

ЭЛЕКТРОКОНВЕКТИВНОЕ ВРАЩЕНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ВО ВНЕШНИХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

*Государственный аграрный университет Молдовы,
ул. Мирчешть, 44, г. Кишинев, MD-2049, Республика Молдова, f.grosu@mail.ru

**Институт прикладной физики АНМ,
ул. Академией, 5, г. Кишинев, MD-2028, Республика Молдова, mbologa@phys.asm.md

1. Вводные замечания. Рассматриваются вращательные движения диэлектрической жидкости под воздействием внешних электрических полей, в частности, в двух взаимно перпендикулярных полях $(\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2)$, то есть скрещенных. Течения одномерные в том смысле, что характеризуются только одной составляющей скорости – азимутальной, равной $\vec{v} = v_\phi \cdot \vec{e}_\phi$, где $v_\phi \equiv v(r, z)$, \vec{e}_ϕ – азимутальный орт; ϕ, r, z – цилиндрические координаты. Независимость величины скорости от циклической координаты ϕ является следствием предполагаемой несжимаемости жидкости ($\nabla \vec{v} = 0$).

Примером вращательных электродиффузионных движений может служить ячеистая электрическая конвекция в поле плоскопараллельного (горизонтального) конденсатора [1], представляющая собой параллельные валы, в которых жидкость совершает движение, близкое к круговому. Однако более типичный случай – вращение слабопроводящей жидкости в скрещенном электрическом и магнитном полях $(\vec{E} \perp \vec{B})$ под действием силы Лоренца $\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B} = \sigma \vec{E} \times \vec{B}$ [2].

Непосредственное отношение к предпринятому здесь исследованию имеет работа [3], авторы которой наблюдали и изучали вращение тонкой горизонтальной пленки воды с примесью глицерина и мощного порошка под действием двух скрещенных электрических полей, созданных двумя парами плоских вертикальных электродов, между двумя из них пропускался электрический ток $\vec{j} = \sigma \vec{E}_1$. Эти электроды были медными, хорошо очищенными и смачивающимися жидкостью. При расстояниях $\sim (1 \div 2)$ см между ними разность потенциалов составляла $V \sim (4 \div 60)$ В. Другая пара электродов, согласно [3], создавала поле $E_2 \sim 1$ кВ/см таким образом, что $\vec{j} \perp \vec{E}_2$ при максимальном эффекте вращения пленки. Пленка составляла по толщине микроны и меньше, вплоть до наномасштабов [3]. Было установлено, что вращение определяется векторным произведением $\vec{j} \times \vec{E}$ ($\vec{j} \sim \vec{E}_1, \vec{E} \equiv \vec{E}_2$), причем начиналось при некотором критическом значении произведения $V_{кр} \cdot E_{кр}$ ($E_1 = V/d$). Кроме того, угловая скорость возрастала по мере приближения к центру вращения (ячейки). Интересным является еще один результат – при наложении на пленку сверху сетки из шелковой нити внутри ячеек сетки, также прямоугольной (или квадратной) формы, возникали ячеистые вращения в том же направлении, что и в исходной пленке. Эти эффекты не нашли полного объяснения в работе [3], далее мы еще вернемся к ним.

2. Особенности поляризации диэлектрической жидкости в электростатическом поле. Для объяснения вращательных эффектов жидкостей в электрическом поле напрашивается предположение о причастности к этим эффектам момента сил, действующих на поляризованный диэлектрик:

$$\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E}, \quad (1)$$

где \vec{P} – вектор поляризации (дипольный момент) диэлектрика; \vec{E} – напряженность поля, предпола-

гаемая постоянной. Оценки по формуле II закона Ньютона для вращательного движения $M = I \cdot \varepsilon_*$, где ε_* – угловое ускорение, I – момент инерции слоя жидкости, показывают, что формула (1) дает правдоподобное физическое толкование наблюдаемых эффектов, в частности [3]. Поэтому физический механизм взаимодействия поля с жидкостью будем искать в особенностях поляризации жидкостей в электрическом поле.

2.1. *Случай идеального диэлектрика.* В идеальном диэлектрике (по определению) отсутствуют свободные носители зарядов, то есть их объемная плотность $\rho \equiv 0$, и дипольный момент всего диэлектрика или его части объемом V определяется поверхностной плотностью связанных зарядов σ_* на поверхности этого объема (рис. 1,а):

$$\vec{P} = \int_{(S)} \vec{r} \cdot \sigma_* \cdot dS, \quad \int_{(S)} \sigma_* dS = 0. \quad (2)$$

Более того, имеет смысл понятие плотности вектора поляризации \vec{p} :

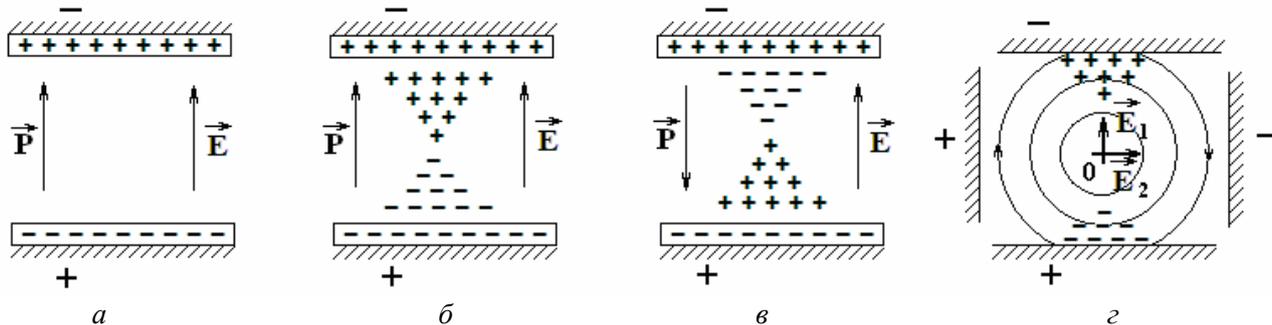
$$\vec{p} \equiv \frac{d\vec{P}}{dV} \Rightarrow \vec{P} = \int_{(V)} \vec{p} dV \quad (3)$$

как дипольный момент единицы объема V . Далее можно ввести плотность момента силы $\vec{\mu}$ с учетом (1), равного:

$$\vec{\mu} \equiv \vec{p} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{M} = \int_{(V)} \vec{\mu} dV. \quad (4)$$

Физически \vec{p} означает сумму дипольных моментов всех молекул в единице объема, а $\vec{\mu}$ – моментов сил или пар в единице объема.

2.2. *Случай неидеального (слабопроводящего) диэлектрика.* В неидеальном диэлектрике содержатся в малых концентрациях свободные носители зарядов (ионы, примеси и т.д.), которые под действием внешнего поля перемещаются в отличие от связанных зарядов не на микроскопические, а на макроскопические расстояния. Таким образом, наряду с молекулярной поляризацией в неидеальных диэлектриках происходит и “молярная” (макроскопическая) поляризация, когда у электродов образуются свободные объемные заряды. При этом, однако, встречаются два типа молярной поляризации: гетерозарядная (рис. 1,б) и гомозарядная (рис. 1,в). В первом случае у электродов образуются заряды противоположного знака, во-втором – знака электрода. Гетерополяризация обычно наблюдается у весьма чистых высокоомных диэлектрических жидкостей, а гомополяризация – у менее чистых, содержащих примеси, особенно увлажненных. Гетерополяризация обусловлена простым разделением малоактивных ионов, неспособных полностью разряжаться и перезаряжаться на электродах, в противоположность случаю носителей зарядов при гомополяризации. Наиболее важное отличие между гетеро- и гомополяризациями состоит в том, что в первом случае вектор поляризации и вектор напряженности поля параллельны, а во втором – антипараллельны.



Поляризация жидкого диэлектрика (вид сверху). а) идеальный диэлектрик; б) неидеальный – гетерополяризация; в) неидеальный – гомополяризация; г) схема скрещенных полей

Заметим также, что наличие в жидкости примесей полярных молекул, в частности воды, благоприятствует увеличению плотности объемных зарядов (и общей поляризации) благодаря сольватации ионов этими молекулами и уменьшению их подвижностей (ионов).

* В электродинамике \vec{P} называется вектором поляризации или дипольным моментом диэлектрика.

Объемная поляризация \vec{P}_V , которая алгебраически должна складываться с поверхностной (2), вычисляется по общим формулам:

$$\vec{P}_V = \int_{(V)} \vec{r} \rho dV, \quad \int_{(V)} \rho dV = 0, \quad (5)$$

где последняя является условием электронейтральности объема V , поляризация которого вычисляется. Отсюда, в частности, следует, что нельзя, например, говорить о дипольном моменте верхней части объема конденсатора на рис. 1,б,в, так как для этого объема нарушится последнее условие – (5). По этой причине лишено смысла понятие плотности объемной поляризации (\vec{p}_V), аналогичное (\vec{p}) случаю идеального диэлектрика. Плотность механического момента в случае неидеального диэлектрика определится формулой

$$\vec{\mu} = \vec{r} \times \vec{f}, \quad \vec{f} = \rho \vec{E} \quad (6)$$

в отличие от формулы (4) для идеального диэлектрика.

3. Об устойчивости гидродинамического равновесия. На схемах рис. 1,а,б,в векторы \vec{P} и \vec{E} параллельны, поэтому момент сил $\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E} = 0$, и, следовательно, жидкость находится в состоянии механического равновесия, которое, однако, может быть устойчивым или неустойчивым. Для решения вопроса о типе равновесия, следовательно, и о том, когда следует ожидать возникновения движения, воспользуемся принципом Рэля [4], согласно которому, если при возможном перемещении жидкости совершается отрицательная элементарная работа ($\delta A < 0$), то равновесие устойчиво и неустойчиво в противном случае. Следуя этому принципу, придаем жидкости малый поворот, скажем, по ходу часовых стрелок на угол $\overline{\delta\varphi}$, предполагая, что вслед за жидкостью на этот угол повернется и вектор \vec{P} (предположение о “вмороженности зарядов”). Совершаемая при этом элементарная работа окажется

$$\delta A = -(\vec{P} \cdot \vec{E}) \cdot (\overline{\delta\varphi})^2. \quad (7)$$

Отсюда следует: гетерополяризация (рис. 1,а,б) устойчива ($\vec{P} \cdot \vec{E} > 0$), а гомополяризация (рис. 1,в) – неустойчива. Заметим, что к аналогичным выводам приходим и с позиций не поляризации жидкости, а электризации [1], именно: $\nabla \rho \cdot \vec{E} > 0$ – устойчивость, $\nabla \rho \cdot \vec{E} < 0$ – неустойчивость (рис. 1,б,в).

А теперь представим, что на рис. 1,а,б,в, установлено по бокам еще по паре плоскопараллельных обкладок конденсатора, создавших второе скрещенное поле \vec{E}_2 , согласно схеме рис. 1,г. В начальный момент включения поля \vec{E}_2 на поляризованный диэлектрик дипольным моментом \vec{P}_1 возникнет механический момент

$$\vec{M}_{12} = \vec{P}_1 \times \vec{E}_2, \quad (8)$$

направленный по ходу часовых стрелок в случаях гетерополяризации (рис. 1,а,б) и против – в случае гомополяризации (рис. 1,в). Следовательно, в момент включения поля можно ожидать появление сдвига жидкости по ходу часовых стрелок в первых двух случаях и против – в третьем. Отсюда вытекает, что по результату такого фактического эксперимента можно было бы судить о типе поляризации и, как следствие, о типе жидкости. Можно было бы предположить, что жидкость будет и далее вращаться. Однако этого не случится, так как вскоре после кратковременного поворота жидкости общий вектор поляризации $\vec{P}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$ станет параллельным суммарному полю \vec{E} , то есть

$$\vec{P}(\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \parallel (\vec{E}_1 + \vec{E}_2).$$

Для получения непрерывного вращения жидкости представляются два пути. Можно создать бегущее круговое электрическое поле или воспользоваться методом [3]. Надо полагать, что в этих опытах [3] одно поле (\vec{E}) служило для поляризации среды, а другое, обуславливающее ток \vec{j} , – для деполяризации (или электронейтрализации) и при этом механический момент определяется формулой (8). Если допустить, что в опытах именно эта идея реализовалась, то тогда $\vec{P}_1 \sim \vec{E}_1 \sim \vec{E}$, а $\vec{E}_2 \sim \vec{j}$, и становится понятным, почему движущим фактором вращательного движения было “век-

торное произведение” $\vec{M}_{12} \sim \vec{E} \times \vec{j}$, на что указывали сами авторы [3]. Тот факт, что наложение на поверхность пленки сетки из шелковых нитей приводило к возникновению ячеистой структуры, причем во всех ячейках жидкость вращалась в том же направлении, что и вначале, говорит о том, что физическая природа вектора поляризации \vec{P} соответствует случаю идеального диэлектрика, когда по всей поверхности пленки имеется однородная поляризация с имеющей смысл плотностью поляризации $\vec{p} = d\vec{P} / dV$. Таким образом, в общих чертах опытам [3] дано объяснение. Далее попытаемся приближенно решить задачу о вращении жидкости в системе электродов рис. 1,2.

4. Задача о вращении диэлектрической жидкости в скрещенных электрических полях.

Пусть горизонтальный слой диэлектрической жидкости толщиной h занимает пространство квадратной ячейки, ее вертикальные стенки одновременно служат пластинами двух плоскопараллельных конденсаторов согласно рис. 1,2. Расстояние между противоположными электродами $2R$. С целью придания пространству, в котором должна вращаться жидкость, цилиндрической формы предполагаем, что в ячейку вписан тонкостенный вертикальный цилиндр из диэлектрического материала, электрофизические параметры ε и σ совпадают или близки к таковым для рассматриваемой жидкости (штрих на рис. 1,2). Более того, для приближения условий задачи к опытам [3], будем считать, что конструкция такова, что боковые электроды (\vec{E}_2) электрически непосредственно контактируют с жидкостью, так что по направлению \vec{E}_2 течет ток $\vec{j} = \sigma \vec{E}_2$ и у этих электродов объемный заряд не возникает ($\vec{P}_2 = 0$). С другой стороны, наличие цилиндра обеспечивает цилиндрическую симметрию ЭГД течения и выполнение одного из гидродинамических условий задачи – равенство нулю скорости при $r = R$ (см. далее). Как видно из рис.1,2, на нижние и верхние слои жидкости будут действовать касательные силы вдоль поверхности пластин плотностью (6), причем предположим $f_\varphi \equiv f(r, \varphi)$ – периодическая по φ функция. Это все, что касается неидеальных диэлектриков, для идеальных диэлектриков движущим фактором является момент силы плотностью $\vec{\mu}$, даваемый первой из формул (4), в то время как силовая характеристика \vec{f} отсутствует. Поэтому, в целях охвата и случая идеального диэлектрика одной задачей, перейдем от уравнения Навье-Стокса, содержащего \vec{f} , к уравнению для плотностей моментов сил, что достигается простым векторным умножением (“слева”) уравнения на радиус-вектор \vec{r} элемента жидкости dV , то есть в стационарном случае:

$$\vec{r} \times (-\nabla p) + \vec{r} \times \vec{f} + \eta \cdot \vec{r} \times \nabla^2 \vec{v} = 0$$

или в проекции на ось OZ (перпендикулярную к плоскости чертежа рис. 1,2):

$$-\frac{\partial p}{\partial \varphi} + r f_\varphi + \eta r \left(\nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) = 0. \quad (9)$$

Учитывая периодичность по φ давления p и сил f_φ и независимость от φ скорости v_φ , после усреднения (9) по углу φ в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ окончательно получим

$$\mu + \eta r \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) = 0, \quad (10)$$

где $\mu \equiv r \bar{f}_\varphi \equiv r \bar{f}(r)$; $v \equiv v_\varphi$.

К уравнению (10) добавим еще 4 граничных условия: исчезновения скорости при $r = 0$, $r = R$ и на дне ячейки $z = 0$, а также исчезновения касательных вязких напряжений на границе раздела с атмосферой $z = h$:

$$v(r, z)|_{r=0} = 0; \quad v(r, z)|_{r=R} = 0; \quad v(r, z)|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial z}|_{z=h} = 0. \quad (11)$$

Расписав в (10) лапласиан, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} = -\frac{\mu}{\eta r}. \quad (12)$$

4.1. *Случай* $\mu = \text{const}$. Приближенное решение этой задачи при $\mu = \text{const}$, то есть для случая идеального диполя $\mu = P_1 \cdot E_2$ и ячейки в виде зазора цилиндрического конденсатора, найдено [5] и имеет вид

$$v(r, z) = u(r) \left(1 - e^{-\lambda z} - \frac{sh\lambda z}{ch\lambda h} \cdot e^{-\lambda h} \right), \quad (13)$$

$$\text{где } \lambda = \sqrt{\frac{A}{ru}}; \quad A \equiv \frac{\mu}{\eta}; \quad u(r) = \frac{Ar}{2(m^2 - 1)} \left(m^2 \ln \frac{R}{r} + \ln \frac{r}{r_s} - \frac{R^2}{r^2} \ln m \right); \quad m \equiv \frac{R}{r_s}, \quad (14)$$

r_s и R – радиусы внутреннего и внешнего цилиндров. В нашей задаче в (14) следует перейти к пределу исчезновения внутреннего цилиндра, то есть найти $\lim u(r_s \rightarrow 0)$. Получим более простую формулу:

$$u(r) = \frac{\mu}{2\eta} \cdot r \ln \frac{R}{r}, \quad (15)$$

причем при $r \rightarrow 0 \Rightarrow u(r) \rightarrow 0$, то есть первое из условий (11) выполняется, так же как и второе при $r = R$.

На поверхности жидкости, то есть при $z = h$, из (13) с учетом (15) находим

$$v(r, h) = \frac{\mu}{2\eta} \cdot r \cdot \ln \frac{R}{r} \cdot \left[1 - \lambda^{-\lambda h} \cdot (1 + th\lambda h) \right]. \quad (16)$$

Для очень тонких пленок, то есть при $\lambda h \ll 1$,

$$v(r, h) \cong \frac{\mu h^2}{2\eta \cdot r} \Rightarrow \omega = \frac{\mu h^2}{2\eta r^2} \quad (17)$$

и скорости вращения жидкости действительно уменьшаются по мере приближения к центру, однако следует иметь в виду необходимость выполнения при этом строгих неравенств:

$$0 < r < R; \quad ru \gg Ah^2 \Rightarrow r \cdot \sqrt{\ln \frac{R}{r}} \gg \sqrt{2}h. \quad (18)$$

Последнее нарушается при $r \rightarrow 0$, поэтому зависимости (17) верны при не слишком малых r . Как показывают оценки, должно соблюдаться неравенство $r \gg h$, что вполне естественно.

Факт уменьшения ω с ростом r в пределах ошибок эксперимента [3] можно считать установленным.

Оценим еще численно скорости v и ω , для этого полагаем $A = \frac{\mu}{\eta} = \frac{pE}{\eta} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E^2}{\eta}$. Для

воды $\eta = 10^{-3}$ кг/мс, $h = 10^{-3}$ м, $R \sim 1$ см = 10^{-2} м $\Rightarrow v \sim 3$ мм/с $\Rightarrow \omega \sim 0,3$ рад/с, то есть получают правдоподобные результаты.

Наличие критических значений $(jE)_{кр}$, при которых начинается конвекция, обусловлено силами трения “покоя”, поэтому приведенные выше формулы можно откорректировать, введя вместо $\mu \rightarrow \mu - \mu_{кр}$.

4.2. *Обобщение на случай $f = A \cdot r^n$.* При $n = -1$ из искомого решения должны получить (15). Расчеты приводят для $u(r)$ к формуле

$$u(r) = -\frac{Ar \cdot R^{n+1}}{(n+2)^2 - 1} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{n+1} \right], \quad (19)$$

причем формула (13) для полной скорости $v(r, z)$ остается в силе.

Полагая $n = -1$, получаем неопределенность $[0/0]$, раскрыв которую, находим

$$\lim_{n \rightarrow -1} u(r, n) = \frac{Ar}{2} \ln \frac{R}{r} \equiv \frac{\mu}{2\eta} r \ln \frac{R}{r},$$

то есть формулу (15), как и следовало ожидать.

Представляет интерес случай, когда $f = \rho E$ растет по мере удаления от центра ячейки за счет возрастания плотности объемных зарядов ρ (см. рис. 1, б, в, г). Скорость (19), которой определяется и полная скорость v , имеет максимум при

$$r = r_m = \frac{R}{(n+2)^{\frac{1}{n+1}}}. \quad (20)$$

Зная из опыта местонахождение этого максимума, по указанной формуле можно найти n , то есть закономерности изменения ρE в межэлектродном пространстве. Таким образом, исследования ЭГД вращательных течений в скрещенных электрических полях открывают новые возможности в изучении взаимодействия электрических и гидродинамических полей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болога М.К., Гросу Ф.П. Электроконвекция и теплообмен. Кишинев: Штиинца, 1977.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1957.
3. Amjadi A., Shirsavar R., Hamadani Radja N., Ejtehad M.R. A liquid film motor // Препринт ar Xiv: 0805.0490 (5 May 2008) Internet.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988.
5. Гросу Ф.П., Болога М.К. Вращение слабопроводящей жидкости в скрещенных электрическом и магнитном полях // Электронная обработка материалов. 2009. № 6. С. 52–58.

Поступила 13.10.09

Summary

A rotational electroconvective motion of liquid dielectrics in an ordinary and in two crossed electric fields is considered. The main peculiarities of polarization of ideal, non-ideal, and poor conducting dielectrics are found. The problems about rotation of liquid in crossed fields are solved and known experimental results on rotation of water film in such fields are clarified.