А.Н. Жаров, А.И. Григорьев

КАПИЛЛЯРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЗАРЯЖЕННОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия

Во многих технических и технологических приложениях приходится сталкиваться с анализом устойчивости заряженных пузырьков в жидкости [1]. В частности, с заряженными пузырьками приходится сталкиваться при исследованиях: акустической и гидродинамической кавитаций; флотации и электрофлотации [2]; электроразряда в жидкости [3, 4]; фильтрации [5]; барботажа [6] и теплообмена [7], а также при обсуждении возможности выделения солей тяжелых металлов из водных растворов с помощью электроразряда [8] и использования кавитации для поддержания реакций синтеза легких ядер [9,10].

Если микропузырек образуется в такого рода процессах, то он может иметь избыточный электрический заряд. Его появление может быть связано в основном с двумя механизмами: оседанием ионов на стенках из внутренней области, и поступлением на стенки пузырька ионов окружающей жидкости или ионов примеси. Первый механизм имеет место при электроразряде, поскольку в этом случае образуется полость, заполненная плазмой. И если характерное время диффузии носителей зарядов разных знаков в плазме различно и меньше характерного времени рекомбинации, то часть заряда осядет на стенках полости, что и приведет к ее заряжению. Второй механизм характерен для пузырька, образовавшегося в рабочей камере электрогидродинамического насоса, где преобразование электрической энергии в механическую происходит за счет движения электроотрицательных молекул примеси. Оседание этих молекул на стенках пузырька и приводит к его заряжению.

Если имеет место первый механизм появления избыточного заряда, то его величина в основном определяется соотношением времен рекомбинации и диффузии носителей заряда в плазме. В случае же второго механизма величина заряда на стенке пузырька зависит от свойств поверхности раздела сред. В обоих случаях величина заряда на пузырьке может составить значительную величину и существенно повлиять на устойчивость пузырька.

1. Рассмотрим виртуально образовавшийся пузырек радиуса R_0, несущий заряд Q, находящийся в жидкости плотности ρ, кинематической вязкости ν, диэлектрической проницаемости ε. Будем считать, что в пузырьке находится совершенный газ давления P_{go}, подчиняющийся политропическому закону с показателем политропы γ и насыщенный пар давления P_V. Давление жидкости в окрестности неподвижного пузырька обозначим P_∞, а коэффициент поверхностного натяжения на границе жидкость – газ – σ.

На границу пузырька будет действовать результирующее давление [11]:

$$P(R) = P_V + P_{go}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R^4} - \frac{2\ \sigma}{R} - P_\infty, \tag{1}$$

где R – текущий радиус пузырька. Если $P(R)=0$, то пузырек находится в равновесном состоянии, если же $P(R)>0$, – расширяется, если $P(R)<0$, – сжимается.

Решая краевую задачу о произвольных движениях границы заряженного пузырька в жидкости, учтем реальные величины плотностей жидкости и газа в пузырьке, что позволит в первом

© Жаров А.Н., Григорьев А.И., Электронная обработка материалов, 2001, № 4, С. 15–21.

порядке малости по величине скорости среды пренебречь движением газа в пузырьке. Это возможно, поскольку из интеграла Коши-Лагранжа следует, что движение среды приводит к изменению давления на величину $\delta P \sim \rho\, \partial\varphi / \partial t$, пропорциональную плотности. Плотность же большинства жидкостей на три порядка больше плотности газа, поэтому в уравнении баланса давлений на границе раздела сред вкладом от изменения давления в газе можно пренебречь по сравнению с изменением давления в жидкости, что дает нам право считать газ неподвижным.

Математическая формулировка обсуждаемой линеаризованной задачи представлена уравнением неразрывности жидкости [12]:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0; \tag{2}$$

и уравнением Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{u} . \tag{3}$$

На границе раздела сред, описываемой уравнением

$$F(\vec{r}, t) = r - R(t) - \xi(\vartheta, \varphi, t), \tag{4}$$

должны выполняться граничные условия:

кинематическое

$$r = R(t): \qquad \frac{dR}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = u_r; \tag{5}$$

динамические

$$r = R(t): \quad \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \vartheta} - \frac{u_\vartheta}{r} = 0; \tag{6}$$

$$r = R(t): \qquad \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r} = 0; \tag{7}$$

$$r = R(t) + \xi: \quad P + P_\sigma - 2\rho \nu \frac{\partial u_r}{\partial r} - P_V - P_g - P_q = 0 . \tag{8}$$

К системе уравнений (2)–(8) необходимо добавить уравнение состояния парогазовой смеси в пузырьке:

$$P(V) = P_V + P_g; \tag{9}$$

условие постоянства объема пузырька при колебаниях его формы, не сопровождающихся изменением объема:

$$\int_V dV = \frac{4\pi}{3} R^3(t); \tag{10}$$

и условие неподвижности центра масс

$$\int_V \vec{r}\, dV = 0, \tag{11}$$

где интегрирование ведется по всему объему пузырька.

2. Для скаляризации векторной краевой задачи (2)–(11), представим векторное поле скоростей в виде трех ортогональных составляющих [13]:

$$\vec{u} = \overrightarrow{\hat{N}_1} \cdot \psi_1(\vec{r}, t) + \overrightarrow{\hat{N}_2} \cdot \psi_2(\vec{r}, t) + \overrightarrow{\hat{N}_3} \cdot \psi_3(\vec{r}, t) . \tag{12}$$

где

$$\overrightarrow{\hat{N}_1} = \nabla; \quad \overrightarrow{\hat{N}_2} = \nabla \times \vec{r}; \quad \overrightarrow{\hat{N}_3} = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{r}\right);$$

$$\overrightarrow{\hat{N}_1}^{+} = -\nabla; \quad \overrightarrow{\hat{N}_2}^{+} = \vec{r} \times \nabla; \quad \overrightarrow{\hat{N}_3}^{+} = \left(\vec{r} \times \nabla\right) \times \nabla; \tag{13}$$

а $+$ означает эрмитовое сопряжение, $\overrightarrow{\hat{N}_j}$ – векторные дифференциальные операторы.

Подставляя (12) в (2) и используя (13), получаем

$$\Delta\,\psi_1 = 0\,. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) в жидкости (при $r > R$) легко выписывается в виде ряда по сферическим функциям:

$$\psi_1\left(\vec{r},t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{m=n}\frac{C_{nm}^{1}(t)}{r^{n+1}}Y_{nm}(\vartheta,\varphi)\,. \tag{15}$$

В (15) слагаемые, соответствующие нулевой моде $n=0$, отвечающие радиальным осцилляциям стенки пузырька и колебаниям его формы в окрестности сферы, происходящие без изменения объема, отделяются:

$$\psi_1\left(\vec{r},t\right) = \frac{C_{00}^{1}(t)}{r} + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{m=n}\frac{C_{nm}^{1}(t)}{r^{n+1}}Y_{nm}(\vartheta,\varphi) = \psi_1^{(r)} + \psi_1^{(s)}\,, \tag{16}$$

где $\psi_1^{(s)}$ описывает капиллярные колебания формы при постоянном объеме, а $\psi_1^{(r)}$ – радиальные движения.

Учитывая (16), разложение поля скоростей (12) запишем в виде

$$\vec{u} = \overrightarrow{\hat{N}_1}\cdot\psi_1^{(r)}(\vec{r},t) + \overrightarrow{\hat{N}_1}\cdot\psi_1^{(s)}(\vec{r},t) + \overrightarrow{\hat{N}_2}\cdot\psi_2(\vec{r},t) + \overrightarrow{\hat{N}_3}\cdot\psi_3(\vec{r},t)\,. \tag{17}$$

По аналогии с потенциальной составляющей скорости возмущение поверхности пузырька разложим в ряд по сферическим функциям

$$\xi = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{m=n} Z_{nm}(t)\,Y_{nm}\,, \tag{18}$$

где учтено условие постоянства объема (10) при капиллярных колебаниях пузырька, которое дает $Z_{00}(t)=0$ и условие неподвижности центра масс пузырька (11) – $Z_{1m}(t)=0$.

Давление в жидкости, лапласовское и электрическое давления представим так же в виде двух слагаемых, отвечающих за радиальные колебания (с индексом (*r*)) и за колебания формы (с индексом (*s*)) [14]

$$P = P^{(r)} + P^{(s)}; \tag{19}$$

$$P_\sigma = \frac{2\sigma}{R(t)} + \frac{\sigma}{R^2(t)}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{m=n}(n-1)(n+2)\,Z_{nm}(t)\,Y_{nm} \equiv P_\sigma^{(r)} + P_\sigma^{(s)}\,; \tag{20}$$

$$P_q = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R^4(t)} + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon R^5(t)}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{m=n}(n-1)\,Z_{nm}(t)\,Y_{nm} \equiv P_q^{(r)} + P_q^{(s)}\,. \tag{21}$$

Подставив разложение (17) в уравнение Навье–Стокса (3) и используя (19), получаем четыре уравнения на скалярные функции

$$P^{(r)} = P_\infty - \rho\frac{\partial\psi_1^{(r)}}{\partial t}\,; \tag{22}$$

$$P^{(s)} = -\rho\frac{\partial\psi_1^{(s)}}{\partial t}\,; \tag{23}$$

$$\frac{\partial\psi_j}{\partial t} = \nu\,\Delta\psi_j\,; \qquad j=2,3\,. \tag{24}$$

С учетом того, что $n \geq 2$, решение уравнения (24), ограниченное при $r\to\infty$, запишем в виде [15]:

$$\psi_j = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=-n}^{m=n} C_{nm}^{j}k_n\left(\sqrt{\frac{S}{\nu}}\,r\right)Y_{nm}\,e^{St}\,, \qquad j=2,3\,. \tag{25}$$

где $k_n(z)$ – модифицированная сферическая функция Бесселя третьего рода, S – собственное число, имеющее размерность частоты.

Подставляя (17) в граничные условия (5)–(8), используя (18)–(24) получаем

$$r = R(t): \quad \frac{dR}{dt} = \frac{\partial \psi_1^{(r)}}{\partial r}; \tag{26}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \psi_1^{(s)}}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta_\Omega \psi_3; \tag{27}$$

$$2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi_1^{(s)}}{r}\right) + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\left(2 + \Delta_\Omega\right)\psi_3 = 0; \tag{28}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi_2}{r}\right) = 0; \tag{29}$$

$$P^{(r)} + P_\sigma^{(r)} - 2\rho\nu\frac{\partial^2 \psi_1^{(r)}}{\partial r^2} - P_V - P_g - P_q^{(r)} = 0; \tag{30}$$

$$P^{(s)} + P_\sigma^{(s)} - 2\rho\nu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \psi_1^{(s)}}{\partial r} - \frac{1}{r}\Delta_\Omega \psi_3\right) - P_q^{(s)} = 0\cdot \tag{31}$$

Из (26)–(31) видно, что задача разбивается на две: задачу определения центрально симметричных радиальных осцилляций пузырька и задачу определения спектра капиллярных волн на поверхности пузырька постоянного объема.

3. Рассмотрим первую из них. Подставим выражение для $\psi_1^{(r)} = C_{00}^1(t)/r$ в кинематическое граничное условие (26), определим константу $C_{00}^1(t)$, и получим выражение

$$\psi_1^{(r)} = -\frac{R^2(t)}{r}\frac{dR(t)}{dt}\cdot \tag{32}$$

Подставляя (32) в динамическое граничное условие (30) и учитывая (1), (20), (21), получим уравнение, описывающее радиальные движения пузырька

$$R(t)\frac{d^2R(t)}{dt^2} + 2\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2 + \frac{4\nu}{R(t)}\frac{dR(t)}{dt} - \frac{1}{\rho}\mathrm{P}(R(t)) = 0. \tag{33}$$

Данное уравнение является обыкновенным однородным нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка. Оно отличается от хорошо известного уравнения Рэлея (выведенного из нелинеаризованного уравнения Навье–Стокса) только коэффициентом при квадрате первой производной, поскольку получено из уравнений линейной гидродинамики. Однако на линейный анализ устойчивости этот факт не оказывает влияния, поэтому исследование радиальных движений пузырька в жидкости можно провести путем линеаризации уравнения (33) в окрестности равновесного состояния (точки покоя), характеризующегося условием $\mathrm{P}(R) = 0$ (см. например [11]). В частности, представляя радиус пузырька в виде $R(t) = R + \delta R(t)$, где $\delta R(t)$ – величина первого порядка малости, и подставляя его в (33), получим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$R\frac{d^2\delta R(t)}{dt^2} + \frac{4\nu}{R}\frac{d\,\delta R(t)}{dt} - \frac{1}{\rho}\frac{d\,\mathrm{P}(R)}{dR}\,\delta R(t) = 0, \tag{34}$$

для которого характеристическое уравнение имеет вид:

$$R\lambda^2 + \frac{4\nu}{R}\lambda - \frac{1}{\rho}\frac{d\,\mathrm{P}(R)}{dR} = 0\cdot \tag{35}$$

Откуда

$$\lambda = -\frac{2\nu}{R^2} \pm \sqrt{\frac{4\nu^2}{R^4} + \frac{1}{\rho R}\frac{d\,\mathrm{P}(R)}{dR}}\,. \tag{36}$$

Из (36) видно, что радиальные движения пузырька $\sim e^{\lambda t}$ могут быть как устойчивы, так и неустойчивы в зависимости от величины и знака производной *dP(R)/dR*, которая для различных равновесных состояний пузырька может иметь разные знаки. Подробный анализ устойчивости радиальных осцилляций пузырька дан в [11] и поэтому не будем на нем останавливаться более детально.

4. Для исследования устойчивости капиллярных колебаний формы пузырька при постоянном объеме примем, что возмущение поверхности ξ и потенциальная функция $\psi_1^{(s)}$ зависят от времени экспоненциально e^{St}, то есть положим $Z_{nm}(t) = Z_{nm}\, e^{St}$ и $C_{nm}^1(t) = C_{nm}^1\, e^{St}$.

Поскольку в выражении $R(t) = R + \delta R(t)$, зависящая от времени компонента $\delta R(t)$ – величина первого порядка малости, граничные условия (27) – (29), (31) будем относить к равновесному состоянию $r = R$. С учетом вышесказанного подстановка (16), (18), (20), (21), (23), (25) в (27)–(29), (31) с учетом рекуррентных соотношений для модифицированных сферических функций Бесселя третьего рода [15]

$$\frac{d\,k_n(z)}{d\,z} = -\frac{n+1}{z}\,k_n(z) - k_{n-1}(z);$$

$$\frac{d^2 k_n(z)}{d\,z^2} = \left(1 + \frac{(n+1)(n+2)}{z^2}\right) k_n(z) + \frac{2}{z}\,k_{n-1}(z); \tag{37}$$

приводит к дисперсионному уравнению вида

$$S^2 + \frac{2\nu S(n+2)}{R^2}\left(2n+1 - \frac{2(n^2-1)}{R}\sqrt{\frac{\nu}{S}}\,\frac{k_{n-1}\left(\sqrt{S\nu^{-1}}R\right)}{k_n\left(\sqrt{S\nu^{-1}}R\right)}\right)\left(1 + \frac{2}{R}\sqrt{\frac{\nu}{S}}\,\frac{k_{n-1}\left(\sqrt{S\nu^{-1}}R\right)}{k_n\left(\sqrt{S\nu^{-1}}R\right)}\right)^{-1} +$$

$$+\frac{(n+1)(n-1)(n+2)}{\rho\,R^3}\left(\sigma - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon(n+2)\,R^3}\right) = 0\,. \tag{38}$$

Анализ уравнения (38), определяющего спектр капиллярных движений поверхности пузырька, реализующихся при постоянном объеме, можно провести численно, но в асимптотических ситуациях мало- и сильновязкой жидкости нетрудно получить аналитические зависимости.

5. Рассмотрим случай маловязкой жидкости. При этом будем считать, что вязкость жидкости настолько мала, что $\nu << R^2 S$. В этом случае аргумент сферической цилиндрической функции $\sqrt{S\nu^{-1}}R >> 1$, а отношение функций

$$\frac{k_{n-1}\left(\sqrt{S\nu^{-1}}R\right)}{k_n\left(\sqrt{S\nu^{-1}}R\right)} = 1 + O\left(\sqrt{\nu}\right). \tag{39}$$

Подставляя (39) в дисперсионное уравнение (38), получаем

$$S^2 + \frac{2\nu S(n+2)(2n+1)}{R^2} + \frac{(n+1)(n-1)(n+2)}{\rho\,R^3}\left(\sigma - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon(n+2)\,R^3}\right) = 0\,. \tag{40}$$

Откуда комплексная частота определяется выражением

$$S = -\frac{\nu(n+2)(2n+1)}{R^2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\nu^2(n+2)^2(2n+1)^2}{R^4}}\,, \tag{41}$$

где ω_0^2 обозначен квадрат частоты капиллярных колебаний пузырька в идеальной жидкости

$$\omega_0^2 = \frac{(n+1)(n-1)(n+2)}{\rho\,R^3}\left(\sigma - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon(n+2)\,R^3}\right). \tag{42}$$

Из (41) видно, что неустойчивость пузырька по отношению к деформации при постоянном объеме, характеризующаяся условием $S \geq 0$, наступает, если

$$\begin{cases} \sigma - \dfrac{Q^2}{4\pi\varepsilon(n+2)\ \ R^3} \le 0; \\ P(R) = P_V + P_{g0}\left(\dfrac{R_0}{R}\right)^{3\gamma} + \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon R^4} - \dfrac{2\ \sigma}{R} - P_\infty = 0, \end{cases} \tag{43}$$

где второе уравнение учитывает тот факт, что задача решается линеаризацией в окрестности равновесного состояния.

Из (43) видно, что пузырек становится неустойчивым, когда электрическое давление равно лапласовскому, а давление парогазовой смеси равно давлению в жидкости. Данный вывод физически ясен, поскольку если давление смеси в пузырьке больше давления в жидкости, то любое тепловое искажение формы поверхности сглаживается разностью между высоким внутренним давлением смеси и небольшим давлением в жидкости. Если же давление парогазовой смеси меньше давления в жидкости, то тепловое искажение поверхности будет увеличиваться под действием перепада давлений: высокого давления в жидкости и низкого парогазовой смеси в пузырьке.

Учитывая, что неустойчивой становится прежде всего вторая мода, из (43) легко определить условие неустойчивости по отношению к изменению формы пузырька

$$\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon\sigma R_0^3} \ge \sqrt[\gamma]{\frac{P_{g0}}{P_\infty - P_V}}\ . \tag{44}$$

Кроме того, из выражения (41) для комплексной частоты видно, что декремент затухания поверхностных колебаний пузырька в слабовязкой жидкости пропорционален вязкости и определяется выражением

$$\operatorname{Re} S = -\frac{\nu\,(n+2)\,(2n+1)}{R^2}\,, \tag{45}$$

известным еще Лэмбу [16].

6. Для случая сильновязкой жидкости, когда $\nu >> R^2 S$, аргумент сферической функции стремится к нулю, а отношение функций

$$\frac{k_{n-1}\left(\sqrt{S\nu^{-1}}R\right)}{k_n\left(\sqrt{S\nu^{-1}}R\right)} = \frac{R}{2n-1}\sqrt{\frac{S}{\nu}} + O\left(\frac{1}{\nu}\right), \tag{44}$$

дисперсионное уравнение (38) принимает вид

$$S^2 + \frac{2\nu S}{R^2}\frac{(n+2)\,(2n^2+1)}{(2n+1)} + \frac{(n+1)\,(n-1)\,(n+2)}{\rho\,R^3}\left(\sigma - \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon(n+2)\,R^3}\right) = 0\,\cdot \tag{45}$$

Из которого находим

$$S_1 = -\frac{\omega_0^2\ R^2}{2\nu}\frac{2n+1}{(n+2)(2n^2+1)} + O\left(\frac{1}{\nu^3}\right); \quad S_2 = -\frac{2\nu}{R^2}\frac{(n+2)(2n^2+1)}{2n+1} + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\cdot \tag{46}$$

Из (46) видно, что неустойчивость пузырька для сильновязкой жидкости, как и для маловязкой, наступает при $\omega_0^2 \le 0$, но величина инкремента неустойчивости будет весьма малой, так как $\omega_0 << \nu\,R^{-2}$. Интересно отметить, что величина инкремента неустойчивости заряженного пузырька, как и для заряженной вязкой капли [17] оказывается обратно пропорциональной вязкости.

При $\omega_0^2 > 0$ оба корня (46) отрицательны и определяют декременты затухания капиллярных движений поверхности пузырька. Причем первый из корней много меньше второго и поэтому, как и для случая волн на плоской поверхности вязкой жидкости [18], он и представляет наибольший интерес с физической точки зрения, поскольку движения, соответствующие второму корню, быстро затухают.

7. Заключение. Неустойчивость пузырька по отношению к изменению формы имеет место только в случае, когда давление в жидкости больше давления насыщенных паров газа в пузырьке. Неустойчивость же пузырька по отношению к изменению объема, напротив, наблюдается только в том случае, если давление жидкости меньше давления насыщенного пара в пузырьке. При этом наличие заряда на пузырьке приводит к существенному снижению критического давления в жидкости, при котором наступает неустойчивость формы. Увеличение вязкости жидкости приводит к уменьшению инкремента неустойчивости. Влияние вязкости на декремент затухания является различным для случаев мало- и сильновязкой жидкости. Так, в маловязкой жидкости декременты затухания поверхностной и радиальной составляющих увеличиваются линейно с увеличением вязкости. А при большой вязкости декремент поверхностной составляющей уменьшается, в то время как радиальной продолжает увеличиваться.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жаров А.Н., Ширяева С.О.* Заряженные пузырьки в жидкости (обзор) // Электронная обработка материалов. 1999. № 6. С. 9–22.
2. *Дрояронов А.Л.* Теоретические основы флотационного комплекса // Там же. 1993. № 4. С. 39–49.
3. *Скорых В.В.* Влияние пузырьков газа на зажигание разряда в воде // ЖТФ.1986. Т. 56. Вып. 8. С. 1569–1572.
4. *Климкин В.Ф.* Механизмы электрического пробоя воды с острийного анода в наносекундном диапазоне // Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 4. С. 54–58.
5. *Хасанов М.М.* Исследование устойчивости фильтрации жидкостей с зародышами газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1994. № 2. С. 66–73.
6. *Зеленко В.Л., Мясников В.П.* Стационарные режимы при барботаже газа в колонне с вертикальными вставками // Изв. АН. СССР. МЖГ. 1992. № 3. С.59–68.
7. *Болога М.К., Климов С.М., Чучкалов С.И.* Теплообмен и гидродинамика двухфазных потоков при электрическом воздействии // Электронная обработка материалов. 1992. № 2. С. 52–57.
8. *Малинин А.Н., Сабинин В.Е., Сидоров А.Н.* Эффекты взаимодействия электрического тока на водные растворы электролитов // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 1. С. 57–61.
9. *Липсон А.Г., Клюев В.А., Дерягин Б.В. и др.* Наблюдение нейтронов при кавитиционном воздействии на дейтерийсодержащие среды.// Письма в ЖТФ. 1990. Т. 16. Вып. 19. С. 89–93.
10. *Липсон А.Г., Ляхов Б.Ф., Дерягин Б.В. и др.* Воспроизводимая эмиссия нейтронов при комбинационном воздействии кавитации и электролиза на поверхность титанового катода в электролитах на основе тяжелой воды // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17. Вып. 21. С. 33–37.
11. *Григорьев А.И., Жаров А.Н.* Устойчивость равновесных состояний заряженных пузырей в диэлектрической жидкости // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 4. С. 8–13.
12. *Жакин А.И.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 14–20.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М., 1986.
14. *Ширяева С.О., Лазарянц А.Э., Григорьев А.И. и др.* Метод скаляризации векторных краевых задач // Препринт ИМРАН №27. Ярославль. 1994.
15. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1982.
16. Справочник по специальным функциям. М., 1979.
17. *Ламб Г.* Гидродинамика. М., 1947.
18. *Ширяева С.О.* О влиянии вязкости на характерное время развития неустойчивости заряженной капли // ЖТФ. 2000. Т.70. Вып. 9. С. 30–36.
19. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., 1952.

Поступила 24.01.2001

Summary

The stability and capillary fluctuations of charged bubble in incompressible viscous liquid relate to virtual deformation of form and volume are researched. The zones of physical parameters under which exists instability of axial symmetric surface and central symmetric radial moving of the bubble wall are defined. The analytical asymptotic expressions for rate of damping are received for axial symmetric capillary fluctuations of bubble when viscosity is small or heavy.