С.А. Курочкина, Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В ТОНКИХ СЛОЯХ ЖИДКОСТИ С ЗАРЯЖЕННОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЧАСТЬ 1. ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

Ярославский государственный университет им. Демидова
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия

1. Введение

Исследование устойчивости заряженной поверхности жидкости представляет значительный интерес для физики, геофизики, техники и технологии в связи с тем, что при реализации неустойчивости такой поверхности на финальной ее стадии происходит эмиссия высокодисперсных сильно заряженных капелек. Этот феномен встречается как паразитное явление или как эксплуатируемый феномен в ионных коллоидных реактивных двигателях, жидкостной масс-спектрометрии органических и нелетучих веществ, в жидкометаллических источниках ионов, теории грозового электричества, при электростатическом диспергировании лакокрасочных материалов, горючего, инсектицидов и получении пучков монодисперсных капель в устройствах каплеструйной печати и подпитки термоядерных реакторов (см., например, [1 – 13] и указанную там литературу).

Механизм реализации неустойчивости плоской однородно заряженной поверхности (свободной или границы раздела сред) жидкости бесконечной или конечной глубины, когда в качестве малого параметра используется отношение амплитуды волны к ее длине, изучен достаточно подробно экспериментально и теоретически с учетом реальных физико-химических свойств жидкостей (см., например, [14 – 50]). Механизм неустойчивости однородно заряженной свободной поверхности идеальной жидкости исследован теоретически в [14 – 16], где был выведен критерий наступления неустойчивости. В [14] предложен качественный механизм развития неустойчивости, а в [15] выведено дисперсионное соотношение для капиллярных волн на заряженной поверхности идеальной жидкости и исследована ее устойчивость. В [16, 17] экспериментально показано, что при развитии неустойчивости заряженной поверхности жидкости на ней появляются конические выступы (получившие в последствии название конусов Тейлора), с вершин которых идет сброс избыточного заряда. В [18 – 19] образование конусов Тейлора изучалось путем численного моделирования. В [20] теоретически изучены особенности нарушения устойчивости поверхности жидкости на вершине конуса Тейлора. В [21 – 25] теоретически исследовалась устойчивость плоской заряженной границы раздела жидкостей с различными физико-химическими свойствами. В работах [26 – 30] исследовалась устойчивость заряженной границы раздела сред по отношению к тангенциальному скачку на ней поля скоростей, показано, что движение верхней жидкости относительно нижней дестабилизирует границу раздела. Устойчивость поверхности проводящей жидкости в перпендикулярном к ней переменном электрическом поле исследовалась в [31]. В [32 – 33] по методике, описанной в [34], получено и проанализировано, в смысле исследования критических условий реализации неустойчивости, дисперсионное уравнение для капиллярных волн на заряженной поверхности вязкой жидкости. Влияние толщины слоя вязкой жидкости с заряженной свободной поверхностью на закономерности развития ее неустойчивости изучено в [35]. В [36 – 41] исследовано влияние на условия развития неустойчивости заряженной поверхности эффекта динамического поверхностного натяжения, связанного с наличием

© Курочкина С.А., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Электронная обработка материалов, 2003, № 3, С. 26–36.

двойного электрического слоя у поверхности жидкости. Учет конечности скорости выравнивания электрического потенциала вдоль колеблющейся поверхности жидкости проведен в [42 – 46]. Роль эффекта релаксации вязкости в усложнении спектра капиллярных волновых движений жидкости со свободной поверхностью, как в отсутствии [47], так и при наличии электрического заряда рассмотрена в [48 – 52]. Особенности реализации неустойчивости поверхности жидкости по отношению, поверхностному заряду при наличии поверхностно-активных веществ рассмотрены в [53 – 54]. Закономерности формирования волнового рельефа на поверхности твердого тела, распыливаемого интенсивным пучком ионов, исследованы в [55 – 58]. Тем не менее, несмотря на столь разностороннее исследование закономерностей формирования и неустойчивости капиллярных волновых движений в глубокой жидкости, особенности реализации неустойчивости тонких слоев жидкости с заряженной свободной поверхностью в приближении длинных волн, когда в качестве малого параметра используется не отношение амплитуды волны к ее длине, а отношение толщины слоя жидкости к длине волны, практически не исследованы. Имея в виду слабую проработанность задачи о неустойчивости заряженной поверхности тонких слоев жидкости и ее важность для многочисленных приложений в нижеследующем изложении, основное внимание уделим особенностям экспериментального и теоретического исследования течения и устойчивости тонких слоев жидкостей.

2. Течение тонких слоев жидкости имеет ряд отличительных особенностей. Во-первых, поскольку толщина слоя мала, характерный масштаб изменения скорости течения жидкости поперек слоя велик по сравнению с масштабом ее изменения вдоль пленки. Все производные от скорости течения, берущиеся поперек пленки, велики по сравнению с аналогичными производными вдоль пленки. Это обстоятельство позволяет существенно упростить уравнения движения жидкости. Во-вторых, в слое конечной толщины важно адекватно задаче сформулировать условия на дне: в зависимости от модели это может быть условие "непротекания", "прилипания" или даже "проскальзывания". В-третьих, для волн на поверхности тонкой пленки в большинстве практически важных случаев можно использовать длинноволновое приближение, когда в качестве малого параметра выступает отношение толщины слоя жидкости к длине волны $(h/\lambda) << 1$.

Естественно различать горизонтальные и наклонные (в частности, вертикальные) тонкие слои жидкости в поле сил тяжести. В наклонных слоях волновое течение накладывается на основное поступательное, которое в поле сил тяжести не является бесконечно малым, а имеет конечную скорость, в то время как в горизонтальных слоях жидкости скорость поступательного движения параллельно свободной поверхности естественно брать равной нулю. Это обстоятельство позволяет по разному реализовывать с математической точки зрения асимптотический анализ (путем разложения по отношению толщины слоя к длине волны и амплитуды к длине волны). В линейном приближении для горизонтальных пленок нелинейное конвективное слагаемое в уравнении Эйлера или Навье–Стокса попросту отбрасывается. Для наклонных же пленок конвективное слагаемое линеаризуется в окрестности конечной скорости поступательного движения стекающей пленки.

Экспериментальные исследования свидетельствуют, что для наклонных жидких пленок на твердых подложках характерны три основных вида течения жидкости: ламинарный, волновой и турбулентный. Более корректно эти режимы могут быть названы несколько иначе [59]: ламинарный безволновой, неламинарный волновой и турбулентный. Все три вида течений можно проследить, меняя расход жидкости, поскольку они переходят один в другой при некоторых критических значениях числа Рейнольдса. Более того, волновой режим реализуется на некотором расстоянии от источника жидкости, а вначале течение является безволновым ламинарным.

В горизонтальных пленках реализуется только волновое движение.

Далее основное внимание будет уделено волновому режиму, поскольку нас интересуют возможные неустойчивости заряженной поверхности тонких слоев жидкости, начинающиеся с периодического (при неустойчивости Кельвина-Гельмгольца) или апериодического (при неустойчивости Тонкса-Френкеля) нарастания волн бесконечно малой амплитуды, порождаемых уже тепловым движением молекул жидкости [15]. Начальная амплитуда этих волн $\xi_0 \sim \sqrt{KT/\sigma}$, где K – постоянная Больцмана, T– абсолютная температура, σ – коэффициент поверхностного натяжения. Для всех реальных жидкостей $\xi_0 \sim 0{,}1$ нм. Но такие волны всегда присутствуют на поверхности жидкости, даже не будучи регистрированы приборами. При волновом течении тонкого слоя жидкости возможно развитие как периодического режима течения, при котором волна может быть описана гармоническими функциями, так и режима течения в виде уединенных волн, когда волна состоит из основного гребня с крутым фронтом и рядом более мелких волн впереди. При этом на значительных расстояниях между гребнями волн поверхность жидкости имеет невозмущенный характер. В настоящей работе уединенные волны рассматриваться не будут, поскольку этому вопросу посвящено много подробных обзоров (см., например, [60 – 63]), и все внимание будет уделено периодическим волнам в тонких пленках жидкости на твердой подложке в гравитационном и электрическом полях.

3. Для исследования движения жидкости наиболее простой является модель идеальной жидкости, не учитывающая диссипативных потерь. Долгое время большинство гидродинамических задач решалось именно в этом приближении. В частности, ряд классических результатов этой области гидродинамики относится к движению жидкости в тонком слое. Они подробно изложены в ряде монографий (см., например, [64 – 66]), где рассматриваются гравитационные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, находящейся на горизонтальном неподвижном дне, длина которых велика по сравнению с глубиной жидкости. В линейном приближении получены уравнения, описывающие волны в случае малой глубины, а также показано, что скорость распространения волн в тонком слое, в отличие от бесконечно глубокой жидкости, не зависит от их длины, то есть $U = \sqrt{gh_0}$, где h_0 – равновесная глубина. В [66] проведен вывод аналитических выражений для профилей стоячих и прогрессивных волн, получены формулы для потенциала скорости и уравнения движения частицы жидкости.

4. Одним из первых исследователей нелинейных волн на поверхности идеальной жидкости был Стокс [67]. Предполагая, что волна имеет постоянную форму и распространяется с постоянной скоростью, показал, что в нелинейных системах могут существовать периодические волны, угол при вершине которых должен быть равен 120°, а дисперсионное соотношение содержит амплитуду. В [68] задача о влиянии конечности глубины горизонтального слоя идеальной несжимаемой жидкости на форму и длину предельных прогрессивных волн Стокса решалась численно. Получены формы волн и определен диапазон чисел Фруда $\mathrm{Fr} = \left(2/H\right)^{1/2}$ (Fr = 0,071; 0,76; 0,78; 0,79; H – безразмерная глубина жидкости), построенных по глубине жидкости и фазовой скорости, в котором существуют волновые решения. Авторы предполагают, что наибольшему числу Фруда Fr = 0,79 должны соответствовать неограниченные длины волн, и сравнивают полученные решения с результатами для солитона Стокса. Но значения для максимального числа Фруда Fr для периодических волн Стокса, полученные в работе, на порядок больше данных для солитона.

В [69] проведен формальный асимптотический вывод нелинейных уравнений "мелкой воды" на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, находящейся на горизонтальном дне в поле сил тяжести, имеющей вид:

$$\eta_t + \left[\left(h+\eta\right)u\right]_x = 0, \quad u_t + uu_x + g\eta_x = 0,$$

где нижние индексы означают дифференцирование по соответствующим координатам; h – равновесная толщина слоя жидкости; $u = u(x, \mathrm{t})$ – поле скоростей; $\eta = \eta(x, t)$ – уравнение свободной поверхности жидкости. Первое из этих уравнений является уравнением неразрывности, а второе – законом сохранения объема жидкости. В качестве малого параметра используется отношение квадрата толщины невозмущенной пленки к квадрату длины волны $\beta = h_0^2/\lambda^2$. Приведенные выше уравнения "мелкой воды" получены в нулевом приближении по β. В первом приближении по β из тех же начальных положений в [69] выводится система уравнений Буссинеска, описывающая нелинейные волны малой амплитуды. Из системы уравнений Буссинеска в свою очередь получается уравнение Кортевега–де–Фриза, дающее солитонные решения.

Нелинейные волны на свободной поверхности идеальной жидкости широко исследовались как аналитическими, так и численными методами. В некоторых случаях проведено обобщение на случай маловязкой жидкости. Переход к модели вязкой жидкости связан с изменением граничных условий: появляется условие баланса тангенциальных натяжений на поверхности, ограничивающей жидкость. В случае тонкого слоя жидкости на твердом дне накладываются дополнительные условия прилипания жидкости к дну и условия на касательные компоненты скорости на свободной поверхности. Эти условия настолько сильно искажают картину движения в тонкой вязкой жидкой пленке по сравнению с картиной течения идеальной жидкости, что в наиболее содержательных и близких к реальности моделях тонких пленок обязательно тем или иным образом учитывается влияние вязкости (см., например, [47, 59]).

Экспериментальные данные

Начало экспериментальному исследованию течения тонкой пленки жидкости в поле силы тяжести на наклонной плоскости было положено П.Л. Капицей и С.П. Капицей [70]. Они разработали теневой метод фотографирования сечения тонкого слоя и впервые обратили внимание на трудности организации двумерного режима течения. Необходимость условия двухмерности волнового движения вызвана тем, что большинство теоретических методов исследования тонкой пленки вязкой жидкости разработано именно для двумерного случая.

Наблюдения естественного стекания пленки по твердой вертикальной поверхности [70, 71] показали, что волнообразование начинается на некотором расстоянии от места истечения жидкости. Переход к волновому режиму обусловлен случайными возмущениями, которые различны в разных точках потока, такие волны не регулярны, и область существования двумерных волн не велика (~ 150 мм). Они быстро разрушаются и становятся трехмерными. Для того, чтобы поток был одинаковым по всему периметру, волны в ходе экспериментов возбуждались искусственно пульсациями расхода жидкости, которые могут быть созданы, например, пульсациями расхода воздуха [70] или колебаниями мембраны [71]. При внесении искусственного возмущающего фактора непосредственно у входа в определенном диапазоне частот, зависящем от физических свойств и расхода жидкости, образовывались волны, а также увеличивалась область их существования.

При изменении частоты возмущающих импульсов и расхода жидкости изменяется и волновая картина. Так, при исследовании стекания дистиллированной воды и этилового спирта по вертикальной стеклянной трубке длиной 200 – 250 мм и диаметром 25 мм в [70] обнаружены два основных устойчивых режима волнового течения: периодический, предсказанный ранее теорией, и режим уединенных волн, движущихся независимо друг от друга. Периодический режим возникает не только при самых незначительных амплитудах синхронных возмущающих импульсов, но и при максимальной частоте из диапазона, в котором проводились эксперименты. Профиль волн имеет регулярный характер и при небольших расходах близок к синусоидальному. Режим уединенных волн реализуется, когда импульсы более редки, но значительны по амплитуде. Общий вид профиля одиночных волн независимо от расхода один и тот же. На вопрос, какой из наблюдаемых типов волнового режима является более устойчивым, авторы затрудняются ответить. В работе приводятся образцы фотоснимков сечений текущих тонких слоев жидкости.

При уменьшении частоты возмущающих импульсов устанавливался режим течения, который представлял собой ряд гребней уединенных волн (с крутым передним фронтом и рядом высокочастотных осцилляций впереди гребня), между которыми отсутствовала область невозмущенного течения. Этот тип периодического волнового течения авторами [70] назван промежуточным. Подобный профиль волн получен Накоряковым с сотрудниками при исследовании стекания воды, водных растворов этилового спирта и глицерина по внешней поверхности оргстеклянной трубы длиной 1 м и диаметром 60 мм [71]. Эти периодические волны, напоминающие формой уединенные, авторы [71] назвали катящимися. Теоретическая возможность их существования показана в [72]. Такие волны при стекании жидкости быстро растут, а их амплитуда превышает среднюю толщину пленки. Характеристики катящихся волн сильно зависят от вязкости жидкости.

Любой из рассмотренных типов волнового режима будет устойчиво существовать только при расходах, превышающих некий определенный для данной жидкости критический расход. Если расход жидкости ниже критического, то при любой силе и частоте возмущающих импульсов волны будут затухать. При увеличении расхода затухание будет замедляться и при достижении критического значения исчезать. При значениях расхода выше критического волны, вызванные даже малыми возмущающими импульсами, развиваются до определенной величины. Наблюдения, проводимые при различных частотах возмущающих импульсов, показали, что значения критических расходов для всех типов волн мало отличаются друг от друга. Из опыта получены значения критического расхода для воды и спирта (0,061 и 0,068 см^2/с соответственно). Критическое значение расхода определялось с точностью до 5 –10%. Также в ходе экспериментов [70, 71] производились количественные измерения амплитуд, фазовой скорости и длин волн для различных значений расходов потоков и всех исследуемых режимов течения. В [73] приводятся результаты измерения мгновенных профилей для катящихся волн. Полученные экспериментальные зависимости сравниваются с результатами, предсказанными теоретически. Наблюдается совпадение в пределах оценки точности, даваемой приближенной теорией.

Согласно экспериментальным данным на поверхности пленки жидкости, находящейся под действием электрического поля, возможно возникновение и развитие неустойчивости волнового типа даже в том случае, если пленка в отсутствии такого поля имела гладкую поверхность, то есть при значениях расхода ниже критического [74]. В зависимости от напряженности электрического поля волновая картина на поверхности изменяется. Исследования течения вазелинового масла по вертикальной стальной трубе диаметром $2{,}5 \cdot 10^{-5}$ м и длиной 0,65 м [74] показали, что при напряженности 2 кВ/см появляются возмущения в виде волн синусоидального профиля. Волны зарождаются на расстоянии 0,15 – 0,20 м от места формирования пленочного течения, стабилизируются и, распространяясь вниз по течению, затухают через 0,45 – 0,50 м. При дальнейшем увеличении напряженности поля волны увеличивают свою амплитуду и одновременно изменяется их профиль: передний фронт становится круче. С увеличением напряженности область волнообразования поднимается вверх, и при 10 кВ/см волны возникают сразу же после зоны формирования пленочного течения. Такое поведение слоя жидкости объясняется тем, что влияние электрического поля является дестабилизирующим и при достижении критического значения напряженности поля для данной жидкости способствует развитию малейших отклонений свободной поверхности от равновесной плоской вплоть до разрушения пленки.

Теоретическое исследование течения и устойчивости тонкой пленки жидкости в гравитационном поле

1. Как показали экспериментальные исследования [59, 70 –74], ламинарное течение пленки в поле силы тяжести вязкой жидкости на наклонной твердой подложке неустойчиво. Это одно из важных свойств течения тонкого слоя, приводящее к образованию волн на поверхности, а при дальнейшем развитии неустойчивости – и к распаду пленки. Неустойчивость может развиться под влиянием таких внешних факторов, как сила тяжести, направленная от свободной поверхности внутрь жидкости [34, 59, 73, 75], и от свободной поверхности во внешнюю по отношению к жидкости область [59, 76 –78], течение газа или жидкости над поверхностью пленки [27, 59, 76, 79], изменение температуры [76, 80].

Строгой классификации реализующихся неустойчивостей тонких пленок по типам в настоящее время пока нет. Тем не менее, в работе [81] перечислены известные типы неустойчивостей пленочных течений жидкости, граничащей с потоком газа в поле силы тяжести на наклонной плоскости:

Поверхностная неустойчивость, которая возникает при свободном стекании жидкости по вертикальной и наклонной плоскостям. Дестабилизирующее влияние в данном случае оказывают гравитационные силы.

Неустойчивость Кельвина-Гельмгольца – неустойчивость идеальной тяжелой жидкости по отношению к наличию тангенциального разрыва скорости жидкости, граничащей с другой жидкостью или газом.

Неустойчивость Релея-Тейлора, которая имеет место, когда пленка течет под пластиной, удерживаясь за счет сил смачивания. Дестабилизирующее влияние оказывает вес жидкости.

Неустойчивость, вызванная необратимым переносом энергии из возмущений газа, при его течении над волнистой поверхностью, в возмущения жидкости. Такая неустойчивость возникает при больших и умеренных числах Re.

Неустойчивость Толлмиена–Шлихтинга, вызываемая переносом энергии основного течения в возмущения жидкости. Эта неустойчивость возникает при достаточно больших Re.

Неустойчивость, вызываемая термокапиллярными эффектами. Она становится основным механизмом неустойчивости при больших числах Маха.

Перечисленные неустойчивости охватывают слишком широкий класс задач, каждой из которых можно посвятить обширный обзор. В данной части настоящего обзора сосредоточим внимание на движении жидкости под действием силы тяжести по вертикальной и наклонной плоскостям.

2. Основное уравнение, описывающее движение вязкой несжимаемой жидкости, есть уравнение Навье–Стокса, устанавливающее связь между полем скоростей $\vec{U}(\vec{r}, t)$ в жидкости и давлением в ней $p(\vec{r}, t)$:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U} \cdot \nabla\right)\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta \vec{\mathrm{U}} + \vec{F},$$

где ρ – плотность, а ν – кинематическая вязкость жидкости, находящейся во внешнем потенциальном силовом поле $\vec{F}$.

Когда толщина слоя жидкости h много меньше длины волны, уравнение Навье–Стокса удобно решать в приближении пограничного слоя, которое позволяет упростить исходную систему уравнений. Так как быстрота изменения скорости поперек слоя жидкости велика по сравнению с быстротой изменения вдоль слоя, все производные от скорости, берущиеся поперек пленки, могут считаться большими по сравнению с производными вдоль пленки. В том же приближении можно считать, что в пограничном слое поперечный градиент давления равен нулю [34, 65, 72, 82]. Система уравнений, описывающая свободное стекание тонкой пленки жидкости на твердой подложке, в приближении пограничного слоя принимает вид:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t}+U_x\frac{\partial U_x}{\partial x}+U_y\frac{\partial U_x}{\partial y}=g\cdot\sin\varphi+\nu\frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_x}{\partial y}=0,\qquad \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}=-g\cdot\cos\varphi,$$

где U_x – продольная, а U_y – поперечная составляющие скорости, x, y – продольная и поперечная координаты, φ – угол наклона поверхности, g – ускорение свободного падения.

Линейная задача о волновом стекании тонкой пленки в приближении пограничного слоя для волн малой амплитуды детально рассмотрена в [34] (см. также [59]). Авторами выведено линейное дифференциальное уравнение для отклонения свободной поверхности от средней толщины и получены условия, определяющие незатухающий характер периодических волн. Показано, что для поддержания незатухающего режима необходимо, чтобы диссипируемая энергия при волновом движении компенсировалась работой силы тяжести. Из равенства диссипируемой энергии и работы силы тяжести выведено условие, определяющее связь средней толщины пленки при данном расходе жидкости с волновыми характеристиками. Анализ этих условий показал, что в первом приближении средняя толщина слоя жидкости не зависит от амплитуды волны и близка к толщине слоя, которая имеет место при ламинарном режиме стекания. Во втором же приближении она оказывается функцией от амплитуды, то есть происходит смещение виртуальной поверхности, относительно которой отклоняются точки свободной поверхности жидкости. Сравнение значений волновых характеристик, вычисленных из упомянутых выше условий, с экспериментальными данными [70] показало достаточно хорошее согласие между теорией и опытом.

3. Что касается волновых движений жидкости в горизонтальных слоях, то следует отметить, что значительная часть исследований волновых движений жидкости в приближении "мелкой воды" $(h/\lambda)<<1$ была выполнена для длинных гравитационных (приливных) волн, для которых глубина морей мала по сравнению с длиной волны. Ясно, что в таких исследованиях влиянием сил поверхностного натяжения на физическую картину феномена справедливо пренебрегалось. Иначе будет обстоять дело при исследовании устойчивости заряженной свободной поверхности жидкости (то есть неустойчивости Тонкса-Френкеля), когда макроскопический феномен неустойчивости проявляется в результате нарастания именно капиллярных волн с амплитудой ~ 1 нм. Это же относится и к неустойчивостям Тейлора и Кельвина–Гельмгольца.

В связи с этим, рассмотрим вопрос о линейной устойчивости поверхностно заряженного тонкого слоя идеальной жидкости. Для этого выведем в линейном по h/λ и $|\xi|/\lambda$ приближении уравнение для капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности жидкости.

Пусть идеальный слой жидкости толщиной h и плотностью ρ заполняет плоский канал с твердыми стенками и дном. Рассмотрим капиллярно-гравитационное волновое движение жидкости по однородно с плотностью χ_0 заряженной поверхности проводящей жидкой пленки в таком канале.

Длина канала предполагается неограниченной, а глубина h – мала по сравнению с длиной волны λ (то есть (h/λ << 1)). В случае продольных длинных волн компонента U_x скорости вдоль канала велика по сравнению с компонентами U_y, U_z. Квадратичные по скорости члены в уравнении Эйлера опускаются, так как амплитуда волны считается малой.

Отбрасывая малые слагаемые, x – и y – компоненты уравнения Эйлера для тонкого слоя заряженной проводящей идеальной жидкости в канале можно записать в виде [65]:

$$\frac{\partial U_x}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x},\qquad \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}=-g. \tag{1}$$

Уравнение непрерывности в рассматриваемом случае приобретает вид [65]:

$$b \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + S_0 \cdot \frac{\partial U_x}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

где b – ширина сечения канала у поверхности жидкости, $S_0 = \text{const}$ – площадь поперечного сечения невозмущенной жидкости в канале, $\xi = \xi(x,\ t)$ – вертикальное смещение жидкости при ее колебаниях, являющееся функцией от координаты x и времени t причем $\left(|\xi|/\lambda\right) << 1$.

Потенциал электрического поля Φ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0, \quad \Phi = -4\pi\chi_0 z + \varphi(x,\ t),$$

с граничными условиями:

$$z = \xi: \qquad \Phi = \text{const},$$

$$z \to \infty: \qquad \Phi = -4\pi\chi_0 z.$$

Динамическое граничное условие на поверхности с учетом лапласовского давления и давления электрического поля при $z = 0$ записывается в виде [15]:

$$p = p_{\text{атм}} + g\rho\xi - \sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} - 4\pi\chi_0^2 k, \tag{3}$$

где $p_{\text{атм}} = \text{const}$, χ_0 – поверхностная плотность заряда, σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Подставив (3) в (1), получаем

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\left(g\rho \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \mathrm{x}} - \sigma\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3} - 4\pi\chi_0^2 k \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \mathrm{x}}\right). \tag{4}$$

Дифференцируя (2) по t и подставляя в (4), получим искомое волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + \frac{S_0}{\rho b}\left(4\pi\chi_0^2 k \cdot \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \sigma \cdot \frac{\partial^4\xi}{\partial x^4} - g \cdot \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right) = 0 \cdot$$

Полагая, что ξ имеет вид бегущей волны $\xi = a \cdot \exp[i(kx - \omega t)]$, несложно получить дисперсионное уравнение для рассматриваемых волн бесконечно малой амплитуды в тонком слое жидкости:

$$\omega^2 = \frac{S_0}{\rho b} \cdot \left(\sigma k^4 + \rho g k^2 - 4\pi\chi_0^2 k^3\right).$$

В безразмерных переменных, в которых $\rho = \sigma = g = 1$, а масштабы характерных величин записываются как

$$S_{0*} = \frac{\sigma}{\rho g}, \quad b_* = \left(\frac{\sigma}{\rho g}\right)^{1/2}, \quad \chi_{0*} = (\rho\sigma g)^{1/4}, \quad \omega_* = \left(\frac{\rho g^3}{\sigma}\right)^{1/4}, \quad k_* = \left(\frac{\rho g}{\sigma}\right)^{1/2},$$

дисперсионное уравнение примет более удобную для дальнейшего анализа форму:

$$\omega^2 = \frac{S_0}{b} \cdot \left(k^4 - Wk^3 + k^2\right), \tag{5}$$

где $W = 4\pi\chi_0^2 / \sqrt{\rho g \sigma}$ – параметр, характеризующий давление электрического поля, и за всеми безразмерными величинами сохранены прежние обозначения.

Из (5) несложно видеть, что при достаточно большом значении безразмерного параметра W квадрат частоты волны может перейти через ноль и стать отрицательным. А это означает, что частота станет мнимой, и выражение для бегущей волны преобразуется к виду $\xi = a \cdot \exp(ikx) \cdot \exp(\pm\,\omega t)$. Часть решения с отрицательным знаком при ωt будет экспоненциально убывать со временем, а с положительным – нарастать. Другими словами, будет иметь место неустойчивость свободной поверхности тонкого слоя по отношению к поверхностному заряду.

Чтобы найти волновое число, отвечающее волне с максимальным инкрементом неустойчивости, приравняем нулю производную от частоты по волновому числу:

$$\frac{\partial\omega}{\partial k} \equiv \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{S_0}{b}\left(k^4 - Wk^3 + k^2\right)\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{S_0}{b}\cdot\left(4k^3 - 3Wk^2 + 2k\right)\right) = 0\,.$$

Сравнивая это условие с условием проявления неустойчивости $\omega^2 = 0$, получим систему двух линейных алгебраических уравнений для отыскания критических значений $W_{кр}$ и $k_{кр}$:

$$k^2 - Wk + 1 = 0\,, \qquad 4k^2 - 3Wk + 2 = 0\,, \tag{6}$$

откуда легко находятся: $k_{кр} = 1$, $W_{кр} = 2$.

Таким образом, критические условия реализации неустойчивости заряженной свободной поверхности тонкого слоя в приближении $h \ll \lambda$ совпадают с таковыми на поверхности бесконечно глубокой жидкости [15]. Но некоторое различие все же имеется.

Из первого из условий (6), то есть из условия $(\partial\omega/\partial k) = 0$ несложно найти зависимость критического значения параметра W от произвольного волнового числа

$$W_{кр} = \frac{2}{3k} + \frac{4}{3}k\,.$$

Для бесконечно глубокой жидкости такая же зависимость имеет вид

$$W_{кр} = k + \frac{1}{k}\,.$$

Полученный результат означает, что при реализации неустойчивости свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду эмиссионные выступы на тонком слое жидкости будут формироваться за счет суперпозиции более длинных капиллярных волн, чем в случае глубокой жидкости.

Интересно отметить, что фазовая скорость капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности тонкого слоя идеальной жидкости является функцией волнового числа:

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{S_0}{b}\left(k^2 - Wk + 1\right)}$$

в отличие от длинных чисто гравитационных волн [5], для которых фазовая скорость $V_\varphi = \left(\frac{S_0}{b}\right)^{1/2}$ не зависит от волнового числа k.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baily A.G.* Electrostatic atomization of liquids // Sci. Prog. Oxf. 1974. V.61. P.555 – 581.
2. *Baily A.G.* Electrostatic spraying of liquids // Phys. Bull. 1984. V. 35. № 4. P.146 –148.
3. *Коженков В.И., Фукс Н.А.* Электрогидродинамическое распыление жидкости (обзор) // Успехи химии. 1976. Т. 45. № 12. С. 2274 – 2284.
4. *Габович М.Д.* Жидкометаллические источники ионов (обзор) // УФН. 1983. Т. 140. №. 1. С. 137 – 151.
5. *Дудников В.Г., Шабалин А.Л.* Электрогидродинамические источники ионных пучков (обзор) // Препринт 87-63 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск. 1987.
6. *Григорьев А.И., Сыщиков Ю.В., Ширяева С.О.* Электростатическое монодиспергирование жидкостей как метод получения двухфазных систем (обзор) // ЖПХ. 1989. Т. 62. № 9. С. 2020 – 2026.
7. *Fenn J.B., Mann M., Meng C.K. et al.* Electrospray ionization for mass spectrometry of large biomolecules // Science. 1989. V. 246. № 4926. P. 64 – 71.
8. *Григорьев А.И.* Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23 – 32.
9. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Шевченко С.И.* Электрогидродинамические неустойчивости в дисперсных системах (обзор) // Научное приборостроение. 1991. Т. 1. № 3. С. 25 – 43.

10. *Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryaeva S.O.* Ball lightning and St.Elmo's fire as forms of thunderstorm activity // J.Sci.Exp. 1991. V. 5. № 2. P.163 –190.
11. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Закономерности рэлеевского распада заряженной капли // ЖТФ. 1991. Т. 61. № 3. С. 19 – 28.
12. *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкости (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3 – 20.
13. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Деление заряженных капель во внешнем электрическом поле на части сравнимых размеров (обзор) // Электронная обработка материалов. 2000. № 4. С. 17 – 27.
14. *Tonks L.* A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field // Phys. Rev. 1935. V. 48. P.562 – 568.
15. *Френкель Я.И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348 – 350.
16. *Taylor G.I., McEwan A.D.* The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. № 1. P. 1 – 15.
17. *Taylor G.* Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. A. 1964. V. 280. P. 383 – 397.
18. *Александров М.Л., Галль Л.Н., Иванов В.Я. и др.* Расчет свободной поверхности проводящей жидкости, находящейся в сильном электрическом поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 6. С. 165 – 167.
19. *Allen J.E.* A note on the Taylor cone // J. Phys. D: Appl. Phys. 1985. V. 18. № 1. P. 59 – 62.
20. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* О некоторых закономерностях реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости // ЖТФ. 1999. Т. 69. № 7. С. 15 – 22.
21. *Ермаков В.И.* Об устойчивости границы раздела двух диэлектрических жидкостей в электрическом поле // Магнитная гидродинамика. 1976. № 4. С. 85 – 88.
22. *Зайцев М.В., Шлиомис М.И.* Характер неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в постоянном поле // ДАН СССР. 1969. Т. 188. № 6. С. 1261 – 1262.
23. *Иевлев И.И., Исерс А.Б.* Равновесие и устойчивость поверхности раздела жидких диэлектриков в электрическом и гравитационном полях // Магнитная гидродинамика. 1976. № 4. С. 89 – 95.
24. *Ермаков В.И.* Об устойчивости плоской поверхности раздела жидкостей в нормальном электрическом поле // Вестник Харьковского университета. № 221. Прикладная математика и механика. 1981. С. 46 – 51.
25. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* Неустойчивость плоской границы раздела двух несмешивающихся проводящих вязких жидкостей в нормальном электростатическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 6. С. 116 – 123.
26. *Григорьев О.А., Ширяева С.О.* Неустойчивость заряженной плоской поверхности тангенциального разрыва двух несмешивающихся жидкостей различных плотностей // ЖТФ. 1996. Т. 66. № 2. С. 23 – 34.
27. *Ширяева С.О., Кузьмичев Ю.Б., Голованов А.С., Белоножко Д.Ф.* Особенности реализации неустойчивости Кельвина-Гельмгольца при конечной толщине верхней среды // Электронная обработка материалов. 2000. № 2. С. 25 – 33.
28. *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Белоножко Д.Ф.* О взаимодействии капиллярных волн на заряженном тангенциальном разрыве поля скоростей // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 11. С. 10 – 17.
29. *Григорьев А.И.* Неустойчивость заряженной плоской границы раздела сред по отношению к тангенциальному разрыву на ней зависящего от времени поля скоростей // ЖТФ. 2000. Т. 70. № 1. С. 24 – 26.
30. *Ширяева С.О.* Линейное взаимодействие волн на заряженной границе раздела сред при наличии тангенциального разрыва поля скоростей // ЖТФ. 2001. Т. 71. № 3. С. 9 – 16.
31. *Алиев И.Н.* Параметрическая неустойчивость поверхности проводящей жидкости в переменном электрическом поле // Магнитная гидродинамика. 1987. № 2. С. 78 – 82.
32. *Алиев И.Н., Филиппов А.В.* О волнах, распространяющихся по плоской поверхности вязкой проводящей жидкости в электрическом поле // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 94 – 98.
33. *Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О.* Механизм развития неустойчивости заряженной поверхности жидкости // ЖТФ. 1992. Т. 62. № 9. С. 12 – 21.
34. *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., 1959.

35. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромысов В.А., Белоножко Д.Ф.* Капиллярные колебания и неустойчивость Тонкса-Френкеля слоя жидкости конечной толщины // ЖТФ. 1997. Т. 67. № 9. С. 12 – 21.
36. *Григорьев О.А.* Влияние эффекта динамического поверхностного натяжения на волновые движения жидкости // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. № 24. С. 15 – 21.
37. *Григорьев О.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* О возможной природе движений жидкости, вызванных релаксацией поверхностного натяжения // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. № 12. С. 36 – 41.
38. *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И.* Эффект динамического поверхностного натяжения и капиллярное волновое движение заряженной поверхности жидкости // ЖТФ. 1996. Т. 66. № 10. С. 31 – 46.
39. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф.* Влияние упругости и динамического поверхностного натяжения на спектр волновых движений заряженной поверхности жидкости // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. № 16. С. 32 – 37.
40. *Ширяева С.О., Григорьев О.А.* Влияние динамического поверхностного натяжения на инкремент неустойчивости Тонкса-Френкеля // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. № 19. С. 61 – 65.
41. *Ширяева С.О., Григорьев О.А.* О влиянии эффекта релаксации поверхностного натяжения на спектр движений жидкости с заряженной свободной поверхностью // ЖТФ. 2000. Т. 70. № 6. С. 31 – 36.
42. *Melcher J.R.* Electrohydrodynamic and magnetohydrodynamic surface waves and instabilities // Phys. Fluids. 1961. V. 4. № 11. P.1348 – 1354.
43. *Melcher J.R., Smith C.V.* Electrohydrodynamic charge relaxation and interfacial perpendicular-field instability // Phys. Fluids. 1969. V. 12. № 4. P. 778 – 790.
44. *Melcher J.R., Schwarz W.J.* Interfacial relaxation over stability in a tangential electric field instability // Phys. Fluids. 1968. V. 11. № 12. P. 2604 – 2616.
45. *Melcher J.R., Taylor G.I.* Electrohydrodynamics: a review of the role of interfacial shear stress // Ann. Rev. Fluid Mech. Palo. Alto, California. 1969. V. 1. P. 111 – 146.
46. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А.* Неустойчивость капиллярных зарядово-релаксационных движений жидкости // Письма в ЖТФ. 1996. Т. 22. № 4. С. 89 – 94.
47. *Саночкин Ю.В.* Влияние вязкости на свободные поверхностные волны в жидкостях // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 4. С. 156 – 164.
48. *Григорьев О.А., Ширяева С.О.* Волны в релаксирующей вязкой электропроводной жидкости, обладающей поверхностным зарядом // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 98 – 105.
49. *Ширяева С.О., Григорьев О.А., Муничев М.И., Григорьев А.И.* Волновое движение в заряженной вязкоупругой жидкости // ЖТФ. 1996. Т. 66. № 10. С. 47 – 62.
50. *Григорьев О.А., Ширяева С.О.* Капиллярные волны в релаксирующей вязкой электропроводной жидкости, обладающей поверхностным зарядом // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 98 – 105.
51. *Ширяева С.О., Григорьев О.А.* Влияние релаксации вязкости на величину инкремента неустойчивости Тонкса-Френкеля // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. № 2. С. 1 – 4.
52. *Ширяева С.О., Григорьев О.А.* О капиллярном движении вязкоупругой жидкости с заряженной свободной поверхностью // ЖТФ. 2000. Т. 70. № 8. С. 39 – 44.
53. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Рахманова Ю.Д.* Взаимодействие релаксационных волн с волнами перераспределяющегося по свободной поверхности поверхностно-активного вещества // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. № 18. С. 25 – 31.
54. *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Об особенностях капиллярных движений растворов поверхностно-активных веществ // ЖТФ. 1998. Т. 68. № 2. С. 22 – 29.
55. *Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* О влиянии заряда на формирование волнового микрорельефа на поверхности вязкоупругой среды // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 21. С. 12 – 20.
56. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Капиллярные колебания вязкоупругой среды под влиянием постоянного внешнего воздействия // ЖТФ. 2000. Т. 70. № 11. С. 15 – 23.
57. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Автоколебательная неустойчивость свободной поверхности вязкоупругой среды // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. № 3. С. 80 – 85.

58. *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Голованов А.С.* О формировании волнового микрорельефа на поверхности полупроводника при распыливании его сильноточным ионным пучком // Электронная обработка материалов. 2000. № 6. С. 26 – 30.
59. *Бояджиев Х., Бешков В.* Массоперенос в движущихся пленках жидкости. М., 1988.
60. *Ильичев А.Т.* Уединенные волны в средах с дисперсией и диссипацией (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 3 – 27.
61. *Демехин Е.А., Каплан М.А., Шкадов В.Я.* О математических моделях теории тонких слоев вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 6. С. 73 – 81.
62. *Демехин Е.А.* Неустойчивость и нелинейные волны в тонких слоях вязкой жидкости: Автореф. дис. на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. М., 1989.
63. *Цвелодуб О.Ю.* Нелинейные волны на стекающих пленках вязкой жидкости: Автореф. дис. на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. АН СССР. СО. Новосибирск, 1989.
64. *Стокер ДЖ. Дж.* Бифуркационные явления в теории поверхностных волн. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. М., 1974.
65. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М., 1986.
66. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика / Под ред. И.А. Кибеля Ч. 1. Л., 1963.
67. *Уизем Д.Ж.* Линейные и нелинейные волны. М., 1977.
68. *Аромин Э.Л., Иванов А.Н., Садовников Д.Ю.* Предельные волны Стокса в жидкости конечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 4. С. 125 – 129.
69. *Габов С.А.* Введение в теорию нелинейных волн. М., 1988.
70. *Капица П.Л., Капица С.П.* Волновое течение тонких слоев жидкости // ЖЭТФ. 1949. Т. 19. Вып.2. С.105 – 120.
71. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Алексеенко С.В.* Стационарные двумерные катящиеся волны на вертикальной пленке жидкости // ИФЖ. 1976. Т. 30. № 5. С. 780 – 785.
72. *Накоряков В.Е., Шрейбер И.Р.* Волны на поверхности тонкого слоя вязкой жидкости // ПМТФ. 1973. № 2. С. 109 – 113.
73. *Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Алексеенко С.В., Орлов В.В.* Мгновенный профиль скорости в волновой пленке жидкости // ИФЖ. 1977. Т. 33. № 3. С. 399 – 404.
74. *Гагарин А.Г.* Влияние постоянного электрического поля на пленочное течение жидкого диэлектрика // ИФЖ. 1985. Т. 48. № 3. С. 432 – 436.
75. *Шкадов В.Я.* Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести // Изв. АН СССР. МЖГ. 1967. № 1. С. 43 – 51.
76. *Александров Н.Л. Сон Э.Е.* Лекции по теории устойчивости гидродинамических и тепловых процессов. М., 2000.
77. *Иногамов Н.А., Демьянов А.Ю., Сон Э.Е.* Гидродинамика перемешивания. М., 1999.
78. *Babchin A.J., Frenkel A.L., Levich B.G., Sivashinsky G.I.* Nonlinear saturation of Rayleigh-Taylor instability in thin films // Phys. Fluids. 1983. V. 26. № 11. P. 3159 – 3161.
79. *Биркгоф Г.* Гидродинамика. Методы. Факты. Подобие. М., 1963.
80. *Гершуни Г.З. Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., 1972.
81. *Демехин Е.А., Потапов О.Л.* Математическое моделирование гидродинамики волновых пленок жидкости с внешними активными воздействиями // Препринт № 215-90. Новосибирск. 1990.
82. *Шкадов В.Я., Запрянов З.Д.* Течения вязкой жидкости. М., 1984.

Поступила 10.12.02

Summary

The characteristic properties of experimental and theoretical investigations of a wave flow on a horizontal and inclined fluid layers with charged free surface are studied.