С.А. Курочкина, Д.Ф. Белоножко

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОЙ ПЛЕНКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПОВЕРХНОСТНОМУ ЗАРЯДУ

Ярославский государственный университет им. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия

1. Явление эмиссии капелек с заряженной поверхности тонкой пленки жидкости используется в разнообразных технических системах и промышленных процессах: ионных коллоидных реактивных двигателях, жидкостных масспектрометрах, при электрическом диспергировании лакокрасочных материалов, получении пучков монодисперсных капель в устройствах каплеструйной печати. Кроме того оно является неотъемлемой частью явлений природы, связанных с проявлениями грозового электричества (см., например, [1, 2] и указанную там литературу).

Устойчивость заряженной поверхности проводящей бесконечно глубокой жидкости уже исследовалась в [3, 4]. Получено и проанализировано дисперсионное уравнение для капиллярных волн на заряженной поверхности вязкой жидкости, а также найдены критические условия реализации неустойчивости. Целью данной работы являются расчет спектра капиллярных волн в тонкой пленке маловязкой жидкости и исследование особенностей реализации неустойчивости по отношению к поверхностному заряду.

2. Будем решать задачу о расчете спектра капиллярных волн на поверхности тонкого слоя идеально проводящей несжимаемой жидкости толщины h, плотности ρ, вязкости ν, с коэффициентом поверхностного натяжения σ, поверхностной плотностью заряда χ в поле силы тяжести $\vec{g}$ и электрическом поле.

Пусть в декартовой системе координат с осью z, направленной вертикально вверх, плоскость $z = 0$ совпадает со свободной не возмущенной поверхностью жидкости. Функция $\xi(x,t) = a\cdot\exp\left[i\cdot(kx-\omega t)\right]$, где k – волновое число, ω – частота, описывает вертикальное смещение поверхности жидкости от равновесного состояния, вызванное тепловым капиллярным волновым движением малой амплитуды a. Поле скоростей $\vec{V}(\vec{r},t)$ движения жидкости, вызванное возмущением $\xi(x, t)$, имеет тот же порядок малости.

Линеаризованная математическая формулировка задачи определения спектра капиллярных волн в жидком слое имеет вид

$$\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\vec{V} + \vec{g}; \tag{1}$$

$$\mathrm{div}\vec{V} = 0; \tag{2}$$

$$z = 0:\quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = V_z, \tag{3}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} = 0, \tag{4}$$

$$-p + 2\rho\nu\frac{\partial V_z}{\partial z} - \sigma\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - p_E = 0; \tag{5}$$

$$\Delta\Phi = 0,\ \vec{E} = \nabla\Phi; \tag{6}$$

$$z = \xi: \quad \Phi = \mathrm{const}, \tag{7}$$

$$z \to \infty: \quad \Phi = -4\pi\chi z, \tag{8}$$

$$z = -h: \ V_x = V_z = 0. \tag{9}$$

Давление электрического поля p_E определяется из решения краевой задачи (6) – (8) для электрического потенциала Φ, и в линейном приближении по ξ имеет вид [5]:

$$p_E = 4\pi\chi^2 k\xi.$$

3. Решение системы (1) – (9) стандартными методами [6] приводит к дисперсионному уравнению:

$$-\omega^2 - 4i\nu k^2\omega + 4\nu^2 k^4 + \left[gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3 - \frac{4\pi\chi^2}{\rho}k^2\right]\cdot th\left(kh\right) =$$
$$= 4\nu^2 k^3\sqrt{k^2 - \left(i\omega/\nu\right)}.$$

В приближении тонкого слоя, когда $kh << 1$, разложение $th\ (kh)$ в ряд Тейлора с сохранением линейных по kh слагаемых приводит дисперсионное уравнение к виду:

$$-\omega^2 - 4i\nu k^2\omega + 4\nu^2 k^4 + \left[gk + \frac{\sigma}{\rho}k^3 - \frac{4\pi\chi^2}{\rho}k^2\right]\cdot kh =$$
$$= 4\nu^2 k^3\sqrt{k^2 - \left(i\omega/\nu\right)}.$$

В безразмерных переменных, в которых ρ = σ = g = 1, а характерные масштабы размерных величин записываются как

$$\omega_* = \left[\frac{\rho g^3}{\sigma}\right]^{1/4}, \qquad k_* = \left[\frac{\rho g}{\sigma}\right]^{1/2}, \quad \nu_* = \left[\frac{\sigma^3}{\rho^3 g}\right]^{1/4},$$
$$\chi_* = \left(\rho\sigma g\right)^{1/4}, \quad h_* = \left[\frac{\sigma}{\rho g}\right],$$

дисперсионное уравнение (за всеми безразмерными величинами сохраняем прежние обозначения) примет более удобную для дальнейшего анализа форму:

$$-\omega^2 - 4i\nu k^2\omega + 4\nu^2 k^4 + \omega_0^2 = 4\nu^2 k^3\sqrt{k^2 - \left(i\omega/\nu\right)}, \tag{10}$$

где ω_0^2 – частота капиллярно-гравитационных волн на поверхности идеальной жидкости:

$$\omega_0^2 = \left[k + k^3 - Wk^2\right]\cdot kh, \tag{11}$$

$W = 4\pi\chi^2/\sqrt{\rho g\sigma}$ – безразмерный параметр Тонкса-Френкеля, характеризующий устойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду. Он равен отношению электрических и лапласовских сил на свободной поверхности.

4. Дисперсионное уравнение (10) описывает волны на поверхности заряженного тонкого слоя жидкости с произвольной вязкостью. В случае маловязкой жидкости уравнение (10) упрощается:

$$\omega^2 + 4i\nu k^2\omega - \omega_0^2 = 0.$$

Решениями этого уравнения являются

$$\omega_{1,2} = i \cdot \left(\beta \pm i\omega_0 \right),$$

где $\beta = -2\nu k^2$ – декремент затухания. Тогда выражение для бегущей волны примет вид:

$$\xi = a \cdot \exp\left(ikx\right) \cdot \exp\left(-2\nu k^2 t\right) \cdot \exp\left(\pm i\omega_0 t\right). \tag{12}$$

Декремент β для волн в тонком слое маловязкой жидкости в приближении ($h << \lambda$) совпадает при $W = 0$ с декрементом затухания волн на поверхности бесконечно глубокой жидкости. Амплитуда волн на поверхности тонкого слоя в этом случае так же будет экспоненциально убывать со временем. Поскольку декремент затухания пропорционален кинематической вязкости жидкости и обратно пропорционален квадрату длины волны, быстрее всего будут затухать короткие волны, а для длинных волн β может быть мал даже в жидкости с большой вязкостью.

Из (12) видно, что волновое движение в маловязкой жидкости отличается от волнового движения в идеальной только затуханием волн с декрементом β. Критические условия реализации неустойчивости заряженной свободной поверхности тонкого вязкого слоя по отношению к поверхностному заряду $\omega_0^2 \le 0$ аналогичны критериям появления неустойчивости волнового течения тонкого слоя идеальной жидкости, которые могут быть найдены из выражения (11).

Анализ выражения (11) показал, что при $W > 2$ квадрат частоты волны ω_0^2 может стать отрицательным и, следовательно, частота станет мнимой, а выражение для бегущей волны в идеальной жидкости преобразуется к виду $\xi = a \cdot \exp\left(ikx\right) \cdot \exp\left(\pm\omega_0 t\right)$. Часть решения с отрицательным знаком при $\omega_0 t$ будет экспоненциально убывать со временем, а с положительным – нарастать, в последнем случае будет иметь место неустойчивость свободной поверхности тонкого слоя по отношению к поверхностному заряду.

Из условия проявления неустойчивости $\omega_0^2 = 0$ несложно найти зависимость критического значения параметра $W_{кр}$ от произвольного волнового числа k

$$W_{кр} = \frac{2}{3k} + \frac{4k}{3}.$$

Легко определить, что минимальное значение $W_{кр} = 2$ соответствует $\kappa_{кр} = 1$. Волну с таким k называют наиболее неустойчивой модой.

Заключение. Анализ полученного дисперсионного уравнения для капиллярно-гравитационных волн в тонком слое вязкой жидкости показал, что критические условия неустойчивости свободной поверхности не зависят от вязкости, то есть неустойчивость будет иметь место при таких же критических значениях волнового числа и поверхностной плотности заряда, как и в случае тонкой пленки идеальной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габович М.Д.* Жидкометаллические источники ионов (обзор) // УФН. 1983. Т.140. № 1. С.137 – 151.
2. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкости (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3 – 20.
3. *Алиев И.Н., Филиппов А.В.* О волнах, распространяющихся по плоской поверхности вязкой проводящей жидкости в электрическом поле // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 94 – 98.
4. *Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О.* Механизм развития неустойчивости заряженной поверхности жидкости // ЖТФ. 1992. Т.62. № 9. С. 12 – 21.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1992.
6. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., 1959.

Поступила 19.02.03

Summary

The dispersion equation for capillary-gravitational waves on a surface of the charged thin layer of a viscous liquid is received and analyzed by method of division of a field of speeds on potential and vortical components. The analysis of the received dispersion equation has shown that the instability of free surface take place at the same critical values of wave number and surface density of a charge as in case of a thin film of an ideal liquid.