МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ РАСШИРЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ И ДАВЛЕНИЯ В НЕЙ ПО ЗАДАННОМУ РАДИУСУ

Г.А. Барбашова

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины,
пр. Октябрьский, 43-А, г. Николаев, 54018, Украина, dpte@iipt.com.ua

Предлагается математическая модель для определения скорости расширения цилиндрической полости и давления в ней по заданной зависимости радиуса цилиндра от времени. Выполнено тестирование математической модели, алгоритма и компьютерной программы.

УДК 532:537.528

ВВЕДЕНИЕ

В ряде разрядноимпульсных технологий (таких как штамповка, развальцовка труб, интенсификация добычи нефти) основным силовым воздействием на обрабатываемый объект является формируемая образующимся при электрическом взрыве в жидкости плазменным каналом волна сжатия и следующий за ней гидропоток (гидродинамическая нагрузка) [1]. В технологиях, где электрический разряд выполняется непосредственно на обрабатываемый объект (снятие сварочных напряжений в сварных соединениях, очистка отливок и др.), основное воздействие на последний оказывает давление плазмы [1], а гидродинамическую нагрузку, как было показано в работах [2, 3], можно не учитывать.

Решения обратной гидродинамической задачи для первого случая – задачи восстановления кинематических и термодинамических характеристик канала разряда по заданной зависимости давления в жидкости от времени (гидродинамическая нагрузка на обрабатываемый объект) – для моноимпульсных и двухпульсационных зависимостей давления от времени в заданной точке жидкости приведены в статьях [4] и [5] соответственно.

Цель настоящей работы – построение математической модели для решения обратной гидродинамической задачи для электроразрядных технологий, использующих в качестве основной силовой нагрузки давление в канале разряда, и её тестирование, что актуально при разработке таких технологических процессов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СПОСОБ ЕЁ РЕШЕНИЯ

Отметим следующее. Измерение давления в ходе проведения эксперимента, тем более давления в плазменном канале, – процесс весьма трудоёмкий, то есть экспериментально определить нагрузку, создаваемую веществом в канале разряда на обрабатываемый объект, практически невозможно. Но можно путём фоторегистрации зафиксировать положение границы между плазмой и водой в различные моменты времени, то есть найти зависимость радиуса канала разряда от времени. Поэтому решаем обратную гидродинамическую задачу в следующей постановке.

Пусть восстанавливаемый канал разряда в течение всего рассматриваемого периода имеет форму прямого кругового цилиндра с непроницаемой поверхностью. Радиус его равен $a(t)$, а давление однородно во всём объёме цилиндра, в том числе и на его боковой поверхности – стенке канала разряда. Цилиндр расширяется в неограниченном объёме идеальной сжимаемой жидкости. Необходимо определить зависимости от времени скорости расширения цилиндра $\dot{a}(t)$ и давления в нём $P_a(t)$, которые вместе с радиусом являются исходными данными для обратной электродинамической задачи [6].

Скорость расширения канала разряда вычисляем путём численного дифференцирования зависимости радиуса от времени.

Для определения давления решаем следующую задачу. В области жидкости, ограниченной расширяющейся с известной скоростью боковой поверхностью прямого кругового цилиндра (внутренняя граница расчётной области) и ударной волной (внешняя граница), необходимо решить записанную в цилиндрических координатах систему одномерных нелинейных уравнений газовой динамики [7]:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial(r\cdot\rho)}{\partial t}+\dfrac{\partial(r\cdot\rho\cdot v)}{\partial r}=0, \\
\dfrac{\partial(r\cdot\rho\cdot v)}{\partial t}+\dfrac{\partial\left[r\cdot\left(\rho\cdot v^2+p\right)\right]}{\partial r}=p, \\
\dfrac{\partial(r\cdot e)}{\partial t}+\dfrac{\partial\left[r\cdot(e+p)\cdot v\right]}{\partial r}=0,
\end{cases} \tag{1}
$$

которая замыкается уравнением состояния в двучленной форме [7]:

$$
\varepsilon=\left[p-c_0^2(\rho-\rho_0)\right]\Big/\left[\rho(\kappa-1)\right], \tag{2}
$$

где t – время; r – пространственная координата; v – величина скорости жидкости; p – давление; ρ – плотность жидкости; $e=\rho\left[\varepsilon+v^2/2\right]$; ε – удельная внутренняя энергия; ρ_0 – плотность покоящейся жидкости; c_0 – скорость звука в покоящейся жидкости; κ = 7,15.

На внутренней границе расчётной области скорость жидкости равна скорости расширения цилиндра:

$$
v=\dot{a}(t). \tag{3}
$$

На внешней границе ставятся условия динамической совместности [7]:

$$
\begin{aligned}
&[\rho]D-[\rho v]=0; \\
&[\rho v]D-\left[\rho v^2+p\right]=0; \\
&\left[\rho\left(\varepsilon+v^2/2\right)\right]D-\left[\rho v\left(\varepsilon+v^2/2\right)+pv\right]=0,
\end{aligned} \tag{4}
$$

где D – скорость ударной волны; $[f]=f_1-f_2$; f_1, f_2 – значения функции слева и справа от ударной волны.

Начальные значения гидродинамических параметров равны своим значениям в невозмущенной среде.

Задача решается конечноразностным методом Годунова [7]. Используется подвижная сетка. Тестирование математической модели, алгоритма и компьютерной программы выполнено следующим образом.

Решаем задачу о расширении заполненной однородной плазмой цилиндрической полости в идеальной сжимаемой жидкости (в одномерном приближении). В этом случае движение жидкости описывается уравнениями (1)–(2). На внутренней границе расчётной области – контактном разрыве плазма-вода – требуется выполнение условия баланса энергии [8]:

$$
\frac{1}{(\gamma-1)}\cdot\frac{d\left(P_a\cdot V_a\right)}{dt}+P_a\cdot\frac{dV_a}{dt}=N(t), \tag{5}
$$

где P_a – давление в канале разряда; V_a – объём канала разряда; γ = 1,26 – эффективный показатель адиабаты плазмы; $N(t)$ – вводимая в канал разряда электрическая мощность.

На внешней границе (ударная волна) ставятся условия динамической совместности (4).

Задаваемый закон ввода электрической энергии в канал разряда (5) определён по экспериментально зарегистрированным функциям тока и напряжения при напряжении пробоя U_0 = 20 кВ, индуктивности электрической цепи L = 3,4 мкГн, ёмкости конденсаторной батареи C = 3 мкФ и длине микропроводника l = 0,1 м. Кривая мощности приведена на рис. 1 (кривая *1*).

В ходе решения этой задачи фиксируем с заданным шагом по времени радиус канала разряда, скорость расширения канала и давление в нём.

По полученному радиусу канала разряда вычисляем скорость его расширения в те же моменты времени. Эта скорость входит в граничное условие (3).

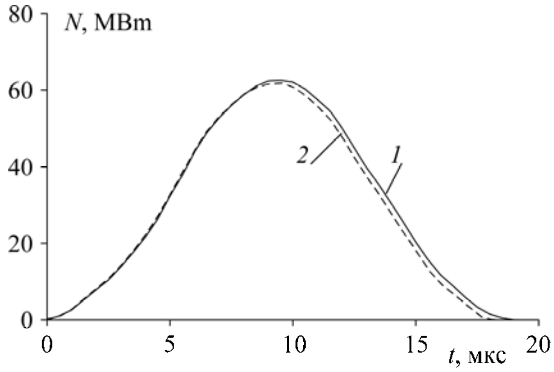

Рис. 1. Закон ввода электрической энергии в канал разряда: 1 – экспериментальные данные; 2 – данные, полученные при решении обратной электродинамической задачи

Далее решаем задачи (1)–(4). При этом шаг по времени определяется по критерию Куранта [7], поэтому расчётные моменты времени не совпадают с моментами времени задаваемой кривой скорости. Значение скорости расширения цилиндра на данном временном слое определяем путём линейной интерполяции заданной таблично функции скорости. При решении задачи фиксируем радиус цилиндра и давление в нём.

РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

На рис. 2–4 приведены результаты решения задач (1), (2), (5), (4) (сплошные кривые) и (1)–(4) (штриховые кривые) – радиус полости, скорость её расширения и величина давления в цилиндре. Как следует из рисунков, соответствующие кривые практически совпадают.

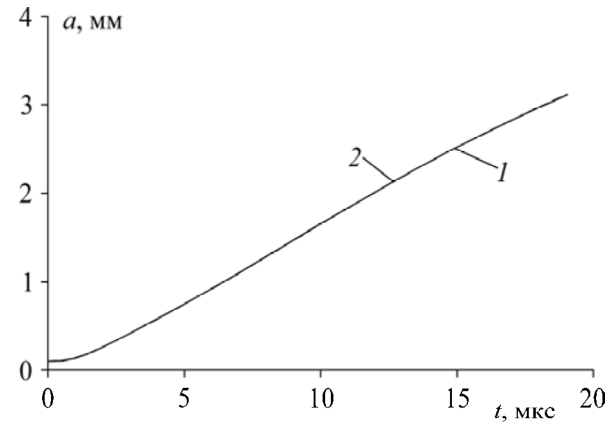

Рис. 2. Радиусы цилиндрической полости, полученные при задании на поверхности цилиндра уравнения баланса энергии (1) и при задании скорости (2)

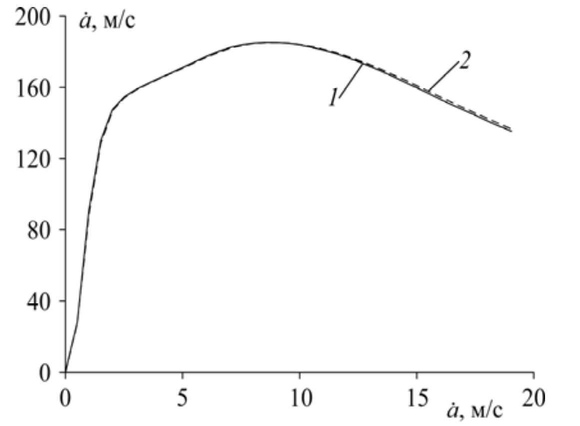

Рис. 3. Скорости расширения цилиндрической полости, полученные при задании на поверхности цилиндра уравнения баланса энергии (1) и при задании скорости (2)

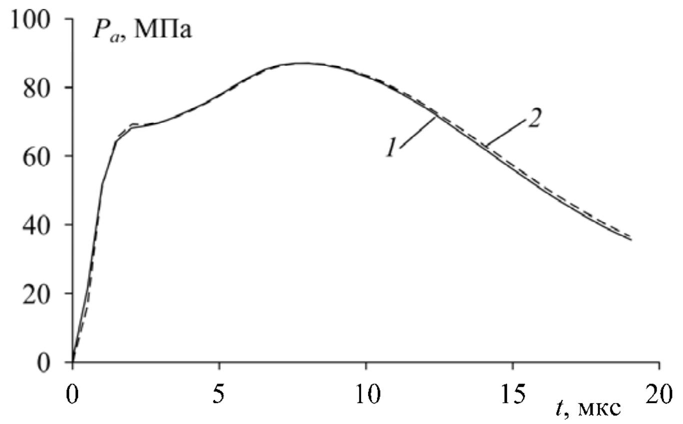

Рис. 4. Давления в цилиндрической полости, полученные при задании на поверхности цилиндра уравнения баланса энергии (1) и при задании скорости (2)

Восстановленный при решении обратной электродинамической задачи [6] закон ввода электрической мощности изображает кривая *2* на рис. 1. А на рис. 5 и 6 приведены временные зависимости тока и напряжения, полученные экспериментально (кривые *1*) и при решении обратной электродинамической задачи (кривые *2*). Амплитуды тока разнятся на 10%. Ещё меньше отличаются кривые напряжения.

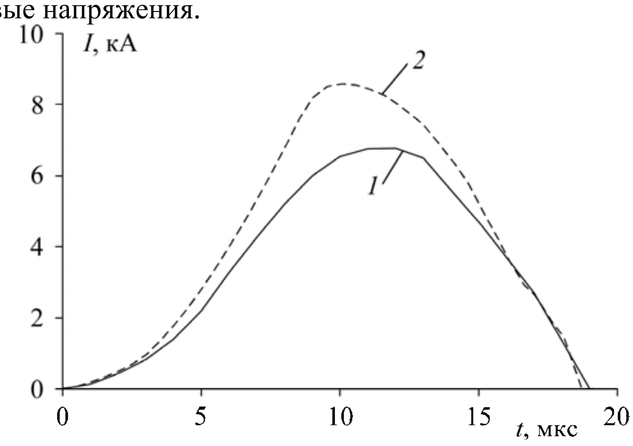

Рис. 5. Разрядный ток: 1 – экспериментальные данные; 2 – данные, полученные при решении обратной электродинамической задачи

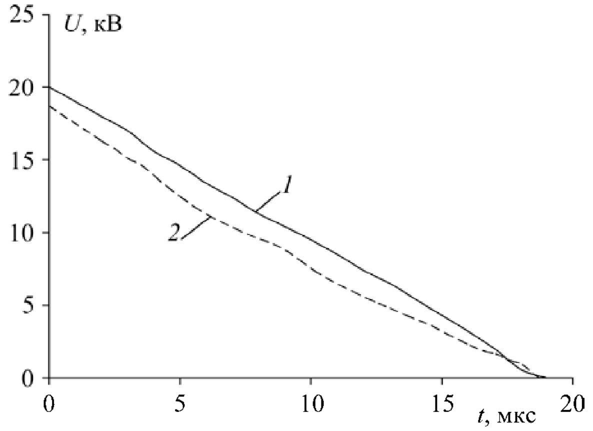

Рис. 6. Напряжение на канале разряда: 1 – экспериментальные данные; 2 – данные, полученные при решении обратной электродинамической задачи

Следует отметить, что расчётный радиус канала разряда был выбран для повышения точности тестирования. Но хорошее совпадение экспериментально определённого радиуса канала разряда и вычисленного при решении задач (1), (2), (5), (4) было получено неоднократно (например, в работе [9]). Для определения скорости по полученному в ходе фоторегистрации радиусу необходимо использовать метод регуляризации, поскольку вычисление производной по экспериментальным данным – задача некорректная [10].

Таким образом, построена математическая модель, позволяющая определить скорость расширения цилиндра и давление в нём по заданной зависимости радиуса цилиндра от времени.

Результаты тестирования доказали возможность использования этой модели для решения таких задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гулый Г.А. *Научные основы разрядноимпульсных технологий*. Киев: Наук. думка, 1990. 208 с.
2. Барбашова Г.А., Каменская Л.А. Влияние нагрузки, создаваемой каналом электрического разряда в воде, и гидродинамической нагрузки на напряженно-деформированное состояние сварного соединения. *Электронная обработка материалов*. 2007, **43**(3), 20–23.
3. Kamenskaya L.A. The Effect of the Components of a Complex Load Created by an Electric Discharge in Water on a Deflected Mode of Cast Iron Molds. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2011, **47**(3), 248–252.
4. Барбашова Г.А. О восстановлении характеристик канала подводного искрового разряда по временной зависимости давления в жидкости. *Прикладна гідромеханіка*. 2007, **9(**4), 69–72.
5. Barbashova G.A. Restoration of the Characteristics of the Cavity Formed upon Explosion of a Microconductor According to the Specified Two Pulse Temperature Dependence of the Pressure at a Point in a Liquid. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2010, **46**(1), 53–56.
6. Вовченко А.И., Шомко В.В., Шишов А.М. Математическое моделирование и оптимизация электрогидроимпульсных технологических процессов. *Технічна електродинаміка*. 2005, (3), 68–73.
7. *Численное решение многомерных задач газовой динамики*. Под ред. С.К.Годунова. М.: Наука, 1976. 400 с.
8. Наугольных К.А., Рой Н.А. *Электрические разряды в воде*. М., 1971. 155 с.
9. Барбашова Г.А., Косенков В.М. Определение гидродинамической нагрузки на стенку нефтяной скважины, формируемой электрическим разрядом. *Прикладная механика и техническая физика*. 2001, **42**(6), 93–97.
10. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1986. 288 с.

Поступила 06.12.11

Summary

A mathematical model for the determination of the speed of expansion and internal pressure of a cylindrical cavity by a specified time-dependent radius is offered. Testing of the proposed mathematical model, of the algorithm and computer program is carried out.