Ф.П. Гросу

РЕЛАКСАЦИЯ ОБЪЕМНЫХ ЗАРЯДОВ В ОДНОМЕРНОМ СТАЦИОНАРНОМ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОТОКЕ

Государственный аграрный университет Молдовы,
ул. Мирчешть, г. Кишинев, MD-2049, Республика Молдова

1. Вводные замечания. Одномерные течения в электрогидродинамике (ЭГД) служат основой ее наиболее важных практических приложений, в частности, в целях преобразования гидродинамической энергии в электрическую (ЭГД–генераторы) или, наоборот, электрической в гидродинамическую (ЭГД–насосы) [1]. В этих и других аналогичных случаях возникают вопросы о динамике установления или исчезновения стационарного режима течения, представляющей как теоретический, так и практический интерес. Другими словами, речь идет о нестационарных переходных процессах, называемых релаксационными [2, 3].

В данной работе рассматривается релаксация объемных зарядов, инжектируемых извне в некоторый начальный момент времени ($t = t_0$) в стационарный поток диэлектрической (слабопроводящей) жидкости. При этом пренебрегаем влияние электрического поля на гидродинамику потока, полагая распределение скорости известным, например, из решения гидродинамической задачи.

2. Постановка задачи. Известно [3, 4], что релаксация объемных зарядов возникших по какой-либо причине в однородной неподвижной среде, описывается экспоненциальной классической зависимостью

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau}, \tag{1}$$

где $\rho_0 = \rho\big|_{t=0}$ – начальное распределение зарядов, $\tau = \varepsilon/\sigma$ – время (максвелловское) электрической релаксации, $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$ – абсолютная диэлектрическая проницаемость, σ – удельная электропроводность.

Этот закон – простейшее решение системы уравнений электродинамики

$$\rho = \varepsilon\nabla\vec{E},\ \ \vec{j} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\ \ \nabla\vec{j} = 0 \tag{2}$$

при ε = const и σ = const.

Следует, однако, заметить, что второе уравнение содержит некоторую неточность. В нем не учитывается ток, обусловленный самими объемными зарядами плотностью ρ. Полагая, что их подвижность равна k, уточненное уравнение для плотности тока должно иметь вид

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} + k\rho\vec{E} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}. \tag{3}$$

Одновременно наличие второго слагаемого в правой части (3) вносит коррекцию и на распределение самого поля. Решение релаксационной задачи, то есть уравнения (3), с учетом данного обстоятельства в однородном случае приводится в работе [5], где показано, что закон релаксации носит более сложный характер, чем формула (1), в частности, релаксационный процесс распространяется с некоторой скоростью $\vec{u}$.

Второе слагаемое в (3) можно формально выделить в произвольной системе зарядов, исходя их общего определения удельной электропроводности и плотности объемных зарядов:

$$\sigma \equiv \sum_{i=1}^{m} k_i^+\rho_i^+ + \sum_{i=1}^{n} k_i^-\rho_i^-,\ \ \rho \equiv \sum_{i=1}^{m}\rho_i^+ - \sum_{i=1}^{n}\rho_i^-. \tag{4}$$

Введя систему средних значений (обозначений)

$$\begin{cases} k^{+} \equiv \left(\sum_{i=1}^{m} k_i^{+} \rho_i^{+} \right) / \sum_{i=1}^{m} \rho_i^{+}; \quad \rho^{+} \equiv \sum_{i=1}^{m} \rho_i^{+}; \\ k^{-} \equiv \left(\sum_{i=1}^{n} k_i^{-} \rho_i^{-} \right) / \sum_{i=1}^{n} \rho_i^{-}; \quad \rho^{-} \equiv \sum_{i=1}^{n} \rho_i^{-}; \end{cases} \tag{5}$$

многокомпонентную систему сводим к двух компонентной:

$$\sigma \equiv \hat{e}^{+}\rho^{+} + \hat{e}^{-}\rho^{-}, \ \rho = \rho^{+} - \rho^{-}. \tag{6}$$

Отсюда, исключив ρ^{+}, можно выделить в общей проводимости нескомпенсированный заряд

$$\sigma = \sigma_0 + \hat{e}\rho, \tag{7}$$

где

$$\sigma_0 \equiv (\hat{e}^{+} + \hat{e}^{-}) \cdot \rho^{-}; \quad \hat{e} \equiv \hat{e}^{+}. \tag{8}$$

В формуле (5) σ_0 – собственная проводимость в отличие от $k\rho$, которая обычно может появляться за счет примесей. Однако в электрогидродинамике, как правило, объемные заряды создаются с помощью коронного разряда и возникают естественным путем (речь идет о газах) за счет нейтрализации более быстрых электронов [1], поэтому трудно говорить о σ_0 как о “собственной” проводимости, отделив ее от $k\rho$. В дальнейшем в (7) опустим индекс при σ_0, то есть за основу примем формулу (3), в которой под ρ будем подразумевать нескомпенсированную часть заряда (его избыток или дефицит).

Выражение (3) относится по-прежнему к неподвижной среде, если же она движется, то в правой части (3) следует добавить ток конвекции $\rho\vec{\upsilon}$ и таким образом получим окончательную формулу для плотности тока:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} + k\rho\vec{E} + \rho\vec{\upsilon} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \tag{9}$$

где $\vec{\upsilon}$ – конвективная (переносная) скорость движения среды.

Следует заметить, что и это выражение не является самым общим. В нем отсутствуют диффузионная составляющая, а при наличии магнитного поля – еще индуцированная составляющая $\left(\vec{E}_{\text{èí ä}} \sim \vec{\upsilon} \times \vec{H}\right)$. Однако, как показывают оценки, этими составляющими можно пренебречь.

Вводя полную скорость движения носителей зарядов

$$\vec{u} \equiv \vec{\upsilon} + k\vec{E} \tag{10}$$

и принимая среду несжимаемой $\left(\nabla\vec{\upsilon} = 0\right)$ с учетом первого уравнения (2), получим основное уравнение для полной скорости $\vec{u}$:

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{u}\left(\nabla\vec{u}\right) + \frac{1}{\tau}\vec{u} = \frac{k}{\varepsilon}\vec{j} + \frac{1}{\tau}\vec{\upsilon}. \tag{11}$$

3. Решение задачи. Уравнение (11) решено [5] при нулевой правой части, то есть для неподвижной среды $\left(\vec{\upsilon} \equiv 0\right)$ и чисторелаксационного процесса $\left(\vec{j} \equiv 0\right)$. В нашем случае, однако, правая часть отлична от нуля, даже если $\vec{j} \equiv 0$, так как $\vec{\upsilon} \neq 0$. Если же учесть $\vec{j} \neq 0$, то неизвестно, по какому закону меняется $\vec{j}$ со временем, поэтому в (11) посредством операции div перейдем к уравнению для плотности объемных зарядов.

Учитывая равенство

$$\rho = \frac{\varepsilon}{k}\nabla\vec{u}, \tag{12}$$

найдем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{u}\nabla\rho = -\frac{1}{\tau}\rho\left(1 + \beta\rho\right), \tag{13}$$

где

$$\beta \equiv \frac{k\tau}{\varepsilon} \equiv \frac{k}{\sigma}. \tag{14}$$

Основная трудность решения уравнения (13) связана с наличием $\vec{u}$ в качестве коэффициента при $\nabla\rho$. Для ее преодоления заметим, что в одномерном случае $\vec{\upsilon} = \vec{i}\,\upsilon_x$, вследствие $\nabla\vec{\upsilon} = 0$ имеем $\upsilon_x \equiv \upsilon(y,z)$. Рассматривая типичный случай зарядки (инжекции) путем наложения (продольного) электрического поля, то есть $\vec{E} = \vec{i}E_x = \vec{i}\cdot E$, получим $E = E(x, t)$, так как $E_y = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0;\ E_z = -\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$ Следовательно, $\rho = \rho(x, t)$ в силу первого уравнения системы (2).

Далее, усреднив уравнение (13) по поперечному сечению потока, то есть по координатам (y, z), получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overline{u}\,\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{1}{\tau}\rho(1+\beta\rho), \tag{15}$$

где среднее значение $\overline{u}$ согласно (10)

$$\overline{u} = \overline{\upsilon} + kE, \tag{16}$$

где $\overline{\upsilon} = \text{const},\ E = E(x)$, причем учтем, что среднее по (y, z) функций от x равно этим функциям. Если продольная протяженность потока велика по сравнению с максимальным поперечным размером, то

$$E(x) \cong U/L = \text{const}, \tag{17}$$

где U – разность потенциалов на торцах канала длиной L.

Тогда в (16), а следовательно, и в (15) можно принять $\overline{u} = \text{const}$, тем более это допустимо, так как обычно $\overline{\upsilon} >> kE$.

С учетом сказанного уравнение (15) равносильно системе обыкновенных уравнений (черту при $\overline{u}$ опускаем)

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{d\rho}{-\dfrac{1}{\tau}\rho(1+\beta\rho)}, \tag{18}$$

у которой следующие два интеграла:

$$x - ut = \psi_1, \quad \frac{\rho e^{t/\tau}}{1+\beta\rho} = \psi_2. \tag{19}$$

Общее решение задачи, то есть уравнения (15), – произвольная функция от ψ_1 и ψ_2:

$$F(\psi_1, \psi_2) = 0. \tag{20}$$

Дальнейшая задача состоит в построении решения задачи Коши при начальном

$$\rho(x,t)\Big|_{t=t_0=0} = f(x),\ \ x \in (x_0, L) \tag{21}$$

или граничном

$$\rho(x,t)\Big|_{x=x_0} = F(t),\ \ t \in (0, \infty) \tag{22}$$

условиях, где $f(x)$ и $F(t)$ предполагаются заданными функциями.

Следуя общим правилам построения решений [6], применительно к (21) подставляем в (19) $t = 0$:

$$\begin{cases} x = \overline{\psi}_1 \\ \dfrac{\rho}{1+\beta\rho} = \overline{\psi}_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\psi_2}{1-\beta\psi_2} = f(\psi_1).$$

Отсюда получим первое решение

$$\rho(x,t) = \frac{e^{-t/\tau} f(x-ut)}{1+\beta\left(1-e^{-t/\tau}\right) f(x-ut)}, \tag{23}$$

причем область определения представлена неравенствами

$$x_0 < x - ut < L \Leftrightarrow x_0 + ut < x < L. \tag{24}$$

Аналогично, подставив в (19) $x = x_0$ и используя граничное условие (22), находим

$$\frac{\psi_2}{e^{(x_0-\psi_1)/\tau u}-\beta\psi_2}=F\left(\frac{x_0-\psi_1}{u}\right).$$

Откуда второе решение

$$\rho(x,t)=\frac{e^{-\frac{x-x_0}{\tau u}}F\left(t-\frac{x-x_0}{u}\right)}{1+\beta\left(1-e^{-\frac{x-x_0}{\tau u}}\right)F\left(t-\frac{x-x_0}{u}\right)},\tag{25}$$

причем область определения будет

$$0<t-\frac{x-x_0}{u}<\infty\Leftrightarrow x_0<x<x_0+ut.\tag{26}$$

Объединяя (23) – (26), окончательно получим

$$\rho=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{t}{\tau}}f(x-ut)}{1+\beta\left(1-e^{-t/\tau}\right)f(x-ut)}, & x_0+ut<x<L\\[2ex] \dfrac{e^{-\frac{x-x_0}{\tau u}}F\left(t-\frac{x-x_0}{u}\right)}{1+\beta\left(1-e^{-\frac{x-x_0}{\tau u}}\right)F\left(t-\frac{x-x_0}{u}\right)}, & x_0<x<x_0+ut\end{cases}\tag{27}$$

Следовательно, эта формула дает решение задачи во всей области ее определения.

4. Частные случаи. *а*) *Поток первоначально не заряжен,* то есть

$$\rho(x,t)\big|_{t=0}=f(x)=0,\quad x_0<x<L,\tag{28}$$

в начальной плоскости $x = x_0$ инжектируется постоянный объемный заряд плотностью

$$\rho(x,t)\big|_{x=x_0}=F(t)=\rho_0\equiv\text{const}\neq 0,\quad 0<t<\infty.\tag{29}$$

Подстановка (28), (29) в (27) дает

$$\rho=\begin{cases}0, & x_0+ut<x<L\\[2ex] \dfrac{\rho_0 e^{-\frac{x-x_0}{\tau u}}}{1+\beta\left(1-e^{-\frac{x-x_0}{\tau u}}\right)\rho_0}, & x_0<x<x_0+ut\end{cases}\tag{30}$$

Для этого случая распределение зарядов представлено на рис. 1. Фронт заряда движется со скоростью u от левого к правому торцу канала, причем правая часть области, то есть $x \in (x_0 + ut, L)$, не заряжена. В момент времени t, определяемый равенством

$$x_0+ut_1=L\Leftrightarrow t_1=\frac{L-x_0}{u},\tag{31}$$

зарядовый фронт достигает правого конца канала. При этом заряд распределен согласно формулам (30), то есть

$$\rho(x)=\frac{\rho_0 e^{-\frac{x-x_0}{u\tau}}}{1+\rho_0\beta\left(1-e^{-\frac{x-x_0}{u\tau}}\right)},\quad x\in[x_0;L].\tag{32}$$

Это и есть стационарное решение задачи, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой (32) в (15) при $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

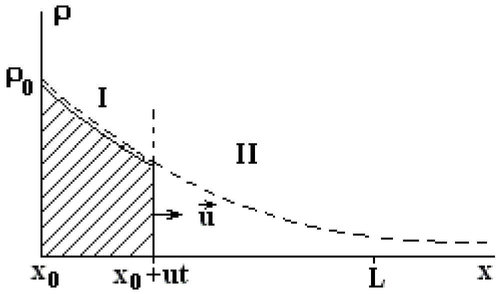

Рис. 1

Интегрируя выражение (30), получим распределение напряженности поля

$$E(x) = E_0 + \frac{\tau u}{\varepsilon\beta} \ln\left[1 + \rho_0\beta\left(1 - e^{-\frac{x - x_0}{\tau u}}\right)\right], \quad x \in (x_0, x_0 + ut). \tag{33}$$

При $x > x_0 + ut$ напряженность постоянна.

Соответствующее распределение $E(x)$ показано на рис. 2. В пределах $x \in (x_0, x_0 + ut)$ напряженность возрастает, а в остальной области решения задачи она постоянна.

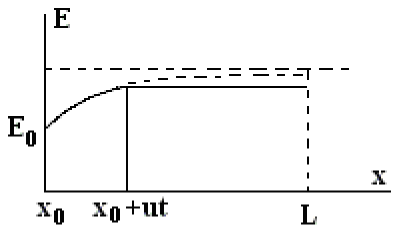

Рис. 2

В момент времени, определяемый равенством (31), устанавливается монотонно возрастающая напряженность поля, согласно (33). Если положить $x_0 = 0$, $u \approx \upsilon$, то согласно этой формуле фронт заряда, перемещаясь со скоростью потока, устанавливается через время $t_1 \approx L/\upsilon$. Например, положив $L \approx 1$ м, $\upsilon = 1$ м/с, получаем $t_1 \approx 1$ с, то есть всего за секунду устанавливается стационарное распределение заряда и поля.

б) Экспоненциальный рост заряда в начальной плоскости

$$\rho(x,t)\Big|_{x=x_0} = F(t) = \rho_\infty\left(1 - e^{-\gamma t}\right), \quad t \in [0;\infty), \tag{34}$$

где γ – некий коэффициент.

Это реальная ситуация при зажигании коронного разряда. Область $x \in (x_0 + ut, L)$ по-прежнему считаем свободной от зарядов.

Заменим в (34) $t \to t - (x - x_0)/u$:

$$F\left(t - \frac{x - x_0}{u}\right) = \rho_\infty\left[1 - e^{-\gamma\left(t - \frac{x - x_0}{u}\right)}\right]. \tag{35}$$

Отсюда

$$F\left(t - \frac{x - x_0}{u}\right)\Big|_{t=0} = \rho_\infty\left(1 - e^{\frac{x - x_0}{u}}\right). \tag{36}$$

На рис. 3 пунктиром показана кривая *1* ($t_1 = 0$). Кривые *2 – 5* соответствуют различным моментам времени: $t_2 = L/5u$; $t_3 = 2L/5u$; $t_4 = L/u$; $t_5 = 6L/5u$. Фронт распределения $\rho_0(x)$ перемещается вправо со скоростью u. В каждой плоскости $x = \text{const}$ плотность возрастает со временем, стремясь при $t \to \infty$ к ρ_∞. Подстановка (35) во вторую формулу (27) с последующим устремлением $t \to \infty$ приводит к стационарному распределению (32), в котором вместо ρ_0 будет фигурировать ρ_∞ (плотность на «бесконечности»).

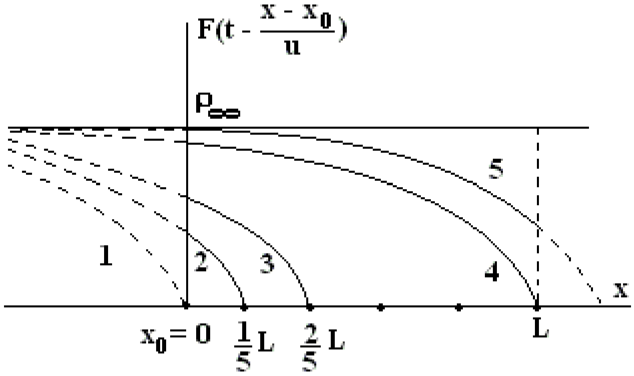

Рис. 3

Эволюция заряда в плоскости $x = L$ может быть прослежена из второй формулы (27), положив $x = L$:

$$\rho(L,t)=\frac{\rho_\infty e^{-\frac{L-x_0}{\tau u}}\left[1-e^{-\gamma\left(t-\frac{L-x_0}{\tau u}\right)}\right]}{1+\beta\left(1-e^{-\frac{L-u}{\tau u}}\right)\left[1-e^{-\gamma\left(t-\frac{L-x_0}{\tau u}\right)}\right]}. \tag{37}$$

При $t \to \infty$, как отмечалось, получаем стационарное значение плотности (на коллекторе), совпадающее со значением, полученным при $x = L$, из формулы (32).

Наконец заметим, что для определенности везде подразумеваются положительные величины $\rho > 0$, $E > 0$, что типично для ЭГД–насосов.

в) Релаксация зарядов в момент отключения поля. Пусть стационарное распределение зарядов описывается формулой (32), и в начальный момент времени $t = t_0$ поле отключено. Требуется установить закономерности рассасывания зарядов (поля).

В данном случае следует принять

$$\rho(x,t)\big|_{t=0} = f(x)=\frac{\rho_0 e^{-\frac{x}{u\tau}}}{1+\rho_0\beta\left(1-e^{-\frac{x}{u\tau}}\right)},\ x\in(0;L), \tag{38}$$

где для простоты положено $x_0 = 0$. При этом $F(t)$ в начальной плоскости получается из верхней формулы (27), положив $f(0) = \rho_0$:

$$\rho(x,t)\big|_{x=0} = F(t)=\frac{\rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{1+\rho_0\beta\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)},\ t\in(0;\infty). \tag{39}$$

Эта формула дает почти экспоненциальный закон релаксации заряда в начальной плоскости. Из (38) и (39) находим

$$f(x-ut)=\frac{\rho_0 e^{-\frac{x-ut}{u\tau}}}{1+\rho_0\beta\left(1-e^{-\frac{x-ut}{u\tau}}\right)},\ ut<x<L,$$

$$F\left(t-\frac{x}{u}\right)=\frac{\rho_0 e^{-\left(t-\frac{x}{u}\right)/\tau}}{1+\rho_0\beta\left(1-e^{-\left(t-\frac{x}{u}\right)/\tau}\right)},\ 0<x<ut.$$

Поставив эти формулы в (27), получим

$$\rho = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{1+\beta\rho_0\left(1-e^{-t/\tau}\right)}, & 0 < x < ut, \\ \dfrac{\rho_0 e^{-\frac{x}{\tau u}}}{1+\beta\rho_0\left(1-e^{-\frac{x}{\tau u}}\right)}, & ut < x < L. \end{cases}$$

Это распределение имеет вид рис. 4, то есть в области I заряд почти экспоненциально падает, оставаясь однородным, а в области II он не меняется, лишь сама область сужается. При этом граница перемещается вправо со скоростью *u*.

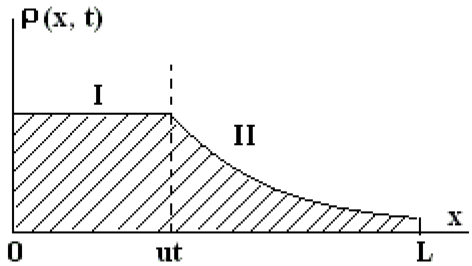

Рис. 4

Таким образом, решена задача о релаксации объемных зарядов в одномерном ЭГД–потоке. На трех примерах показано, что процесс релаксации идет независимо в двух смежных областях, граница между которыми перемещается приблизительно с постоянной скоростью потока. Вследствие этого одна зона увеличивается за счет уменьшения другой. Длительность переходного процесса равна времени перемещения релаксационного фронта вдоль всего канала, через который течет жидкость.

Полученные результаты смогут быть применены при расчетах ЭГД–преобразователей энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рубашов И.Б., Бертников Ю.С.* Электрогазодинамика. М., 1971.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М., 1964.
3. *Губкин А.Н.* Физика диэлектриков. Т. 1. М., 1971.
4. *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и газодинамических полей. М., 1979.
5. *Цырлин Л.Э.* О нестационарных токах в телах с малой собственной проводимостью // Вопросы математической физики. Л., 1976.
6. *Матвеев Н.М.* Дифференциальные уравнения. Минск, 1968.

Поступила 15.01.04

Summary

The process of space charge relaxation in steady flow of dielectric liquid taking into account the following electric currents intrinsic conductivity, space charges, convection, and displacement is investigated. It is shown that the area of relaxation is subdivided into two adjacent regions, in which the relaxation processes take place independently, a boundary between these regions moves along the flow with velocity of space charge carriers. Duration of relaxation processes is defined by the time of displacement of the boundary along the whole channel.