А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, М.В. Рыбакова, С.О.Ширяева

О РАВНОВЕСНОЙ ФОРМЕ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО СРЕДЫ В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия

Феномен деформации капель во внешних полях (электрических, гравитационных, аэродинамических) и их устойчивости в этих полях представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике, технологии и научном приборостроении (см., например, [1, 2] и указанную там литературу). Существенная часть исследований по этой теме связана с интересом к элементарным процессам внутри грозового облака. Согласно существующим качественным представлениям зарождение разряда линейной молнии может быть связано с зажиганием коронного разряда в окрестности крупной капли или обводненной градины (в частности, с реализацией неустойчивости заряженной поверхности капли воды с последующей эмиссией сильно заряженных высокодисперсных капелек) [3, 4]. Тем не менее, максимальные величины измеряемых собственных зарядов капель и внутриоблачных электрических полей много меньше [5] необходимых для реализации неустойчивости поверхности капли по отношению к собственному и индуцированному зарядам [6]. По всей видимости, при построении физической модели инициирования разряда молнии упускается какой-то важный фактор, например, аэродинамическое давление в окрестности падающей капли, которое согласно [7] приводит к снижению критических условий реализации неустойчивости свободной поверхности капли.

1. Будем искать равновесную форму капли идеальной несжимаемой жидкости с зарядом *Q*, обдуваемой ламинарным потоком газа плотностью ρ и скоростью $\vec{U}$, направленным коллинеарно внешнему однородному электростатическому полю: $\vec{U}\,\|\,\vec{E}_0$. Примем, что скорость потока $\vec{U}$ много меньше скорости звука в газе и будем моделировать газ идеальной несжимаемой жидкостью.

Сферическая форма и радиус *R* изолированной капли идеальной несжимаемой жидкости при $Q = 0$, $E_0 = 0$, $U = 0$ легко находятся из условия баланса давлений на ее поверхности:

$$\frac{2\sigma}{R} = \Delta p;$$

где σ – коэффициент поверхностного натяжения, Δp – перепад постоянных давлений в капле и среде.

Пусть теперь $Q \neq 0,\ E_0 \neq 0,\ U \neq 0$. Тогда равновесная форма капли будет уже не сферической. Новую равновесную осесимметричную форму капли представим в виде

$$r(\theta) = R + h(\theta) \equiv R + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot P_n(\mu). \qquad (1)$$

В выражении (1) $P_n(\mu)$ – полиномы Лежандра *n*–го порядка; a_n – амплитуды отдельных мод; $\mu \equiv \cos(\theta)$; $h(\theta)$ – виртуальное искажение сферической поверхности капли. Будем искать возмущение сферической поверхности $h(\theta)$ (амплитуды возмущенных мод a_n) опять же из условия баланса давлений на равновесной поверхности капли:

$$p_\sigma = \Delta p + p_E + p_U, \tag{2}$$

определяя слагаемые, стоящие в правой части (2) на исходной сферической поверхности, а лапласовское давление p_σ, стоящее в левой части (2) на виртуально возмущенной сферической поверхности. Согласно сказанному p_E – электростатическое давление поля собственного и поляризационного зарядов на поверхность сферической капли; p_U – аэродинамическое давление на поверхность сферической капли со стороны обдувающего ее ламинарного потока газа.

Будем искать амплитуды мод a_n, которые возбудятся в результате взаимодействия виртуального возмущения $h(\theta)$ с электрическим и аэродинамическим полями в окрестности электропроводной сферической капли. Для этого отметим, что [8, 9]

$$p_\sigma = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[2 - n(n+1)\right]\ a_n \cdot P_n(\mu); \tag{3}$$

$$p_E = \frac{1}{8\pi}\left\{3E_0^2\left[P_0(\mu) + 2P_2(\mu)\right] + 6E_0\frac{Q}{R^2}P_1(\mu) + \frac{Q^2}{R^4}P_0(\mu)\right\}; \tag{4}$$

$$p_U = \frac{3}{4}\rho U^2\left[P_0(\mu) - P_2(\mu)\right]. \tag{5}$$

Подставим (3) – (5) в (2) и, приравнивая коэффициенты при полиномах Лежандра разного порядка, найдем амплитуды возбудившихся мод. Несложно видеть из (4) – (5), что могут возбудиться лишь три первые моды: ~ $P_0(\mu)$, ~ $P_1(\mu)$ и ~ $P_2(\mu)$. Мода ~ $P_1(\mu)$ соответствует трансляционному движению капли и на ее форме не сказывается. Моды: ~ $P_0(\mu)$ и ~ $P_2(\mu)$ легко рассчитываются, но в амплитуду моды ~ $P_0(\mu)$ входит неизвестный перепад постоянных давлений Δp и поэтому a_0 удобнее рассчитать через a_2, используя условие постоянства объема капли несжимаемой жидкости. Для a_2 получится соотношение:

$$\frac{a_2}{R} = \frac{1}{3}\left(\frac{9}{16\pi}w - \frac{9}{16}We\right); \qquad w \equiv E_0^2 R\sigma^{-1}; \qquad We \equiv \rho U^2 R\sigma^{-1}. \tag{6}$$

Выражение для амплитуды a_0, рассчитанное из условия постоянства объема, оказывается квадратичным по безразмерной амплитуде основной моды ($n=2$): $(a_0/R) \sim (a_2/R)^2$, и при расчетах в линейном по амплитуде деформации приближение учитываться не должно.

Сравним полученное выражение с уравнением эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

у которого $a = b < c$ (то есть вытянутого вдоль $\vec{U}$ и $\vec{E}_0$ сфероида), в определенной выше сферической системе координат с началом в центре эллипсоида записывающимся в виде

$$r(\theta) = R(1 - e^2)^{1/6}(1 - e^2\cos^2\theta)^{-1/2}.$$

Несложно найти, что в приближении линейном по квадрату эксцентриситета $e^2 = 1 - b^2/c^2$ сфероида полученное изменение амплитуды основной моды капиллярных осцилляций капли соответствует деформации капли к сфероиду с эксцентриситетом

$$e = \left(\frac{9}{16\pi}w - \frac{9}{16}We\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Итак, в линейном по амплитуде деформации приближении приращение получает лишь основная мода, что при $(w/\pi) > We$ соответствует деформации капли к вытянутому сфероиду [6, 8], а при $(w/\pi) < We$ – к сплюснутому.

Наличие на капле заряда в использованном приближении (когда ищется деформация исходной сферической капли) на величине равновесной деформации капли не сказывается. Тем не менее известно [6], что в отсутствие аэродинамического потока, обдувающего каплю, в линейном по амплитуде отклонения поверхности такой капли от сферы ее форма является вытянутой сфероидальной с эксцентриситетом e, зависящим от величины заряда Q, и определяемым соотношением:

$$e^2 = \frac{9}{16\pi}\cdot\frac{w}{1-W}; \qquad W \equiv \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}. \tag{8}$$

Параметр W характеризует устойчивость капли по отношению к собственному заряду и его критическое значение, при достижении которого капля становится неустойчивой, равно единице [10]. Из (8) видно, что наличие на капле заряда усиливает величину ее деформации во внешнем однородном электростатическом поле $\vec{E}_0$. Выражение (8) получено на основе принципа минимальности при некоторой величине равновесной деформации потенциальной энергии заряженной капли в поле $\vec{E}_0$. Поэтому представляется целесообразным применить этот метод для расчета величины равновесной деформации заряженной капли в ламинарном потоке идеальной несжимаемой жидкости.

2. Пусть капля идеальной несжимаемой жидкости с зарядом Q обдувается ламинарным потоком газа плотностью ρ и скоростью $\vec{U}$. Согласно сказанному в предыдущем пункте в линейном по амплитуде деформации приближении такая капля деформируется к сплющенному сфероиду $a > b = c$. Найдем величину эксцентриситета ($e^2 = 1 - c^2/a^2$) равновесной в указанных условиях сплюснутой сфероидальной формы капли, требуя минимальности в состоянии равновесия полной потенциальной энергии капли, которая состоит из энергии сил поверхностного натяжения:

$$U_\sigma = 2\pi R^2\sigma(1-e^2)^{-1/3}(1+e^{-1}(1-e^2)\,\mathrm{Arth}\;e);$$

энергии собственного заряда капли:

$$U_q = \frac{Q^2}{2R}e^{-1}(1-e^2)^{1/6}\arcsin\;e;$$

энергии капли в аэродинамическом потоке:

$$U_U = -\int p_U^0(\theta)\;r^2\;\cos^{-2}\gamma\quad \sin q\;\,d\theta\;d\varphi\;\,dr$$

где p_U^0 – аэродинамическое давление на поверхность сплюснутой сфероидальной капли [9]:

$$p_U^0 = \frac{\rho\;U^2}{2}(1-0{,}5\;C_0)^{-2}\frac{(1-e^2)^2\sin^2\theta}{\left[1-e^2(2-e^2)\sin^2\theta\right]};$$

$$C_0 \equiv 2e^{-2}\left(1-\frac{(1-e^2)}{e}\arcsin\;e\right);$$

$Cos\ \gamma$ – косинус угла между вектором нормали к поверхности сплюснутой сфероидальной капли и ортом $\vec{n}_r$ сферической системы координат с началом в центре капли, а интегрирование по R проводится от нуля до сфероидальной поверхности

$$r(\theta) = R(1-e^2)^{1/3}(1-e^2\;\sin^2\theta)^{-1/2}.$$

Выражение для U_U получено интегрированием по сфероидальной поверхности капли работы силы $p_U^0 \cdot dS$, действующей на элементарную площадку на поверхности капли $\mathrm{dS} \equiv \mathrm{r}^2 \sin\theta \; \mathrm{d}\theta \; \mathrm{d}\varphi \; /\cos\gamma$, при смещении площадки dS вдоль нормали к ней на $\mathrm{dn} \equiv \mathrm{dr}/\cos\gamma$.

Приравнивая теперь нулю производную от полной потенциальной энергии капли по эксцентриситету, несложно найти в линейном по e^2 приближении связь величины эксцентриситета равновесной сплюснутой сфероидальной формы капли в ламинарно ее обтекающем потоке от скорости потока U (от числа Вебера We) и от величины заряда Q (от параметра Рэлея W):

$$e^2 = \frac{9}{16} \cdot \frac{We}{(1-W)}. \tag{9}$$

Видно, что наличие на капле заряда усиливает величину ее деформации в обтекающем каплю ламинарном потоке идеальной несжимаемой среды.

3. Рассмотрим более общую ситуацию, когда имеется и внешнее однородное электростатическое поле: $\vec{E}_0 \| \vec{U}$. Известно, что в поле $\vec{E}_0$ капля деформируется к вытянутому сфероиду, в тоже время в потоке $\vec{U}$, согласно вышесказанному, она деформируется к сплюснутому сфероиду. Примем, что соотношение между величинами E_0 и U таково, что из этих двух противоположных тенденций преобладает стремление к вытягиванию и капля имеет форму вытянутого сфероида ($e^2 = 1 - b^2/c^2$). Зададимся вопросом, каков вклад E_0, U и Q в величину равновесного эксцентриситета.

Выпишем выражение для полной потенциальной энергии капли, которая в указанных условиях состоит из энергии сил поверхностного натяжения:

$$U_\sigma = 2\pi R^2 \sigma (1-e^2)^{1/3} (1 + e^{-1}(1-e)^{-1/2} \arcsin \; e);$$

энергии собственного заряда капли:

$$U_q = \frac{Q^2}{2R} e^{-1} (1-e^2)^{1/3} \operatorname{Arth} \; e;$$

энергии поляризационного в E_0 заряда капли:

$$U_E = -\frac{1}{6} E_0^2 R^3 \frac{e^3}{(1-e^2)(\operatorname{Arth} \; e - e)};$$

энергии капли в аэродинамическом потоке:

$$U_U = -\int p_U^*(\theta) \; r^2 \; \cos^{-2}\gamma \quad \sin\theta \; d\theta \; d\varphi \; dr$$

где p_U^* – аэродинамическое давление на поверхность вытянутой сфероидальной капли [9]:

$$p_U^* = \frac{\rho \; U^2}{2} (1 - 0{,}5 \; C_0)^{-2} \frac{\sin^2\theta}{[1 - e^2(2-e^2)\cos^2\theta \;]};$$

$$C_0 \equiv 2e^{-3}(1-e^2)(\operatorname{Arth} \, e - e).$$

Cos γ – косинус угла между вектором нормали к поверхности вытянутой сфероидальной капли и ортом $\vec{n}_r$ сферической системы координат с началом в центре капли, а интегрирование по R

проводится от нуля до поверхности вытянутого сфероида (уравнение поверхности вытянутого сфероида приведено выше, в п.1).

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, приравняем нулю производную по величине эксцентриситета от полной потенциальной энергии и получим обобщение формул (7) и (9):

$$e^2 = \frac{9}{16} \cdot \frac{(w\pi^{-1} - We)}{(1 - W)}. \qquad (10)$$

Таким образом, собственный электрический заряд капли, не приводя к деформации сферической формы, усиливает равновесные деформации капли во внешних силовых полях.

Интересно, что в ситуации, когда и заряд капли, и напряженность внешнего электрического поля капли, движущейся с конечной (малой) скоростью не равны нулю $Q \neq 0,\ E_0 \neq 0,\ U \neq 0$, капля может сохранять сферическую форму при $(w/\pi) = We$ и произвольном, меньшем критического по Рэлею, заряде. При $(w/\pi) > We$ капля деформируется к вытянутому сфероиду, при $(w/\pi) < We$ – к сплюснутому. При наблюдениях в природных условиях регистрируются все три формы капель: сферическая, сплюснутая сфероидальная и вытянутая сфероидальная [11].

4. Заключение. Капля жидкости в потоке идеальной несжимаемой жидкости (газа) ламинарно ее обтекающем деформируется к сплюснутому сфероиду с осью симметрии, ориентированной по потоку. Наличие на капле электрического заряда увеличивает степень сплюснутости (увеличивает эксцентриситет капли). Если имеется также однородное внешнее электростатическое поле, в котором капля в отсутствие обтекающего потока деформируется к вытянутому по полю сфероиду (наличие на капле заряда приводит к увеличению степени удлинения), то имеет место конкуренция стремления к сплющиванию в гидродинамическом потоке и к вытягиванию во внешнем электростатическом поле. При некотором соотношении между величиной напряженности электростатического поля и скорости потока форма капли остается сферической.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорьев А.И.* Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.
2. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Деление заряженных капель во внешнем электрическом поле на части сравнимых размеров (обзор) // Электронная обработка материалов. 2000. № 4. С. 17–28.
3. *Дячук В.А., Мучник В.М.* Коронный разряд обводненной градины как основной механизм инициирования молнии // ДАН СССР. 1979. Т. 248. № 1. С. 60–63.
4. *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* The Possible Physical Mechanism of Initiation and Growth of Lightning // Physica Scripta. 1996. V.54. P. 660–666.
5. *Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М.* Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л., 1989.
6. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях // ЖТФ. 1989. Т.59. Вып. 6. С. 27–34.
7. *Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. Григорьев О.А.* Неустойчивость заряженной сферической поверхности в обтекающем потоке идеальной жидкости // Электронная обработка материалов. 1998. № 1–2. С. 48–50.
8. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Равновесная форма проводящей капли в электрическом поле // ЖТФ. 1987. Т. 57. Вып. 9. С. 1863–1866.
9. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1. М., 1963.
10. *Rayleigh Lord (J.V. Strett).* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1882. V.14. P. 184–186.
11. *Jones D.M.* The shape of raindrops // J.Meteorology. 1959. V.16. № 5. P. 504–510.

Поступила 26.11.2001

Summary

Is shown, that the drop of a fluid in a laminar stream of an ideal incompressible fluid is deformed to an oblate spheroid with a symmetry axis oriented on a stream. If there is also homogeneous electric field a drop is deformed to a prolate spheroid, the competition of actions takes place. The presence on a drop of electric charge is increased a degree of deformation.