

# Об устойчивости капиллярных волн на поверхности слоя вязкой проводящей жидкости на металлическом проводе

\* С. О. Ширяева, А. И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
г. Ярославль, 150000, Россия, \*e-mail: [shir@uniyar.ac.ru](mailto:shir@uniyar.ac.ru)

Поступила 27.04.2018

После доработки 06.07.2018

Принята к публикации 09.07.2018

Аналитически в линейном приближении по безразмерной амплитуде осцилляций выводится дисперсионное уравнение для капиллярных волн на заряженной поверхности слоя вязкой электропроводной жидкости на металлическом проводе. Показано, что металлический провод оказывает стабилизирующее влияние на капиллярные волны. Влияние провода становится существенным лишь при больших значениях его радиуса. Появление электрического заряда на слое жидкости приводит к усложнению спектра реализующихся движений жидкости и количественному изменению величин частот, инкрементов и декрементов.

*Ключевые слова:* цилиндрический слой жидкости, заряд, вязкость, электропроводность, неустойчивость.

УДК 77.051.15: 621.384.8

DOI: 10.5281/zenodo.2629528

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема увеличения потерь электроэнергии на линиях высоковольтных электропередач во время дождя делает актуальной задачу расчета устойчивости капиллярных волн в слое вязкой электропроводной жидкости, покрывающей металлический провод. Указанные потери электроэнергии могут быть связаны как с коронным разрядом у гребней капиллярных волн на поверхности жидкого слоя [1], так и с реализацией неустойчивости свободной поверхности жидкости, сопровождающейся выбросом сильно заряженных струек и капелек [2–10] (см., например, фотографии в [4]).

В связи со сказанным и проведено ниже следующее исследование.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется прямой бесконечно длинный металлический стержень (провод) радиуса  $R_0$ , поддерживаемый при постоянном электростатическом потенциале. Примем, что провод покрыт слоем смачивающей его электропроводной жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ . Будем считать, что невозмущенная свободная поверхность жидкости имеет форму кругового цилиндра радиуса  $R$  так, что  $R_0 < R$ . Жидкость будем считать вязкой с коэффициентом кинематической вязкости  $\nu \equiv \eta/\rho$ , где  $\eta$  – коэффициент динамической вязкости, а  $\rho$  – коэффициент массовой

плотности. Окружающую среду станем моделировать вакуумом.

Примем, что на поверхности слоя жидкости в состоянии равновесия имеется электрический заряд с поверхностной плотностью  $\mu_0$  и в окружающем пространстве возникает электрическое поле напряженностью  $\vec{E}_0$ . При наличии волнового возмущения равновесной поверхности жидкого слоя поверхностную плотность заряда обозначим просто  $\mu$ .

Будем изучать устойчивость осесимметричных капиллярных волн на свободной поверхности слоя жидкости в цилиндрической системе координат, ось  $Z$  которой совпадает с осью провода.

Все наблюдение проведем в системе координат, связанной с проводом. В такой системе координат поле скоростей течения жидкости будет связано только с волновыми движениями ее свободной поверхности.

Следует отметить, что в жидкости всегда существует тепловое капиллярное волновое движение и имеет место искажение равновесной поверхности жидкости волнами весьма малой амплитуды:  $\xi \propto \sqrt{kT/\sigma}$ , где  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура. Строго говоря, такие волны можно считать бесконечно малыми, так как в рамках модели сплошной среды их амплитуда меньше размеров молекулы, а порождаются они уже тепловым движением молекул жидкости [11]. При определенных внешних воздействиях амплитуды некоторых

волн начинают неограниченно расти. Иначе говоря, они претерпевают неустойчивость.

Пусть функция  $\xi(\theta, t)$  определяет волновое возмущение свободной поверхности жидкого слоя. Согласно сказанному,  $|\xi(\theta, t)| \ll (R - R_0)$ . Отношение  $|\xi(\theta, t)| / (R - R_0)$  будет малым параметром решаемой задачи, который мы обозначим символом  $\varepsilon$ . Саму задачу будем решать в первом порядке по  $\varepsilon$ .

Математическая формулировка задачи о расчете устойчивости капиллярных волн в жидком слое на твердом проводящем проводе примет вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V}(\vec{r}, t) &= 0; \quad \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0; \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\nabla \Phi(\vec{r}, t); \quad \Delta \Phi(\vec{r}, t) = 0; \\ \partial_t \vec{V}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{\rho} \nabla P(\vec{r}, t) + \nu \Delta \vec{V}(\vec{r}, t); \\ r = R_0: \quad V_r(\vec{r}, t) &= 0; \quad V_z(\vec{r}, t) = 0; \\ r \rightarrow \infty: \quad \vec{E} &\rightarrow 0; \\ r = R + \xi(\varphi, z, t): \\ \frac{dF(r, \varphi, z, t)}{dt} = 0 &\Rightarrow -\frac{\partial \xi}{\partial t} + V_r(\vec{r}, t) \Big|_{r=R} = 0; \\ F(r, \varphi, z, t) &\equiv r - (R + \xi(\varphi, z, t)); \quad \vec{E} \cdot \vec{n} \rightarrow 0; \\ \vec{E} \cdot \vec{n} &= 4\pi\mu; \quad \Phi = \Phi_S; \\ P(\vec{r}, t) - 2\eta \frac{dV_r(\vec{r}, t)}{dr} + \frac{1}{8\pi} [E^2 - 2(\vec{E} \cdot \vec{n})^2] &= P_\sigma(\vec{r}, t); \\ P_\sigma(\vec{r}, t) &= \sigma \operatorname{div} \vec{n}(\vec{r}, t); \\ \vec{n}(\vec{r}, t) &= \frac{\nabla F(\vec{r}, t)}{|\nabla F|}; \\ \eta \left( \frac{\partial V_z(\vec{r}, t)}{\partial r} + \frac{\partial V_r(\vec{r}, t)}{\partial z} \right) \Big|_{r=R} &= 0, \quad (1) \end{aligned}$$

$\Phi(\vec{r}, t)$  – потенциал электрического поля;  $\Phi_S$  – постоянный вдоль поверхности жидкости электрический потенциал;  $\xi(\varphi, z, t)$  – функция, описывающая малое возмущение свободной поверхности жидкости, поля скоростей  $\vec{V}$  и поля давлений  $P$ ;  $P_\sigma$  – давление сил поверхностного натяжения;  $\vec{n}$  – вектор нормали к свободной поверхности жидкости, возмущенной капиллярным волновым движением.

К выписанной задаче необходимо добавить интегральные условия сохранения заряда на длине, равной длине волны:

$$\int_a^{a+\lambda} \int_0^{2\pi} \mu \cdot r \cdot d\varphi \cdot dz = 2\pi \cdot R \cdot \lambda \cdot \mu$$

и постоянства объема:

$$\int_a^{a+\lambda} \int_0^{2\pi} \int_{R_0}^{R+\xi} r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz = \pi(R^2 - R_0^2).$$

## СХЕМА РЕШЕНИЯ

Задачу (1) будем решать методом, использованным в [12], а именно исходя из решения для поля скоростей такой задачи для идеальной жидкости плюс добавка из-за влияния вязкости.

По аналогии с [12] запишем скорость жидкости в виде:

$$\begin{aligned} V_r(\vec{r}, t) &= V_r^{(id)}(\vec{r}, t) + U_1(\vec{r}, t); \\ V_z(\vec{r}, t) &= V_z^{(id)}(\vec{r}, t) + U_2(\vec{r}, t); \quad (2) \end{aligned}$$

где величины, отмеченные верхним индексом  $id$ , соответствуют идеальной жидкости и найдены для аналогичной задачи в [13].

Введем гидродинамический потенциал  $\varphi(\vec{r}, t)$  для идеальной жидкости:  $\vec{V}^{(id)}(\vec{r}, t) = \nabla \varphi(\vec{r}, t)$  и функцию тока  $\psi(\vec{r}, t)$  для вязкой части решения на основе соотношений:

$$U_r(\vec{r}, t) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial z}; \quad U_z(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial r}$$

так, что выражения для компонент скорости в соответствии с (2) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} V_r(\vec{r}, t) &= \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial z}; \\ V_z(\vec{r}, t) &= \frac{\partial \varphi(\vec{r}, t)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial r}. \end{aligned}$$

Выпишем потенциал и функцию тока [12] в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= (C_1 I_0(kr) + B_1 K_0(kr)) \exp((ikz + \alpha t)); \quad (3) \\ \psi(\vec{r}, t) &= r(C_2 I_1(lr) + B_2 K_1(lr)) \exp((ikz + \alpha t)); \\ l^2 &= k^2 + \frac{\alpha}{\nu}; \end{aligned}$$

где  $\alpha$  – комплексная частота:

$$\alpha \equiv \operatorname{Re} \alpha + i \operatorname{Im} \alpha.$$

Выражения для компонентов скорости, используя (2)–(3), запишем как:

$$\begin{aligned} V_r(\vec{r}, t) &= -ik(iC_1 I_0'(kr) + C_2 I_1(lr) + \\ &+ iB_1 K_0'(kr) + B_2 K_1(lr)) \exp(ikz + \alpha t); \\ V_z(\vec{r}, t) &= k \left( iC_1 I_0(kr) + C_2 \left( \frac{1}{kr} I_1(lr) + \frac{1}{k} I_1'(lr) \right) + \right. \\ &+ iB_1 K_0(kr) + B_2 \left. \left( \frac{1}{kr} K_1(lr) + \frac{1}{k} K_1'(lr) \right) \right) \exp(ikz + \alpha t). \quad (4) \end{aligned}$$

В записанных выражениях  $\alpha$  – комплексная частота волны;  $k$  – волновое число, определяемое как  $k \equiv 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны;  $t$  – время;  $r$  – радиальная координата цилиндрической системы координат;  $C_j$  и  $B_j$  – коэффициенты,  $I_0(kr)$ ,  $I_1(kr)$  и  $K_0(kr)$ ,  $K_1(kr)$  – модифицированные сферические функции первого  $I$  и второго  $K$  рода, нулевого и первого порядков соответственно [14]. В силу определений волновое число  $k$  всегда вещественно, а его аналог для вязкой жидкости  $l$  комплексен.

Выражение для гидродинамического давления определится решением для идеальной жидкости [13]:

$$P = P_0 - \rho\alpha(C_1 I_0(kr) + B_1 K_0(kr)) \exp(ikz + \alpha t).$$

Удовлетворяя граничным условиям, несложно найти дисперсионное уравнение задачи, которое, однако, имеет весьма громоздкий вид (см. Приложение), и для последующего анализа используем его асимптотику в пределе малой вязкости:

$$\begin{aligned} & \alpha^2 + 2\alpha\nu k^2 [1 - L(k, R_0, R)] - L(k, R_0, R) \times \\ & \times \left[ \frac{\sigma k^2}{\rho R} (1 - k^2 R^2) + 4\pi\mu_0^2 \frac{k^2}{\rho} \left( kR \frac{K_1(kR)}{K_0(kR)} - 1 \right) \right] \times \\ & \times \left( 1 - \sqrt{\frac{\nu k^2}{\alpha}} (g_1 - d_1) - \right. \\ & \left. - \frac{\nu k^2}{\alpha} (g_2(k, R_0, R) + g_1(k, R_0, R) d_1(k, R_0, R) - d_2(k, R_0, R)) \right) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Значения коэффициентов в (5) приведены в Приложении. По (5) и проведем дальнейший анализ.

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В общем случае решения дисперсионного уравнения (5) комплексны. При принятых обозначениях частота волн  $\omega$  определяется мнимой частью комплексной частоты  $\alpha$ :  $\omega \equiv \text{Im}\alpha$ , а инкремент  $\gamma$  при  $\text{Re}\alpha > 0$  или декремент  $\chi$  при  $\text{Re}\alpha < 0$  – ее вещественной частью  $\gamma \equiv \text{Re}\alpha$  или  $\chi \equiv \text{Re}\alpha$ .

Нижеследующие графики будем строить в безразмерных переменных, в которых  $\sigma = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $R = 1$ .

На рис. 1а изображены рассчитанные по (5) зависимости частоты волн  $\omega$  и их инкремента  $\gamma$  в жидком слое от волнового числа  $k$  при  $\mu_0 = 0$  и  $\nu = 0$ , то есть когда вязкое затухание отсутствует. Ветвь 1 соответствует инкрементам, ветвь 2 – частотам волн.

Следует напомнить, что слой жидкости изначально неустойчив по отношению к длинноволновым возмущениям [12], поскольку потенци-

альная энергия сил поверхностного натяжения жидкого цилиндра больше, чем у равновеликой по объему совокупности сферических капель. Из рис. 1а видно, что для волн с  $k < 1$  решения имеют положительную вещественную часть частоты  $\alpha$ , что соответствует экспоненциальному нарастанию со временем возмущения поверхности струи. Следовательно, эта область ( $0 < k < 1$ ) является областью неустойчивости. При  $k > 1$  частоты волн  $\alpha$  чисто мнимые, что соответствует устойчивым (при нулевой вязкости) капиллярным волнам на поверхности жидкого слоя, что и отображено на рис. 1а.

На рис. 1б кривыми 2, 4–7 приведены зависимости частот волн  $\omega$ , их инкрементов  $\gamma$  и декремента  $\chi$  от волнового числа  $k$  для вязкой жидкости. Кривые 1 и 3 соответствуют идеальной жидкости (см. рис. 1а). Ветвь 2 соответствует инкрементам, а ветвь 4 – частотам волн в вязкой жидкости. Как можно видеть из рис. 1б, наличие вязкости у жидкости приводит к снижению инкрементов неустойчивых волн при  $0 < k < 1$  и к появлению декрементов затухания у волн (кривая 5) в области устойчивости  $k > 1$ , частоты волн  $\omega$  при этом уменьшаются. Кроме сказанного, из-за наличия вязкости появляются новые ветви (см. 6 и 7).

Чтобы разобраться с физическим смыслом ветвей 6 и 7, приведем на рис. 2 их малые окрестности в более крупном масштабе. Нумерация ветвей на рис. 2 такая же, как на рис. 1б, но более крупный масштаб позволяет разглядеть ветвь 8 на рис. 2а и ветвь 9 на рис. 2б. Ветвь 8 представляет собой инкремент 6, а ветвь 9 – инкремент 7 волн, появившихся из-за наличия вязкости. Таким образом, наличие вязкости у жидкости приводит к появлению периодически растущих капиллярных волн в начале и конце диапазона неустойчивости  $0 < k < 1$  на поверхности жидкого слоя, то есть колебательных неустойчивостей. В области от конца ветви 6 и до начала ветви 7 реализуется аperiodическая неустойчивость поверхности жидкого слоя по отношению к силам поверхностного натяжения.

Можно отметить, что полное дисперсионное уравнение имеет бесконечное количество корней в силу того, что искомая комплексная частота  $\alpha$  входит в аргумент функций Бесселя. Скорее всего, не все корни будут иметь физический смысл. В пределе малой вязкости дисперсионное уравнение (5) будет иметь уже меньше корней. Иными словами, количество корней, которое будет иметь дисперсионное уравнение, зависит от учитываемой степени вязкости, которая для воды является малой.

В самом деле, коэффициент вязкости струи воды при  $R = 0,1$  см обезразмеривается на  $\nu^* \sim 2$  и будет  $\sim 0,0005$ .

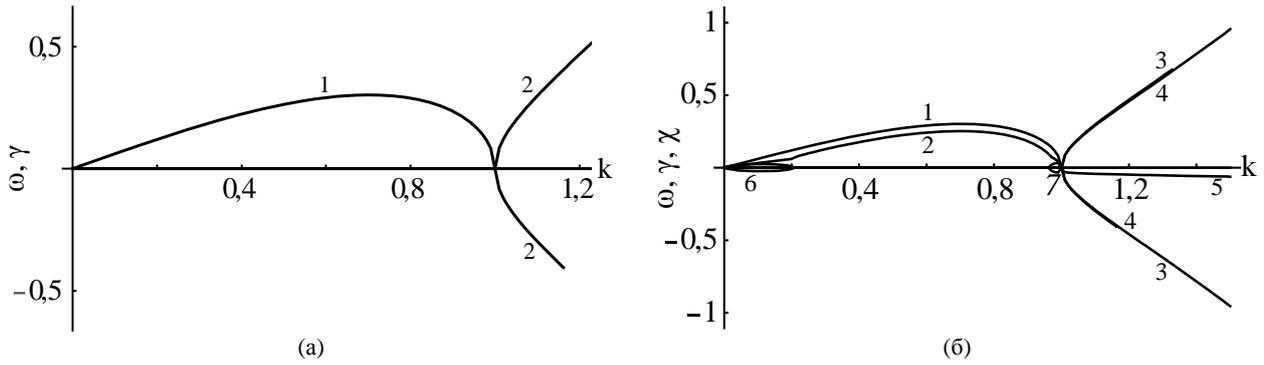


Рис. 1. Зависимость частоты, инкремента и декремента волны от волнового числа  $k$  при  $\nu = 0$ ,  $\mu_0 = 0$ ,  $R_0 = 0,5$ . Ветвь 1 соответствует инкрементам; ветвь 2 – частотам волн (а) и при  $\nu = 0,01$ ,  $\mu_0 = 0$ ,  $R_0 = 0,5$  (б).

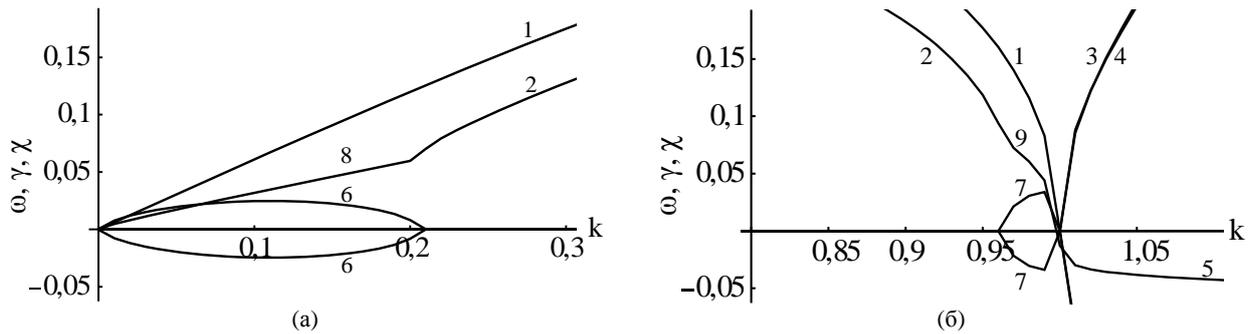


Рис. 2. Малая окрестность ветвей 6(а) и 7(б) в большем масштабе.

Рис. 3 иллюстрирует результаты анализа влияния радиуса стержня  $R_0$  на устойчивость капиллярного волнового движения жидкости в зависимости от ее коэффициента вязкости  $\nu$ . Рассмотрены ситуации с  $R_0 = 0$  (линии 1, 8),  $R_0 = 0,5$  (линии 2, 4, 7, 9) и  $R_0 = 0,7$  (линии 3, 5, 6, 10) для  $k = 0,5$ ,  $\mu_0 = 0$ .

Следует отметить, что при численном решении дисперсионного уравнения (6) для фиксированных  $\nu$  и  $R_0$  обнаруживается пара корней: при  $R_0 = 0$  две вещественные ветви 1, одна из которых убывает с ростом  $\nu$ , а другая растет; при  $R_0 = 0,5$  имеем вначале две ветви 2, одна из которых убывает с ростом вязкости, другая растет, затем при  $\nu \approx 0,02$  обе ветви сливаются в одну, почти параллельную оси абсцисс, и появляется мнимая часть  $\alpha$  (ветви 7), определяющая  $\omega$ , то есть мы приходим к колебательной неустойчивости; аналогично ведут себя ветви 3 и 6, соответствующие  $R_0 = 0,7$ . Ветви 3 и 6 соответствуют частотам волн. Ветви 2–5 инкрементам. Растущие с ростом коэффициента вязкости ветви 2 и 3 и нижняя часть ветви 1, очевидно, физического смысла не имеют.

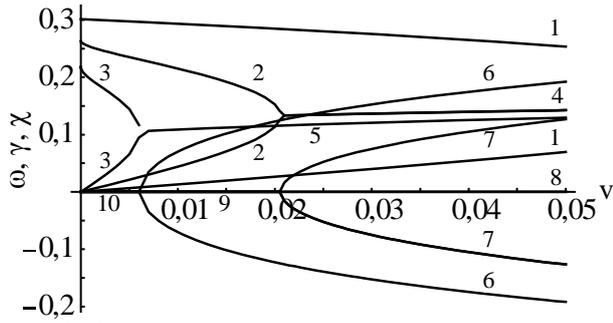
При  $R_0 = 0$  мнимая часть обоих корней равна нулю, что соответствует аperiodическому затуханию возмущения поверхности.

При значениях  $R_0 = 0$ ,  $R_0 = 0,5$  и  $R_0 = 0,7$  физический смысл имеют только не возрастающие с ростом вязкости ветви 1, 2, 3, 4 и 5,

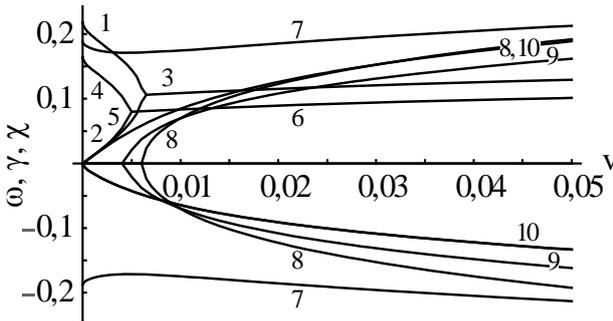
имеющие смысл инкрементов. Видно, что увеличение радиуса стержня приводит к уменьшению инкрементов нарастания неустойчивости поверхности.

На рис. 4 изображены зависимости частоты и декремента волны от вязкости  $\nu$  при  $\mu_0 = 0$  и разных толщинах стержня  $R_0$  при  $k = 1,5$ , то есть в области устойчивости по отношению к силам поверхностного натяжения. Из сравнения решений, полученных для разных радиусов:  $R_0 = 0$ ,  $R_0 = 0,5$  и  $R_0 = 0,7$ , видно, что увеличение радиуса стержня приводит к увеличению декрементов, а также к более сильной зависимости декремента от величины коэффициента вязкости.

На рис. 5 приведены зависимости частоты, инкрементов и декрементов волн от вязкости  $\nu$  при различных плотностях поверхностного заряда для радиуса стержня  $r_0 = 0,7$  и волновых чисел из области неустойчивости  $k = 0,5$  незаряженного слоя жидкости соответственно (эти области хорошо представлены на рис. 1а). Ветви 7, 8 и 9 дают частоты, ветви 1, 3–4, 6 и 10 – инкременты, ветви 2 и 5 физического смысла не имеют. Ветвь 1 соответствует аperiodической неустойчивости при  $\nu < 0,005$  и продолжается при больших  $\nu$  колебательной неустойчивостью 3 и 8. Причем инкремент 3 не зависит от вязкости, так как в отсутствие заряда на слое жидкости определяется силами поверхностного натяжения. Ветвь 4 соответствует аperiodической неустойчивости, сопровождаю-



**Рис. 3.** Зависимость частоты, инкремента и декремента волны от вязкости  $\nu$  при разных толщинах стержня  $R_0$  и  $\mu_0 = 0$ , для волн с  $k = 0,5$ .  $R_0 = 0$  – линии 1 и 8;  $R_0 = 0,5$  – линии 2, 4, 7 и 9;  $R_0 = 0,7$  – линии 3, 5, 6 и 10.



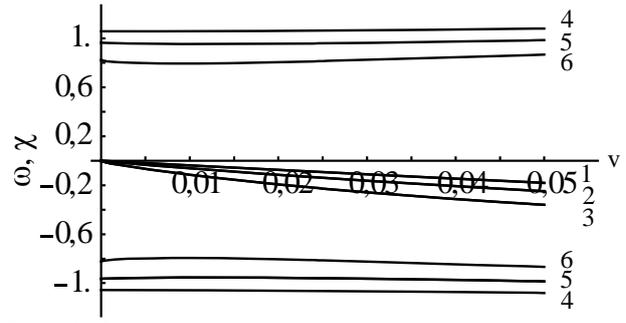
**Рис. 5.** Зависимость частоты, инкремента и декремента волны от вязкости  $\nu$  при разных плотностях поверхностного заряда. Поверхностная плотность заряда  $\mu_0 = 0$  (линии 1, 2, 3 и 8). Поверхностная плотность заряда и  $\mu_0 = 0,5$  (линии 4, 5, 6 и 9). Поверхностная плотность заряда  $\mu_0 = 1$  (линии 7, 10). Радиус стержня  $r_0 = 0,7$ , волновое число  $k = 0,5$ .

щейся при больших  $\nu$  колебательной неустойчивостью 6 и 9. Инкремент неустойчивости 6 для заряженного слоя жидкости меньше, чем инкремент незаряженного слоя 3, поскольку силы электрические противодействуют лапласовским. Ветви 7–10 дают затухающую волну. Верхняя часть ветви 10 должна соответствовать инкременту, но увеличение инкремента с ростом  $\nu$  противоречит физическому смыслу, поэтому она должна быть отброшена, а учитываться должна лишь нижняя (отрицательная) часть ветви 10, что и дает затухающую волну.

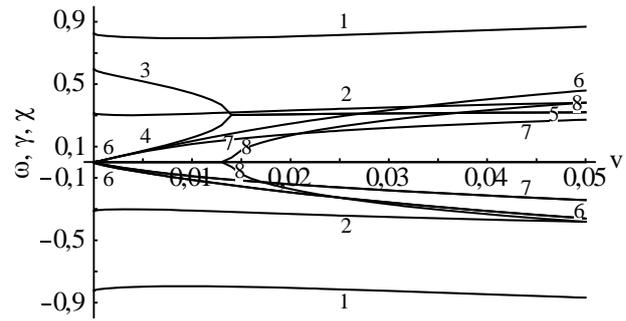
Несложно видеть, что с увеличением поверхностной плотности электрического заряда область реализации аperiodической неустойчивости уменьшается.

Напомним, что аperiodическая неустойчивость есть неустойчивость по отношению к силам поверхностного натяжения, а периодическая неустойчивость – по отношению к суперпозиции сил поверхностного натяжения и противоположно направленным электрическим силам.

На рис. 6 приведены зависимости частоты, инкрементов и декрементов волн от вязкости  $\nu$  при различных плотностях поверхностного заряда для радиуса стержня  $r_0 = 0,7$  и волновом числе  $k = 1,5$  из области устойчивости. Для



**Рис. 4.** Зависимость частоты, инкремента и декремента волны от вязкости  $\nu$  при разных толщинах стержня  $R_0$  в зоне устойчивости при  $k = 1,5$  и  $\mu_0 = 0$ .  $R_0 = 0$  – линии 1 и 4;  $R_0 = 0,5$  – линии 2 и 5;  $R_0 = 0,7$  – линии 3 и 6.



**Рис. 6.** Зависимость частоты, инкремента и декремента волны от вязкости  $\nu$  при разных плотностях поверхностного заряда. Поверхностная плотность заряда  $\mu_0 = 0$  (линии 1 и 6). Поверхностная плотность заряда  $\mu_0 = 0,3$  (линии 2 и 7). Поверхностная плотность заряда  $\mu_0 = 0,4$  (линии 3, 4, 5 и 8). Радиус стержня  $r_0 = 0,7$ , волновое число  $k = 1,5$ .

незаряженной поверхности жидкого слоя (ветви 1 и 6) волны должны затухать, поэтому на рис. 6 нужно взять только нижнюю часть ветви 6, а верхняя, растущая с ростом  $\nu$ , физического смысла не имеет. Для  $\mu_0 = 0,3$  (ветви 2 и 7) ситуация такая же, как для незаряженного слоя. При  $\mu_0 = 0,4$  появляются ветви 3, 5 и 8, соответствующие инкрементам: ветвь 3 соответствует аperiodической неустойчивости, а ветви 5 и 8 – колебательной неустойчивости по отношению к суперпозиции сил поверхностного натяжения и электрических сил.

В заключение следует отметить, что, говоря о неустойчивости осесимметричных волн в цилиндрическом слое жидкости на металлическом проводе, мы имеем в виду не разбиение струи на капли, которое невозможно, а формирование на поверхности провода структуры типа системы бусин, независимо от смачиваемости или несмачиваемости вещества провода данной жидкостью (как это отмечалось в [15] по другому поводу).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Увеличение радиуса стержня в струе вязкой жидкости приводит к уменьшению инкрементов нарастания неустойчивости капиллярных волн и увеличению декрементов их затухания.

С увеличением радиуса стержня в струе вязкой жидкости зависимость от вязкости становится более заметной. Наличие вязкости приводит к тому, что влияние стержня в струе проявляется при меньших его радиусах по сравнению с задачей об идеальной жидкости на проводе. Существует некое волновое число  $K$ , такое, что все волны в вязкой жидкости с  $k < K$  будут являться неустойчивыми, а волны с  $k > K$  – устойчивыми. Вязкость не влияет на размеры зон неустойчивости, меняется только ее тип. Появление электрического заряда на слое жидкости приводит к усложнению (появлению качественно новых движений жидкости) спектра реализующихся движений жидкости и количественному изменению величин частот, инкрементов и декрементов вследствие того, что капиллярные и электрические силы действуют в противоположных направлениях.

### ПРИЛОЖЕНИЕ

Дисперсионное уравнение задачи и его преобразование в пределе малой вязкости:

$$\alpha^2 + \frac{2\alpha\nu k^2 \left( I_1'(kR) - \frac{2kl}{(k^2+l^2)} \frac{I_1(kR)}{I_1(lR)} I_1'(lR) + F_2(k, l, R_0, R) \right)}{I_0(kR) (1 + F_1(k, l, R_0, R))} =$$

$$= \left[ \frac{\sigma k}{\rho R^2} (1 - k^2 R^2) + \frac{4\pi\chi^2 k}{\rho R} \left( kR \frac{K_1(kR)}{K_0(kR)} - 1 \right) \right] \times \quad (\text{П.1})$$

$$\times \frac{I_1(kR) (l^2 - k^2)}{I_0(kR) (l^2 + k^2)} \frac{F(k, l, R_0, R)}{(1 + F_1(k, l, R_0, R))};$$

где

$$F(k, l, R_0, R) = \left( 1 + G_{11}(k, l, R_0) \frac{K_1(kR)}{I_1(kR)} - \frac{K_1(lR)}{I_1(lR)} (G_{22}(k, l, R_0) - \right.$$

$$\left. - (G_{12}(k, l, R_0) G_{21}(k, l, R_0) - G_{11}(k, l, R_0) G_{22}(k, l, R_0)) \frac{K_1(kR)}{I_1(kR)} \right);$$

$$F_1(k, l, R_0, R) = \left( \frac{2k^2}{(l^2 + k^2)} \left( K_1(kR) + \frac{I_1(kR)}{I_0(kR)} K_0(kR) \right) \frac{1}{I_1(lR)} G_{12}(k, l, R_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{K_0(kR)}{I_0(kR)} \left( G_{11}(k, l, R_0) + \frac{K_1(lR)}{I_1(lR)} (G_{12}(k, l, R_0) G_{21}(k, l, R_0) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left( \frac{I_0(kR)}{K_0(kR)} - G_{11}(k, l, R_0) \cdot G_{22}(k, l, R_0) \right) \right) \right);$$

$$F_2(k, l, R_0, R) = \frac{k^2}{(l^2 + k^2)} \times$$

$$\times \left( 2 I_1(kR) K_1(kR) \left( \frac{I_1'(kR)}{I_1(kR)} - \frac{K_1'(kR)}{K_1(kR)} \right) \frac{G_{12}(k, l, R_0)}{I_1(lR)} + \right.$$

$$\left. + \left( 1 + \frac{l^2}{k^2} \right) \frac{l}{k} K_1(lR) \left( \frac{I_1'(lR)}{I_1(lR)} - \frac{K_1'(lR)}{K_1(lR)} \right) G_{21}(k, l, R_0) + \right.$$

$$+ I_1(kR) \frac{K_1(lR)}{I_1(lR)} \left( 2 \frac{l}{k} \frac{K_1'(lR)}{K_1(lR)} - \left( 1 + \frac{l^2}{k^2} \right) \frac{I_1'(kR)}{I_1(kR)} \right) G_{22}(k, l, R_0) -$$

$$- K_1(lR) \left( 2 \frac{l}{k} \frac{I_1'(lR)}{I_1(lR)} - \left( 1 + \frac{l^2}{k^2} \right) \frac{K_1'(kR)}{K_1(kR)} \right) G_{11}(k, l, R_0) +$$

$$+ K_1(kR) \frac{K_1(lR)}{I_1(lR)} \left( 2 \frac{l}{k} \frac{K_1'(lR)}{K_1(lR)} - \left( 1 + \frac{l^2}{k^2} \right) \frac{K_1'(kR)}{K_1(kR)} \right) (G_{11} \cdot G_{22} - G_{12} \cdot G_{21}).$$

$$G_{11}(k, l, R_0) = \frac{I_0(kR_0)}{K_0(kR_0) H(k, l, R_0)} \left( 1 + \frac{l}{k} \frac{K_0(lR_0)}{K_1(lR_0)} \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} \right);$$

$$G_{12}(k, l, R_0) = \frac{l}{k} \frac{I_0(lR_0)}{K_0(kR_0) H(k, l, R_0)} \left( 1 + \frac{K_0(lR_0)}{K_1(lR_0)} \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} \right);$$

$$G_{21}(k, l, R_0) = \frac{I_1(kR_0)}{K_1(lR_0) H(k, l, R_0)} \left( 1 + \frac{K_1(kR_0)}{K_0(kR_0)} \frac{I_0(kR_0)}{I_1(kR_0)} \right);$$

$$G_{22}(k, l, R_0) = \frac{I_1(lR_0)}{K_1(lR_0) H(k, l, R_0)} \left( 1 + \frac{l}{k} \frac{K_1(kR_0)}{K_0(kR_0)} \frac{I_0(lR_0)}{I_1(lR_0)} \right);$$

$$H(k, l, R_0) = \left( 1 - \frac{l}{k} \frac{K_0(lR_0)}{K_1(lR_0)} \frac{K_1(kR_0)}{K_0(kR_0)} \right).$$

Поскольку дисперсионное уравнение (5) является слишком сложным для численного решения (и невозможным для аналитического), найдем предел малой вязкости этого уравнения. С этой целью воспользуемся разложением:

$$l = \sqrt{k^2 + \frac{\alpha}{\nu}} = k \sqrt{\frac{\alpha}{\nu k^2}} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\nu k^2}{\alpha} - \frac{1}{8} \left( \frac{\nu k^2}{\alpha} \right)^2 + O(\nu^3) \right),$$

а также асимптотическими формулами для модифицированных функций Бесселя [14]:

$$I_n(z) = \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left( 1 - \frac{4n^2 - 1}{8z} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!(8z)^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \right);$$

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z) \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{4n^2 - 1}{8z} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!(8z)^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \right);$$

$$I_n'(z) = \frac{\exp(z)}{\sqrt{2\pi z}} \left( 1 - \frac{4n^2 + 3}{8z} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 + 15)}{2!(8z)^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \right);$$

$$K_n'(z) = -\sqrt{\frac{\pi}{2z}} \exp(-z) \left( 1 + \frac{4n^2 + 3}{8z} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 + 15)}{2!(8z)^2} + O\left(\frac{1}{z^3}\right) \right);$$

где  $O$  – символ порядка [16]. В итоге для функций Бесселя, входящих в дисперсионное уравнение (5), получим разложения:

$$I_0(lR_0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{k} R_0} \exp\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\nu k^2}}\right) \left(\frac{\nu k^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \times$$

$$\times \left( 1 + \frac{1}{8} \frac{1}{k R_0} \sqrt{\frac{\nu k^2}{\alpha}} - \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{9}{32} \frac{1}{k^2 R_0^2} \right) \frac{\nu k^2}{\alpha} + O\left(\frac{3}{\nu^2}\right) \right);$$

$$I_1(IR_0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{kR_0}} \exp(kR_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\nu k^2}}) \left(\frac{\nu k^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \times \\ \times \left(1 - \frac{3}{8} \frac{1}{kR_0} \sqrt{\frac{\nu k^2}{\alpha}} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{15}{32} \frac{1}{k^2 R_0^2}\right) \frac{\nu k^2}{\alpha} + O\left(\nu^{\frac{3}{2}}\right)\right);$$

$$K_0(IR_0) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{kR_0}} \exp(-kR_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\nu k^2}}) \left(\frac{\nu k^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \times \\ \times \left(1 - \frac{1}{8} \frac{1}{kR_0} \sqrt{\frac{\nu k^2}{\alpha}} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{9}{32} \frac{1}{k^2 R_0^2}\right) \frac{\nu k^2}{\alpha} + O\left(\nu^{\frac{3}{2}}\right)\right);$$

$$K_1(IR_0) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{kR_0}} \exp(-kR_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\nu k^2}}) \left(\frac{\nu k^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \times \\ \times \left(1 + \frac{3}{8} \frac{1}{kR_0} \sqrt{\frac{\nu k^2}{\alpha}} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{15}{32} \frac{1}{k^2 R_0^2}\right) \frac{\nu k^2}{\alpha} + O\left(\nu^{\frac{3}{2}}\right)\right);$$

$$I_1'(IR_0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{kR_0}} \exp(kR_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\nu k^2}}) \left(\frac{\nu k^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \times \\ \times \left(1 - \frac{7}{8} \frac{1}{kR_0} \sqrt{\frac{\nu k^2}{\alpha}} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{57}{32} \frac{1}{k^2 R_0^2}\right) \frac{\nu k^2}{\alpha} + O\left(\nu^{\frac{3}{2}}\right)\right);$$

$$K_1'(IR_0) \sim -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{kR_0}} \exp(-kR_0 \sqrt{\frac{\alpha}{\nu k^2}}) \left(\frac{\nu k^2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{4}} \times \\ \times \left(1 + \frac{7}{8} \frac{1}{kR_0} \sqrt{\frac{\nu k^2}{\alpha}} - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{57}{32} \frac{1}{k^2 R_0^2}\right) \frac{\nu k^2}{\alpha} + O\left(\nu^{\frac{3}{2}}\right)\right).$$

Используя выписанные разложения, получим следующий вид дисперсионного уравнения в пределе малой вязкости:

$$\alpha^2 + 2\alpha\nu k^2 [1 - L(k, R_0, R)] - L(k, R_0, R) \times \\ \times \left[ \frac{\sigma k^2}{\rho R} (1 - k^2 R^2) + 4\pi\mu_0^2 \frac{k^2}{\rho} \left( kR \frac{K_1(kR)}{K_0(kR)} - 1 \right) \right] \times \\ \times \left( 1 - \sqrt{\frac{\nu k^2}{\alpha}} (g_1 - d_1) - \right. \\ \left. - \frac{\nu k^2}{\alpha} (g_2(k, R_0, R) + g_1(k, R_0, R)d_1(k, R_0, R) - d_2(k, R_0, R)) \right) = 0;$$

$$L(k, R_0, R) \equiv \frac{1}{kR} \frac{I_1(kR)}{I_0(kR)} \frac{\left(1 - \frac{I_1(kR_0)}{I_1(kR)} \frac{K_1(kR)}{K_1(kR_0)}\right)}{\left(1 + \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR)} \frac{K_0(kR)}{K_1(kR_0)}\right)};$$

$$g_1(k, R_0, R) \equiv \frac{I_0(kR_0)}{I_1(kR)} \frac{K_1(kR)}{K_1(kR_0)} \frac{\left(1 + \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR_0)} \frac{K_0(kR_0)}{K_1(kR_0)}\right)}{\left(1 - \frac{I_1(kR_0)}{I_1(kR)} \frac{K_1(kR)}{K_1(kR_0)}\right)};$$

$$g_2(k, R_0, R) = 2 + \frac{g_1(k, R_0, R)}{h(kR_0)};$$

$$h(kR_0) \equiv \left( \frac{K_0(kR_0)}{K_1(kR_0)} + \frac{1}{2kR_0} \right);$$

$$d_1(k, R_0, R) = \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR)} \frac{K_0(kR)}{K_1(kR_0)} \frac{\left(\frac{I_0(kR_0)}{I_1(kR_0)} + \frac{K_0(kR_0)}{K_1(kR_0)}\right)}{\left(1 + \frac{I_1(kR_0)}{I_0(kR)} \frac{K_0(kR)}{K_1(kR_0)}\right)};$$

$$d_2(k, R_0, R) = d_1^2(k, R_0, R)(1 - h(kR_0)).$$

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Grigor'ev A.I., Petrushov N.A., Shiryayeva S.O. *Surf Eng Appl Electrochem.* 2013, **49**(3), 199–204.
2. Cloupeau M., Prunet Foch B. *J Electrostat.* 1990, **25**, 165–184.
3. Jaworek A., Krupa A. *J Aerosol Sci.* 1999, **30**(7), 873–893.
4. Kim O.V., Dunn P.F. *Langmuir.* 2010, **26**, 15807–15813.
5. Tonks L. *Phys Rev.* 1935, **48**, 562–568.
6. Taylor G.I., McEwan A.D. *J Fluid Mech.* 1965, **22**(1), 1–15.
7. Kim H.H., Teramoto Y. et al. *J Aerosol Sci.* 2014, **76**, 98–114.
8. Pongrác B., Kim H.H. et al. *J Phys D Appl Phys.* 2014, **47**(315202), 1–10.
9. Verdoolda S., Agostinhoc L.L.F., Yurterib C.U., Marijnissenb J.C.M. *J Aerosol Sci.* 2014, **67**(2014), 87–103.
10. Inyong Park, Sang Bok Kim, Won Seok Hong, Sang Soo Kim. *J Aerosol Sci.* 2015, **89**, 26–30.
11. Френкель Я.И. *ЖЭТФ.* 1936, **6**(4), 348–350.
12. Левич В.Г. *Физико-химическая гидродинамика.* М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
13. Shiryayeva S.O., Lesnugina D.E., Grigor'ev A.I., Petrushov N.A. *Surf Eng Appl Electrochem.* 2016, **52**(5), 443–448.
14. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям.* М.: Наука, 1979. 830 с.
15. Ентов В.М., Ярин А.Л. *Итоги науки и техники. Сер. «Механика жидкости и газа».* 1984, **17**, 112–197.
16. Найфе А.Х. *Методы возмущений.* М.: Мир, 1976. 455 с.

### Summary

Analytically, in a linear approach on the dimensionless amplitude of capillary waves on the charged surface of a layer of a viscous conductive liquid on a metal wire, the dispersive equation is derived. It is shown that the wire exerts the stabilizing influence on capillary waves. The influence of a wire becomes essential only at great

values of its radius. Emergence of an electric charge on a layer of the liquid leads to complication of a range of the implemented movements of the liquid and to a quantitative change of values of frequencies, increments, and decrements.

*Keywords:* cylindrical liquid layer, charge, viscosity, conductivity, instability.