdot \omega^3 - \\ & - \left\{ \rho_1 \cdot th(kh) \left[ 6(Uk)^2 - \frac{k\rho_2}{\rho_1}(g - D_1) \right] + k[(g - D_2)\rho_2 - D_1\rho_1] - \rho_2(Uk)^2 \right\} \cdot \\ & \cdot \omega^2 + 2k^2U[2\rho_1 \cdot kU^2 \cdot th(kh) + \rho_1D_1 + \rho_2(D_2 - g)] \cdot \omega + \\ & + k^2 \left\{ \rho_1 \cdot th(kh) \left[ g(g - D_1) + U^4k^2 - \frac{\rho_1}{\rho_1}(D_1 - g)(D_2 + g) \right] + U^2k[\rho_2(g - D_2) - \rho_1] \right\} = 0; \end{aligned}$$

$$D_1 = \frac{-\alpha_1k^2}{\rho_1}; \quad D_2 = \frac{1}{\rho_2} (4\pi\varepsilon^{-1}\sigma^2k - \alpha_2k^2).$$

В безразмерных переменных, в которых  $\rho_2 = \alpha_2 = g = 1$ , это дисперсионное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} & -[1 + \rho th(kh)]\omega^4 + 2Uk[2\rho th(kh) + 1]\omega^3 - \left[ \rho th(kh) \left[ 6(Uk)^2 - \frac{k}{\rho}(1 - D_1) \right] + k[(1 - D_2) - D_1\rho] - (Uk)^2 \right] \omega^2 + \\ & + 2k^2U[2\rho th(kh)kU^2 + \rho D_1 + (D_2 - 1)]\omega + k^2[\rho th(kh) * [(1 - D_1) + U^4k^2 - (D_1 - 1)(D_2 + 1)] + \\ & + U^2k[(1 - D_2) - \rho]] = 0; \end{aligned} \quad (8)$$

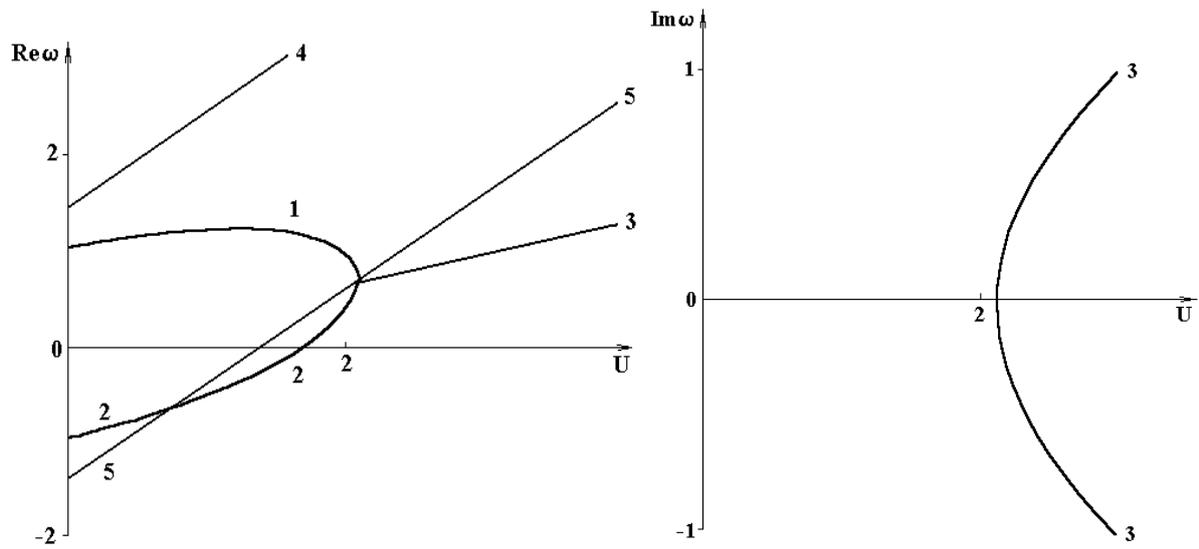
$$W = \frac{4\pi\sigma^2}{\varepsilon\alpha_2}\alpha; \quad \alpha^2 = \frac{\alpha_2}{\rho_2g}; \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}; \quad D_1 = -\frac{\alpha k^2}{\rho}; \quad D_2 = Wk - k^2.$$

Безразмерные переменные  $\omega, k, U$  и  $h$  измеряются единицами своих характерных масштабов:

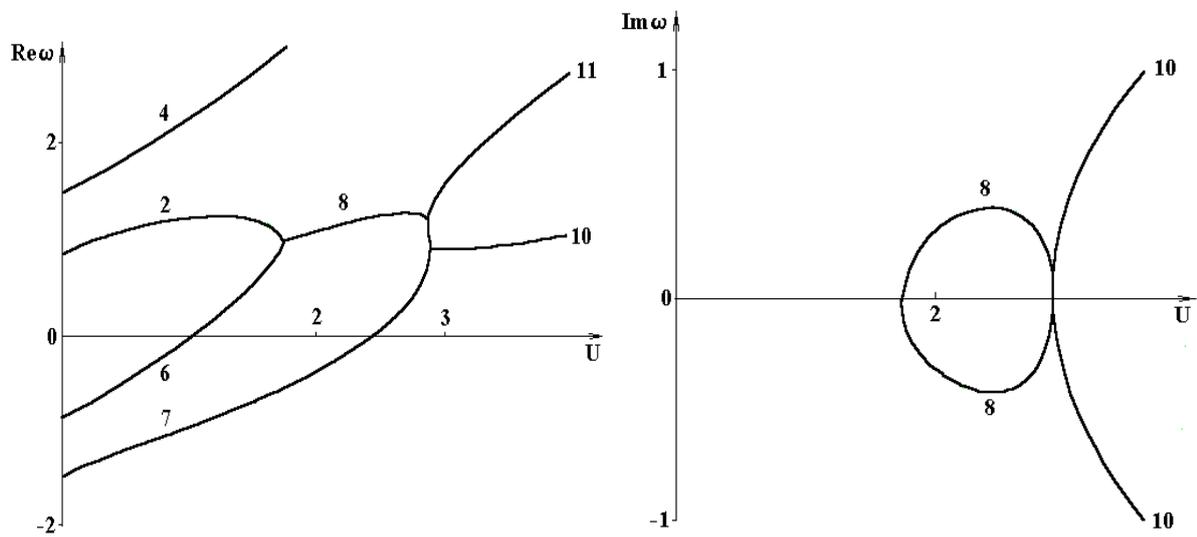
$$\omega^* = \sqrt{g/\alpha}; \quad k^* = \alpha^{-1}; \quad U^* = \sqrt{g\alpha}; \quad h^* = \alpha.$$

2. На рис. 1 приведены результаты численного исследования влияния толщины верхнего движущегося жидкого слоя на закономерности развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца по дисперсионному уравнению (8) (в отсутствие электрического заряда на границе раздела сред). На рис. 1 вещественная часть комплексной частоты определяет частоты капиллярных движений жидкости, а мнимая инкременты неустойчивости (в области  $Im \omega > 0$ ) и декременты затухания (в области  $Im \omega < 0$ ). Ветви дисперсионного уравнения с номерами 1, 2, 3 на рис. 1,а описывают капиллярные движения, порождаемые границей раздела сред. Ветви же дисперсионного уравнения с номерами 4 и 5 описывают капиллярные волновые движения, порождаемые свободной поверхностью верхней жидкости. На рис. 1,а эти ветви являются параллельными прямыми, ориентированными под некоторым углом к оси ОУ. Очевидно, что в системе отсчета, движущейся с верхней жидкостью ветвь 4 описывает волну, распространяющуюся по направлению  $\vec{U}$ , а ветвь 5 соответствует такой же волне, бегущей в противоположном направлении.

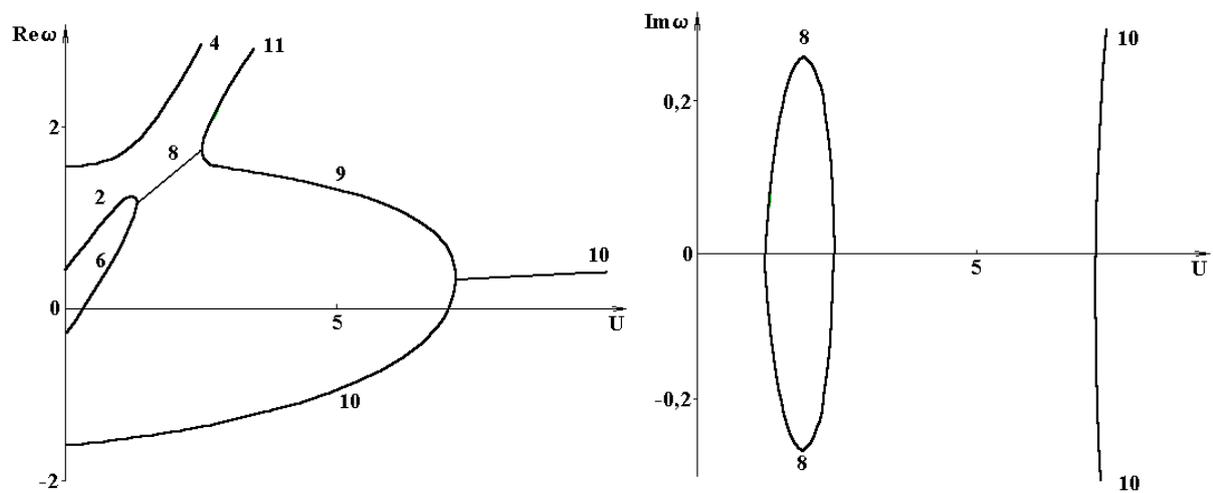
Расчеты показали, что при достаточно большой безразмерной глубине ( $h > 5$ ) закономерности реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в рассматриваемой системе не отличаются от классического варианта с бесконечной толщиной верхней жидкости:  $h \rightarrow \infty$ . Согласно рис. 1,а при некотором значении скорости движения верхней среды  $U = U_*$  ветви волновых движений 1 и 2 сливаются, образуя два волновых же движения 3, амплитуда одного из которых экспоненциально затухает со временем с декрементом, определяемым отрицательной частью мнимой компоненты ветви 3, а другого – экспоненциально нарастает с инкрементом, определяемым положительной частью мнимой компоненты ветви 3.



a)



б)



в)

Рис. 1. Зависимости действительной  $Re \omega = Re \omega(U)$  и мнимой  $Im \omega = Im \omega(U)$  частей комплексной частоты от скорости верхней жидкости, рассчитанные при  $k = 1$ ;  $\rho_1 = 0,5$ ;  $\alpha_1 = 0,5$ ;  $W_1 = 0$  и различных значениях  $h = 5(a)$ ,  $0,9(b)$ ,  $0,1(в)$ .

При уменьшении безразмерной толщины слоя верхней жидкости (см. рис. 1,б,в) до значений  $h \sim 1$  ветви 1, 2, 3 начинают взаимодействовать с ветвями 4 и 5 с образованием новых составных движений 6, 7, 8, 9, 10, 11 и с деформированием ветви 4. Причем движения 4, 6, 7, 9, 11 являются волновыми незатухающими, а движения 8 и 10 содержат как периодически экспоненциально затухающие (для которых  $Im \omega < 0$ ), так и периодически экспоненциально нарастающие (неустойчивые) ветви (для которых  $Im \omega > 0$ ). Неустойчивое движение 10 соответствует классической неустойчивости Кельвина-Гельмгольца и для него критическая скорость начала реализации неустойчивости  $U_*$  увеличивается с уменьшением толщины слоя верхней жидкости. Неустойчивое движение 8 обязано своим происхождением взаимодействию движений, порождаемых свободной поверхностью верхней жидкости, и движений, порождаемых границей раздела сред. При уменьшении безразмерной толщины слоя верхней жидкости  $h$  неустойчивое движение 8, в отличие от движения 10, реализуется при все меньших критических значениях скорости верхней жидкости  $U_*$ , величина его инкремента при этом снижается.

3. На рис. 2 приведены результаты расчета по дисперсионному уравнению (8) зависимости действительной  $Re \omega = Re \omega(W)$ , мнимой  $Im \omega = Im \omega(W)$  компонент комплексной частоты от величины параметра  $W$ , характеризующего устойчивость заряженной поверхности жидкости в смысле устойчивости по отношению к собственному заряду (в смысле возможности реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля), построенные для случая неподвижного верхнего слоя  $U = 0$ . Ветви 4 и 7 соответствуют движениям, порождаемым свободной поверхностью верхней жидкости. Ветви 2 и 6 соответствуют движениям, порождаемым заряженной границей раздела сред. Из рис. 2 видно, что при некоторой величине параметра  $W$  (при некоторой величине поверхностного заряда на границе сред) волновые движения 2 и 6 сливаются и порождают два симметричных аperiodических движения 8: положительная часть движения 8 определяет инкремент неустойчивости границы раздела сред, а отрицательная часть определяет декремент затухания виртуальных возмущений равновесной плоской границы раздела.

Если привести в движение слой верхней жидкости, то согласно рис. 3 и 4 картина реализующихся в системе капиллярных движений жидкости усложнится. Если не менять значений параметров, при которых получен рис. 2, но лишь добавить движение верхней среды, то картина расположения ветвей дисперсионного уравнения деформируется в сторону асимметрии (что видно из сравнения рис. 2 и 3), а реализующаяся неустойчивость заряженной границы раздела из аperiodической станет периодической. Утоньшение слоя верхней жидкости приведет к разделению неустойчивого движения на два независимых неустойчивых движения 8 и 10 (см., рис. 4,а и 4,б). Ветвь 8 соответствует неустойчивости, происходящей из-за взаимодействия движений, порождаемых свободной поверхностью верхней жидкости и заряженной границы раздела сред. Ветвь 10 соответствует комбинации неустойчивостей Тонкса-Френкеля и Кельвина-Гельмгольца, рассмотренной в [7].

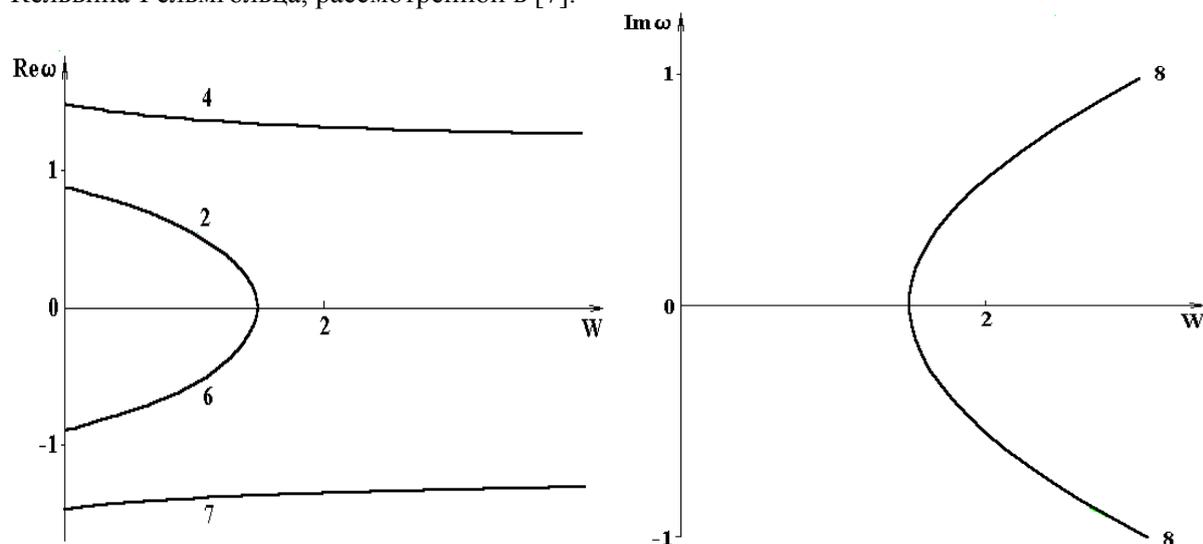


Рис. 2. Зависимости действительной  $Re \omega = Re \omega(W)$  и мнимой  $Im \omega = Im \omega(W)$  компонент комплексной частоты от величины заряда на границе раздела жидкостей, рассчитанные при  $k = 1$ ;  $\rho_1 = 0,5$ ;  $\alpha_1 = 0,5$ ;  $h = 1$ , для случая неподвижного верхнего слоя  $U = 0$ .

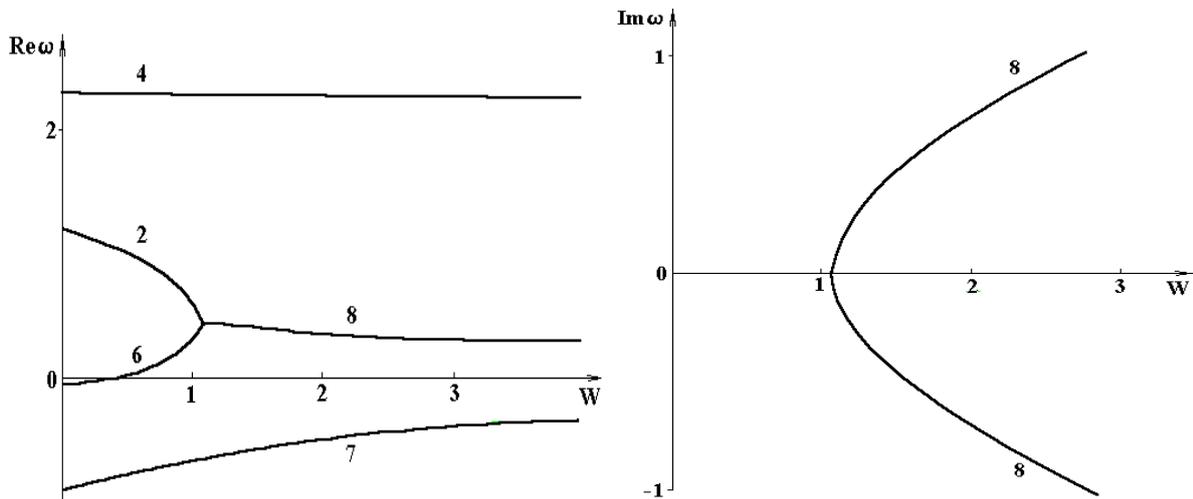


Рис. 3. Зависимости действительной  $Re \omega = Re \omega(W)$  и мнимой  $Im \omega = Im \omega(W)$  компонент комплексной частоты от величины заряда на границе раздела жидкостей, рассчитанные при  $k = 1$ ;  $\rho_1 = 0,5$ ;  $\alpha_1 = 0,5$ ;  $h = 1$ , для случая неподвижного верхнего слоя  $U = 1$ .

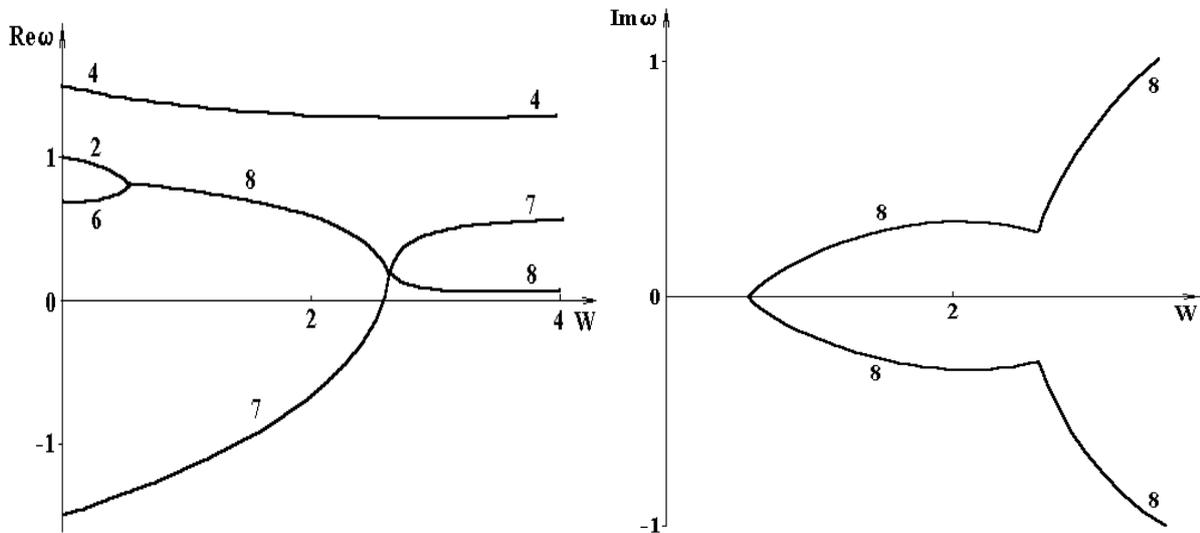
4. Чтобы получить аналитические зависимости, немного упростим решаемую задачу. Из рис. 1–4 видно, что источниками волновых движений жидкости являются свободная поверхность верхнего слоя и граница раздела жидкостей. Если верхнюю жидкость ограничить сверху жесткой плоскостью, то исчезнет свободная поверхность, а вместе с ней исчезнут и движения жидкости, порождаемые ею. Граничное условие на верхней границе слоя конечной толщины вместо (2)–(3) примет вид:

$$z=h: \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0.$$

Дисперсионное уравнение задачи по сравнению с (8) упростится и примет вид:

$$\begin{aligned} & [\rho_1 \cdot th(-kh) + \rho_2] \cdot \omega^2 - 2\rho_1 kU \cdot th(-kh) \cdot \omega + k \{ \alpha_2 k^2 + \\ & + k [4\pi \varepsilon^{-1} \sigma^2 - \rho_1 U^2 \cdot th(-kh)] + g(\rho_1 - \rho_2) \} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Из требования вещественности частоты для любых значений волновых чисел, найдем, что дискриминант уравнения (9) должен быть положителен:



a)

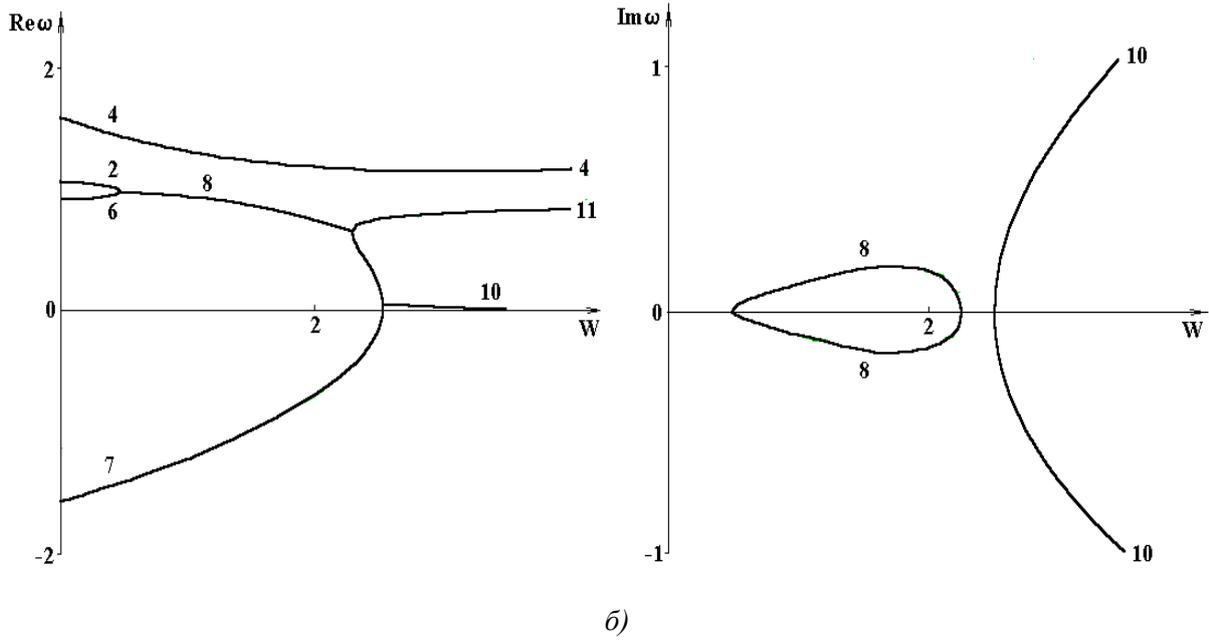


Рис. 4. Зависимости, действительной  $Re \omega = Re \omega(W)$  и мнимой  $Im \omega = Im \omega(W)$  компонент комплексной частоты от величины заряда на границе раздела жидкостей, рассчитанные при  $k = 1$ ;  $\rho_1 = 0,5$ ;  $\alpha_1 = 0,5$ ;  $h = 0,05(a)$ ,  $h = 0,01(b)$ , для случая неподвижного верхнего слоя  $U = 1$ .

$$D_W = -\alpha_2[-\rho_1 \cdot th(-kh) + \rho_2] \cdot k^2 + \left\{ 4\pi\epsilon^{-1}\sigma^2[-\rho_1 \cdot th(-kh) + \rho_2] + \rho_1\rho_2U^2 \cdot th(-kh) \right\} \cdot k - g(\rho_1 - \rho_2)[- \rho_1 \cdot th(-kh) + \rho_2] \geq 0.$$

В случае знака равенства в этом соотношении для границы устойчивости получим:

$$\alpha_2 k^2 - 4\pi\epsilon^{-1}\sigma^2 k + g(\rho_2 - \rho_1) = -\frac{\rho_1\rho_2U^2 k \cdot th(-kh)}{\rho_2 - \rho_1 \cdot th(-kh)}.$$

Перепишем это соотношение в безразмерном виде:

$$\chi^2 - W\chi + (\eta^{-1} - 1) = \frac{V^2 th(-\chi l)}{\eta[th(-\chi l) - 1]} \chi; \quad (10)$$

$$\eta = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \quad V = U \left[ \frac{\rho_2}{\alpha_2 g} \right]^{\frac{1}{4}}; \quad \alpha^2 \equiv \frac{\alpha_2}{\rho_2 g};$$

$$l = \frac{h}{\alpha}; \quad z^2 = \omega^2 \frac{\alpha}{g}; \quad \chi = ka.$$

Разобьем выражение (10) на сумму двух слагаемых  $y_1 + y_2 = 0$ .

$$y_1(\chi) = \chi - W + \frac{\eta^{-1} - 1}{\chi}; \quad (11)$$

$$y_2(\chi_2) = \frac{V^2 th(-\chi l)}{\eta[1 - th(-\chi l)]}. \quad (12)$$

Численный анализ показывает, что точка пересечения функций  $y_1(\chi)$  и  $y_2(\chi)$ , то есть решение уравнения (10) будет мало отличаться от точки минимума функции  $y_1(\chi)$ , приравнявая нулю первую производную по  $\chi$  от выражения (11), найдем

$$\chi_{\min} = \sqrt{\eta - 1}.$$

Подставляя в (12)  $\chi = \chi_{\min} + \mu$ , где  $\mu$  – малое отклонение от  $\chi_{\min}$ , соответствующее истинному значению корня, найдем критическое минимальное значение скорости верхней жидкости  $V_*$ , при которой исчезают устойчивые состояния системы, как функцию  $\eta$  и  $\varepsilon$ :

$$V_*^2 = \frac{th \left[ -l \left( \sqrt{\eta^{-1} - 1} + \mu \right) \right] - \eta^{-1}}{\eta^{-1} th \left[ -l \left( \sqrt{\eta^{-1} - 1} + \mu \right) \right]} - \left[ \sqrt{\eta^{-1} - 1} + \mu - W + \frac{\eta^{-1} - 1}{(\eta^{-1} - 1) + \mu} \right]. \quad (13)$$

Несложно видеть, что с увеличением высоты слоя жидкости критическая для реализации неустойчивости заряженного тангенциального разрыва величина скорости  $V_*$  снижается. Результаты численного расчета по (13) приведены на рис. 5.

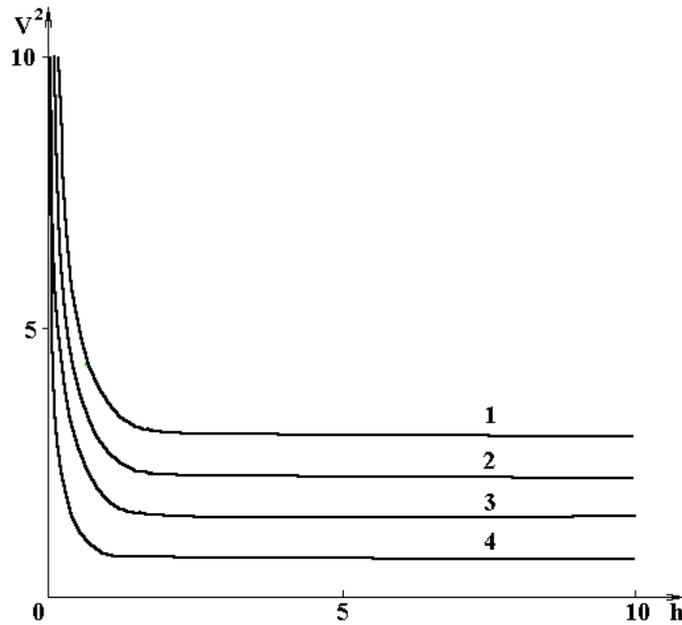


Рис. 5. Зависимости квадрата критического значения скорости верхнего слоя жидкости  $U_*^2 = U_*^2(h)$  от толщины этого слоя  $h$ , рассчитанные при  $\mu=0$ ;  $\eta=2$  и различных значениях  $W$ : 1 – 0; 2 – 0,5; 3 – 1; 4 – 1,5.

Выражение (13) можно записать так, чтобы было видно, как влияет высота слоя жидкости на критические условия реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля:

$$W = - \frac{V_*^2 \eta^{-1} th \left[ -l \left( \sqrt{\eta^{-1} - 1} + \mu \right) \right]}{th \left[ -l \left( \sqrt{\eta^{-1} - 1} + \mu \right) \right] - \eta^{-1}} + \left[ \sqrt{\eta^{-1} - 1} + \mu \right] + \frac{\eta^{-1} - 1}{\eta^{-1} - 1 + \mu}. \quad (14)$$

Результаты численного расчета по (14) приведены на рис. 6. Из (14) и рис. 6 видно, что с увеличением толщины слоя верхней жидкости критическое для начала неустойчивости значение параметра  $W$  снижается и это снижение тем более существенно, чем больше скорость движения верхнего слоя жидкости.

Численные расчеты по формулам (13) и (14) показывают, что расчетные значения параметров  $V_*^2$  и  $W$  весьма слабо зависят от  $\mu$ , и следовательно, соотношениями (13) и (14) вполне можно пользоваться в качественном анализе.

5. Конечность толщины слоя верхней жидкости сказывается на критических условиях реализации неустойчивостей Кельвина-Гельмгольца и Тонкса-Френкеля лишь при весьма малых толщинах верхнего слоя, сравнимых с капиллярной постоянной нижней жидкости. При малых толщинах слоя верхней жидкости имеет место взаимодействие капиллярных

движений, порождаемых свободной поверхностью верхней жидкости и границей раздела сред, приводящее к появлению дополнительной колебательной неустойчивости.

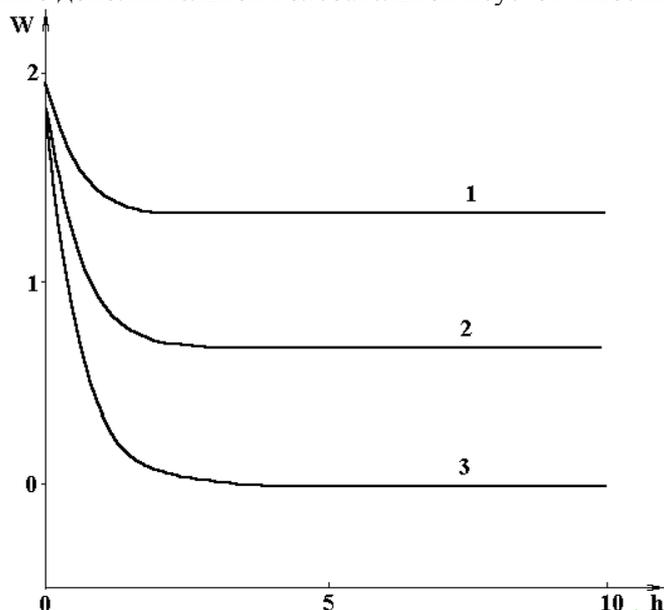


Рис. 6. Зависимости критического значения поверхностной плотности заряда  $W = W(h)$  от толщины движущегося жидкого слоя при различных значениях квадрата его скорости и  $\mu = 0$ ;  $\eta = 2$ ;  $U^2$ : 1 – 0; 2 – 1; 3 – 2; 4 – 3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Miles J.W. The generation of surface waves by wind // Appl. Mech. Rev. 1962. V.15. № 9. P. 685–687.
2. Hinch E.J. A note on the mechanism of the instability at the interface between two shearing fluids // J. Fluid Mech. 1984. V. 144. P. 463–465.
3. Hooper A.P., Boyd G.C. Shear-flow instability at the interface between viscous fluids // J. Fluid Mech. 1983. V. 128. P. 507–528.
4. Sneyd A.D. Stability of fluid layers carrying a normal electric current // J. Fluid Mech. 1985. V. 156. P. 223–236.
5. Sydora R.D. et al. Electrostatic Kelvin-Helmholtz instability in a radially injected plasma cloud // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 10. P. 2986–2991.
6. Кузнецов В.М., Лушников П.М. Нелинейная теория возбуждения волн ветром за счет неустойчивости Кельвина-Гельмгольца // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 2. С. 6144–630.
7. Григорьев О.А., Ширяева С.О. Неустойчивость заряженной плоской поверхности тангенциального разрыва двух несмешивающихся жидкостей различных плотностей // ЖТФ. 1996. Т. 66. № 2. С. 23–34.
8. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О., Григорьев О.А. Неустойчивость заряженной сферической поверхности в обтекающем потоке идеальной жидкости // ЭОМ. 1998. № 1–2. С. 48–50.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., 1982.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М., 1986.

Поступила 10.11.99

#### Summary

The dispersion equation for capillary motions for inviscid twolayer fluid acted by gravity is derived and investigated both analytically and numerically when there is a charge on the interface of the layers and when upper layer move along the interface. It was supposed that an upper layer thickness is finite but uderlayer has an infinite depth. The characteristic property of the Tonks-Frenkel instability and the Kelvin-Helmholtz instability are investigated.