

Критерий неустойчивости заряженной капли в электростатическом подвесе

А. И. Григорьев, С. О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 15000, Россия, e-mail: grig@uniyar.ac.ru

Аналитическим путем выводится критерий реализации неустойчивости заряженной капли, неподвижной в суперпозиции гравитационного и однородного электростатического полей. Найдено аналитическое выражение для связи критического значения параметра Рэля и соответствующего заряду критического значения параметра Тейлора. Обнаружено, что использование подвеса для проверки критерия Рэля принципиально не может дать точной величины критерия.

Ключевые слова: сфероидальная капля, заряд, электростатическое поле, подвес, критерий неустойчивости.

УДК 532.59:534.1

ВВЕДЕНИЕ

Поскольку с заряженной каплей приходится встречаться в технике, технологии, академическом знании и точном приборостроении, вывод критических условий реализации её неустойчивости во внешнем электростатическом поле представляется актуальным. Но если для уединённой сферической капли критерий её неустойчивости относительно легко и строго теоретически выводится, то уже для незаряженной капли в однородном электростатическом поле, в котором её форма близка к вытянутому по полю сфероиду, приходится сталкиваться с трудностями теоретического анализа. Эти трудности обусловлены тем, что распределение заряда и электростатического давления по поверхности сфероидальной капли неоднородно. Выводу аналитического критерия неустойчивости заряженной капли в электростатическом поле и посвящена эта работа.

1. ЗАРЯЖЕННАЯ СФЕРИЧЕСКАЯ КАПЛЯ

Ещё в позапрошлом веке Рэлей теоретически вывел критерий электростатической неустойчивости сильно заряженной сферической капли [1]. Это изложение было столь компактным, а значение столь велико, что спустя восемьдесят лет его расчёты были восстановлены более подробно [2]. Критерий Рэля имеет вид

$$W^2 \equiv \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3} \geq 1,$$

где W – безразмерный параметр, характеризующий устойчивость капли по отношению к собственному заряду; Q и R – заряд и радиус капли соответственно; σ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, образующей каплю.

Этот критерий неоднократно проверялся [3–9] и всегда подтверждался с точностью до процентов. Физические закономерности реализации неустойчивости Рэля детально разобраны в относительно недавних публикациях [10, 11].

Переходя к поверхностной плотности заряда, для её критической величины получим

$$\kappa \geq \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{R}}.$$

В безразмерных переменных, где за основные единицы взяты $R = \rho = \sigma = 1$, а ρ – плотность жидкости (см. далее), этот критерий переписывается в виде

$$\kappa \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Потребовав, чтобы отношение электростатического давления в капле к капиллярному было не менее единицы, получим

$$\begin{aligned} \frac{Q^2}{(R^2)^2} \cdot \frac{R}{8\pi} \cdot \frac{R}{2\sigma} &\geq 1 \Rightarrow \frac{Q^2}{16\pi R^3} \cdot \frac{1}{\sigma} \geq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{(4\pi)^2 \kappa^2}{16\pi} \cdot \frac{R}{\sigma} &\geq 1 \Rightarrow \pi \kappa^2 \cdot \frac{R}{\sigma} \geq 1 \Rightarrow \frac{\kappa^2 R}{\sigma} \geq \frac{1}{\pi} \\ \kappa &\geq \sqrt{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{R}}. \end{aligned}$$

Имеем такое же значение, как и в предыдущем расчете.

2. НЕЗАРЯЖЕННАЯ КАПЛЯ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Проблема выяснения физических закономерностей реализации неустойчивости незаряженной капли в однородном электростатическом по-

ле, по первоначальным впечатлениям мало отличающаяся от проблемы неустойчивости сильно заряженной капли, в реальности оказалась весьма сложной. Она рассматривалась многими исследователями как экспериментально, так и теоретически [12–22]. Но дело осложнилось тем, что капля в однородном электростатическом поле принимает равновесную форму, близкую к вытянутому по полю сфероиду [15, 16, 23–25]. Во всяком случае, в линейном приближении по квадрату эксцентриситета капля имеет такую форму [14–18, 25]. Отличия от сфероидальности проявляются лишь в более высоких порядках малости. Капиллярные осцилляции сфероидальной капли и поле скоростей в ней рассчитывались в [26–28].

Распределение индуцированного заряда по поверхности сфероидальной капли является неоднородным. Поэтому теоретическое определение критических условий реализации неустойчивости становится весьма сложным. Остаются две возможности анализа: численный расчёт и эксперимент. И в том и другом случае критерии неустойчивости получаются в виде нестрогого неравенства некоторого безразмерного комплекса подобия (составленного из соображений размерности) какому-либо числу с несколькими десятичными знаками после запятой, разному в различных экспериментах или расчетах, при наличии существенной погрешности измерений или расчётов соответственно.

При неоднородном распределении заряда можно говорить только о локальном значении плотности поверхностного заряда в малой окрестности вершин сфероида, где реализуется неустойчивость. Говоря о средней по площади сфероида поверхностной плотности заряда, можно а priori предположить, что она получится меньше, чем в известных ситуациях с однородным распределением заряда. Точнее, при усреднении по всей поверхности сфероида она должна равняться нулю, потому что знак заряда на различных половинках сфероида различен, а сами заряды равны по величине. Можно, конечно, усреднить по разноимённо заряженным половинкам поверхности сфероида по отдельности, но это будет излишне.

Экспериментально установлено [15], что критерий электростатической неустойчивости сферической капли радиуса R , помещённой в однородное электростатическое поле напряжённостью E_0 , имеет вид

$$\Lambda^2 \equiv \frac{E_0^2 R}{\sigma} \geq 2,59. \quad (1)$$

Численным расчётом это значение в пределах погрешности подтверждено. Вернее, в численном расчёте Тейлор [15] получил значение

$\Lambda^2 = 2,62$, что практически совпадает в пределах погрешности с (1).

Приравнявая единице отношение электростатического и капиллярного давлений на вершинах вытянутой сфероидальной капли, найдём критерий реализации неустойчивости капли в электростатическом поле. Учитываем, что капиллярное давление на вершинах сфероида определяется выражением $2\sigma/R_{kr}$, где $R_{kr} \equiv (b^2/a)$ – радиус кривизны [29] (стр. 319), a и b – большая и меньшая полуоси сфероида: $a = R(1 - e^2)^{-1/3}$, $b = R(1 - e^2)^{1/6}$. В итоге получаем

$$P_\sigma \equiv \frac{2\sigma}{R_{kr}} \equiv \frac{2\sigma}{R}(1 - e^2)^{-2/3}. \quad (2)$$

Чтобы найти электростатическое давление на вершинах сфероида в однородном электростатическом поле, учтём, что распределение плотности индуцированного заряда на поверхности трёхосного эллипсоида определяется выражением [30, стр. 45]:

$$\begin{aligned} \kappa_e &= \frac{E_0}{4\pi} \cdot \frac{e^3}{(1 - e^2)(\text{Arth } e - e)} \cdot \frac{2ab^2 x|_{\xi=0}}{2a^2 \sqrt{\zeta\eta}} \equiv \\ &\equiv \frac{E_0}{4\pi} \cdot \frac{e^3}{(1 - e^2)(\text{Arth } e - e)} \cdot \frac{b^2 x|_{\xi=0}}{a \sqrt{\zeta\eta}}. \end{aligned}$$

Выражение для произведения эллипсоидальных координат записывается в виде [30, стр. 41]:

$$\sqrt{\zeta\eta} = abc \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)}.$$

На вершине сфероида $y \equiv 0$, $z \equiv 0$ и, следовательно,

$$\sqrt{\zeta\eta} = abc \frac{x}{a^2} \Big|_{\xi=0} \equiv \frac{bc}{a} x \Big|_{\xi=0}.$$

При $b = c$ получим

$$\begin{aligned} \kappa_e &= \pm \frac{E_0}{4\pi} \cdot \frac{e^3}{(1 - e^2)(\text{Arth } e - e)} \cdot \frac{b^2 a}{ab^2} \equiv \\ &\equiv \pm \frac{E_0}{4\pi} \cdot \frac{e^3}{(1 - e^2)(\text{Arth } e - e)}, \end{aligned} \quad (3)$$

как и должно быть, ибо комбинация $\frac{b^2 x|_{\xi=0}}{a \sqrt{\zeta\eta}}$

определяет единичный нормальный вектор к поверхности эллипсоида, в нашем случае – в его вершине, где он коллинеарен оси ОХ.

Учитывая (3) и принимая во внимание, что напряженность поля у заряженной поверхности связана с поверхностной плотностью заряда κ на нем соотношением $E \equiv 4\pi\kappa$, электростатическое давление индуцированного заряда P_E на вершинах сфероида запишем по известной формуле в виде

$$P_E = \frac{E^2}{8\pi} = \frac{16\pi^2 \kappa_e^2}{8\pi} \equiv 2\pi \kappa_e^2. \quad (4)$$

Находя отношение электростатического давления (4) к капиллярному (2) и приравнявая это отношение единице, получим

$$\begin{aligned} \frac{2\pi \kappa_e^2 R_{kr}}{2\sigma} = 1 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{E_0^2 R}{\sigma} \left[\frac{1}{16\pi} \cdot \frac{e^6}{(1-e^2)^{4/3} (\text{Arth } e - e)^2} \right] &\geq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{E_0^2 R}{\sigma} &\geq \left[\frac{16\pi (1-e^2)^{4/3} (\text{Arth } e - e)^2}{e^6} \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая, что критерий электростатической неустойчивости сферической капли радиуса R , помещённой в однородное электростатическое поле напряжённостью E_0 , определяется выражением (1), обозначим безразмерную комбинацию $\sqrt{E_0^2 R / \sigma}$ той же буквой Λ , что и (1), и перепишем (5) в виде

$$\Lambda^2 \geq \left[\frac{16\pi (1-e^2)^{4/3} (\text{Arth } e - e)^2}{e^6} \right].$$

Эксцентриситет сфероида связан с величиной безразмерного параметра Λ соотношением [15]:

$$e = \sqrt{9E_0^2 R / 16\pi\sigma}.$$

Во введенных безразмерных переменных

$$e = 3\Lambda / 4\sqrt{\pi}.$$

Учитывая это обстоятельство, соотношение (5) перепишем в виде

$$\Lambda^2 \geq \left[\frac{16\pi (1 - \frac{9\Lambda^2}{16\pi})^{4/3} (\text{Arth } \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\Lambda - \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\Lambda)^2}{\left(\frac{9\Lambda^2}{16\pi}\right)^3} \right]. \quad (6)$$

Получается трансцендентное уравнение относительно безразмерного параметра Λ .

Введем формальное обозначение:

$$f \equiv \Lambda^2 = \left(\frac{16\pi}{9\Lambda^2} \right)^3 \left(16\pi (1 - \frac{9\Lambda^2}{16\pi})^{4/3} (\text{Arth } \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\Lambda - \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\Lambda)^2 \right).$$

На рис. 1 кривой 1 нанесем зависимость от параметра Λ^2 функции

$$f = \left(\frac{16\pi}{9\Lambda^2} \right)^3 \left(16\pi (1 - \frac{9\Lambda^2}{16\pi})^{4/3} (\text{Arth } \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\Lambda - \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\Lambda)^2 \right),$$

а прямой 2

$$f = \Lambda^2.$$

Точка пересечения на рис. 1 зависимостей 1 и 2 и даст графическое решение (6).

Из рис. 1а получим критическое для реализации электростатической неустойчивости сферической капли в однородном электростатическом поле значение параметра Λ . Как видно из рис. 1а, критическое значение параметра Λ^2 равно ≈ 4 . Это слишком большое значение. Из эксперимента известно, что критическое значение $\Lambda^2 \approx 2,59$ [15]. Чтобы получить такое значение параметра Λ^2 , следует отношение давлений приравнять не единице, а 11/21. В этом случае уравнение (6) примет вид

$$\Lambda^2 \geq \frac{11}{21} \left[\frac{16\pi (1 - \frac{9\Lambda^2}{16\pi})^{4/3} (\text{Arth } \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\Lambda - \frac{3}{4\sqrt{\pi}}\Lambda)^2}{\left(\frac{9\Lambda^2}{16\pi}\right)^3} \right], \quad (7)$$

а критическое значение параметра Λ^2 определится из графического решения (7) аналогично предыдущему случаю, что проиллюстрировано рис. 1б. Оно полностью совпадает с (1), но в отличие от (1) выведено теоретически.

В последние годы задача расчёта формы незаряженной капли и проблема устойчивости n -й моды её осцилляций в однородном и неоднородных электростатических полях неоднократно решались теоретически [31–35]. В частности, было показано, что с бесконечным ростом номера моды критерий устойчивости Λ стремится к конечному значению [32–35], а не к бесконечности, как в случае заряженной капли [1–2].

3. ЗАРЯЖЕННАЯ КАПЛЯ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В случае заряженной капли задача не становится легче: равновесная форма такой капли в общем случае становится грушевидной, но в линейном по квадрату эксцентриситета приближении её можно считать сфероидальной [36]. Тем не менее, расчёт электростатического давления становится более громоздким, оно начинает зависеть и от величины напряжённости внешнего поля, и от величины собственного заряда. Эта проблема, так же как и в предыдущем случае незаряженной капли в электростатическом поле, рассматривалась многими исследователями как теоретически, так и экспериментально в однородных и неоднородных электростатических полях [36–45]. Основной результат – это критическое соотношение между параметрами W и Λ , полученное теоретически в сфероидальном при-

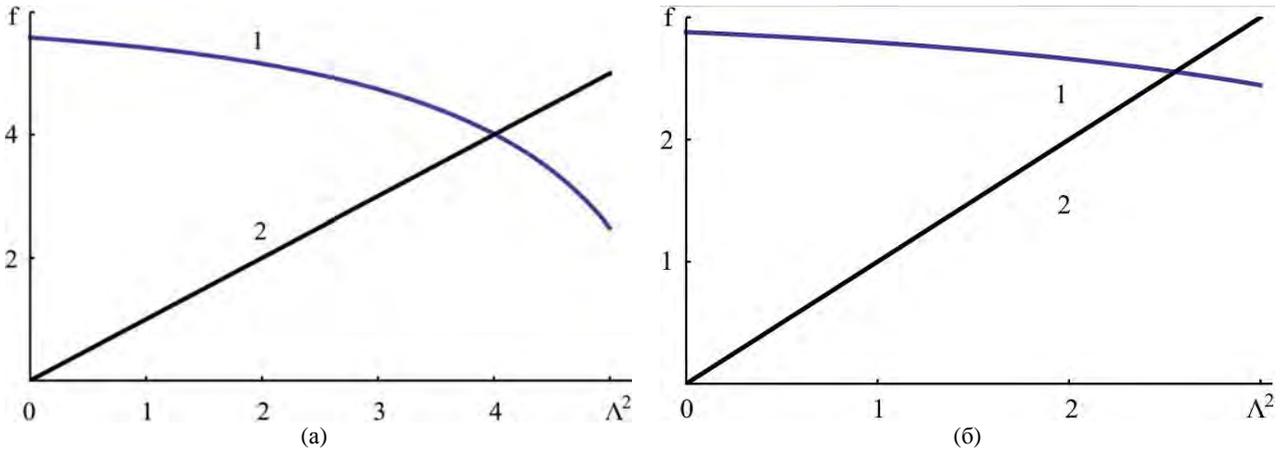


Рис. 1. Графическое решение: (а) – уравнения (6); (б) – уравнения (7).

лижении путем помодового анализа [36] для однородного электростатического поля, имеющее вид

$$(1 + 2,07 \cdot e^2)W^2 + \frac{0,29}{\pi}(1 + 6,6 \cdot e^2)\Lambda^2 + \frac{3W\Lambda}{4\sqrt{\pi}}(1 + 0,476 \cdot e^2) \geq 1, \quad (8)$$

где квадрат эксцентриситета сфероида e^2 определяется выражением [36]:

$$e^2 = \frac{9\Lambda^2}{16\pi(1 - W^2)}.$$

В соотношении (8) интересно то, что его экспериментальная проверка возможна для двух крайних положений: сильно заряженной капли в отсутствие поля и незаряженной капли в однородном электростатическом поле. Для промежуточных значений, конечно, тоже можно предпринять экспериментальную проверку, но никто такой задачи перед собой не ставил. Выражение (8) было получено для ситуации $W^2 \ll 1$, и привязка к состоянию $W^2 \approx 1$ производилась искусственно. В этой связи соотношение (8) справедливо условно.

Всё нижеследующее рассмотрение проведём в системе отсчёта, связанной с центром масс капли. Следует отметить, что центр масс заряженной капли в однородном электростатическом поле будет равноускоренно двигаться по полю (считаем для определённости, что заряд капли положителен), и для рассмотрения проблемы в выбранной неинерциальной системе координат следует ввести силу инерции. Но проще подвесить заряженную каплю в суперпозиции коллинеарных, но противоположно направленных гравитационного и электростатического полей и потребовать, чтобы её центр масс был неподвижен. Это требование связывает ускорение поля сил тяжести \vec{g} с ускорением движения центра масс капли соотношением

$$\vec{g} = -\frac{3Q\vec{E}_0}{4\pi R^3\rho}. \quad (9)$$

В связи с вышесказанным давление сил тяжести P_g , вытекающее из принятого условия

несжимаемости её жидкости (и общего выражения для давления, появляющегося при интегрировании уравнения Навье-Стокса), в верхней точке, на половине капли, имеющей знак, одноимённый с собственным зарядом капли, примет вид

$$P_g = -\rho g a \equiv -\rho g \frac{R}{(1 - e^2)^{1/3}},$$

где a – большая полуось сфероида.

Выпишем теперь выражение для поверхностной плотности заряда на вершинах заряженного трёхосного сфероида [30, стр. 41], имея в виду определение электростатического давления собственного заряда капли:

$$\kappa_q = \frac{Q}{4\pi b^2} \equiv \frac{Q}{4\pi R^2(1 - e^2)^{1/3}}.$$

Суммируя это выражение с поверхностной плотностью κ_e индуцированного в электростатическом поле заряда на вершине сфероида (3), получим полную плотность заряда на вершинах заряженного сфероида во внешнем электростатическом поле:

$$\kappa = \frac{Q}{4\pi R^2(1 - e^2)^{1/3}} \pm \frac{E_0}{4\pi} \cdot \frac{e^3}{(1 - e^2)(\text{Arth } e - e)}.$$

Знак плюс соответствует ситуации, когда знак собственного заряда совпадает с индуцированным зарядом, а знак минус – когда не совпадает. Поскольку нас интересуют критические условия реализации неустойчивости, не будем рассматривать ситуацию с разноимёнными зарядами: ясно, что неустойчивость реализуется на том конце сфероида, где знаки зарядов одинаковы. Найдём электростатическое давление на конце сфероида, где заряды складываются. Получим

$$P_e = 2\pi \left[\frac{Q}{4\pi R^2(1 - e^2)^{1/3}} + \frac{E_0}{4\pi} \cdot \frac{e^3}{(1 - e^2)(\text{Arth } e - e)} \right]^2.$$

Найдём теперь отношение суммы этого давления и гравитационного (заменяя ускорение поля сил тяжести из условия неподвижности капли (9)) к капиллярному давлению на вершине сфероида, определяющемуся (2), и приравняем единице:

$$\frac{2\pi \left[\frac{Q}{4\pi R^2(1-e^2)^{1/3}} + \frac{E_0}{4\pi} \cdot \frac{e^3}{(1-e^2)(\text{Arth } e - e)} \right]^2 - \rho \frac{3QE_0}{4\pi R^3 \rho} \cdot \frac{R}{(1-e^2)^{1/3}}}{\frac{2\sigma}{R}(1-e^2)^{-2/3}} = 1. \quad (10)$$

В терминах безразмерных параметров W и Λ , выделяя в (10) безразмерные параметры W и Λ и приравнивая вес капли силе, действующей со стороны поля на заряд (чтобы обеспечить неподвижность центра масс), получим $g = 3\sigma W \Lambda / \sqrt{\pi} \rho R^2$, перепишем (10) в виде

$$W^2 + \frac{\Lambda W}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^3}{(1-e^2)^{2/3}(\text{Arth } e - e)} - 3(1-e^2)^{1/3} \right] + \frac{\Lambda^2}{16\pi} \left(\frac{e^6}{(1-e^2)^{4/3}(\text{Arth } e - e)^2} \right) \geq 1, \quad (11)$$

где эксцентриситет заряженной сфероидальной (согласно принятому в данной работе, см. [36]) капли в электростатическом поле определяется выражением

$$e = \frac{3\Lambda}{4\sqrt{\pi(1-W^2)}}.$$

Чтобы согласовать (11) с экспериментальными данными для незаряженной капли в однородном электростатическом поле, добавим в последнее слагаемое (11) множитель $11/21$, то есть перепишем это выражение в виде

$$W^2 + \frac{\Lambda W}{2\sqrt{\pi}} \left[\frac{e^3}{(1-e^2)^{2/3}(\text{Arth } e - e)} - 3(1-e^2)^{1/3} \right] + \frac{11 \cdot \Lambda^2}{21 \cdot 16\pi} \left(\frac{e^6}{(1-e^2)^{4/3}(\text{Arth } e - e)^2} \right) \geq 1. \quad (12)$$

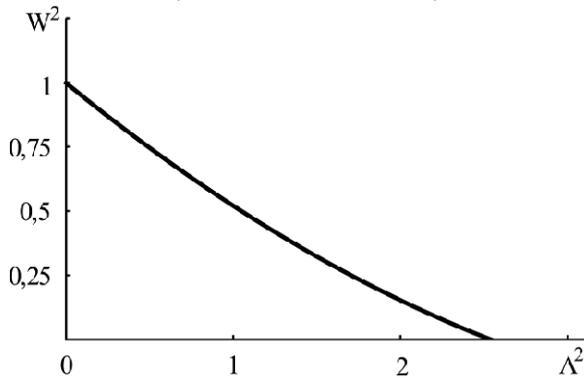


Рис. 2. Взаимозависимость между зарядовым и полевым безразмерными параметрами, иллюстрирующая соотношение (12).

На рис. 2 приведена критическая зависимость между параметрами W^2 и Λ^2 , построенная по выражению (12). Она согласуется с найденной в [36] зависимостью (8) и совпадает с ней в крайних точках. В промежуточных состояниях эта зависимость отличается от (8) не более чем на двадцать процентов. Это представляется прием-

лемым результатом. С учетом приближенности проведенного расчёта, который основывался на качественных соображениях. Достоинством проведенного расчёта является то, что критическая зависимость (12) получена в аналитическом виде с использованием лишь одного подгоночного параметра: $11/21$.

Следует отметить, что зависимость (12) (см. также рис. 2) означает принципиальное ограничение на величину параметра Рэлея, измеряемого с помощью электростатического подвеса (или электродинамического). В самом деле, для того чтобы заряженная капля висела в гравитационном поле, напряженность электростатического поля должна быть отлична от нуля. А это приводит к тому, что заряд на капле должен быть меньше критического по Рэлею так, чтобы выполнялось соотношение (12). Кроме того, из (12) следует, что в возможных экспериментах по уточнению критерия Рэлея разумно уменьшать экспериментальную погрешность измерений лишь до определенной величины, которая задается ошибкой, связанной с использованием подвеса (разностью между теоретически предсказанным значением критерия Рэлея и измеряемой его величиной).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из качественных соображений выведены аналитические выражения критерия неустойчивости для незаряженной и заряженной каплей в однородном электростатическом поле, когда равновесная форма капли в линейном приближении по квадрату эксцентриситета сфероидальная, а распределение плотности поверхностного заряда (как собственного, так и поляризованного) неоднородно.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rayleigh (Strutt J.W.). On the Equilibrium of Liquid Conducting Masses Charged with Electricity. *Phil Mag.* 1882, **14**, 184–186.
2. Hendrics C.D., Schneider J.M. Stability of Conducting Droplet under the Influence of Surface Tension and Electrostatic Forces. *J Amer Phys.* 1963, **1**(6), 450–453.
3. Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B. Behavior of Evaporating Electrically Charged Droplets. *J Coll Sci.* 1964, **19**, 136–143.

4. Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U. Stable, Unstable and Metastable Charged Droplets. *J Atmosph Sci.* 1970, **27**(11), 1173–1181.
5. Schweizer J.D., Hanson D.N. Stability Limit of Charged Drops. *J Coll Int Sci.* 1971, **35**(3), 417–423.
6. Roulleau M., Desbois M. Study of Evaporation and Instability of Charged Water Droplets. *J Atmosph Sci.* 1972, **29**(4), 565–569.
7. Duft D., Lebbeus H., Huber B.A. Shape Oscillations and Stability of Charged Microdroplets. *Phys Rev Lett.* 2002, **89**(8), 1–4.
8. Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al. Rayleigh Jets from Levitated Microdroplets. *Nature.* 2003, **421**(6919), 128.
9. Grimm R.L., Beauchamp J.L. Dynamics of Field-induced Droplet Ionization: Time-Resolved Studies of Distortion, Jetting, and Progeny Formation from Charged and Neutral Methanol Droplet Exposed to Strong Electric Fields. *J Phys Chem. B.* 2005, **109**, 8244–8250.
10. Григорьев А.И. О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли. *ЖТФ.* 1986, **56**(7), 1272–1278.
11. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Корниенко Д.О. О некоторых закономерностях реализации сферидальной осцилляции и электростатической неустойчивости заряженной капли. *ЖТФ.* 2010, **80**(11), 11–20.
12. Macky W.A. Some Investigations on the Deformation and Breaking of Water Drops in Strong Electric Fields. *Proc Roy Soc London.* 1931, **133**(A822), 565–587.
13. O'Konski C.T., Harris F.E. Electric Free Energy and the Deformation of Droplets in Electrically Conducting System Field. *J Phys Chem.* 1957, **61**, 1172–1174.
14. Garton C.G., Krasucki Z. Bubbles in Insulating Liquids: Stability in an Electric Field. *Trans Faraday Soc.* 1964, **60**, 211–226.
15. Taylor G.I. Disintegration of Water Drops in an Electric Field. *Proc Roy Soc London.* 1964, **A280**, 383–397.
16. Matthews J.B. Mass Loss and Distortion of Freely Water Drop in an Electric Field. *J Geophys Res.* 1967, **72**, 3007–3013.
17. Ausman E.L., Brook M. Distortion and Disintegration of Water Drops in Strong Electric Fields. *J Geophys Res.* 1967, **72**(24), 6131–6141.
18. Cheng K.J., Chaddock J.B. Deformation and Stability of Drops and Bubbles in an Electric Field. *Phys Lett A.* 1984, **106**(1–2), 51–54.
19. Григорьев А.И., Синкевич О.А. К механизму развития неустойчивости капли жидкости в электростатическом поле. *Изв. АН СССР. МЖГ.* 1985, (6), 10–15.
20. Incullet I.I. Breakup of Large Water Droplets by Electric Fields. *IEEE Transactions on Industry Applications.* 1989, **25**(5), 945–948.
21. Incullet I.I., Floryan J.M., Haywood R.J. Dynamics of Water Droplets Breakup in Electric Fields. *IEEE Transactions on Industry Applications.* 1992, **28**(5), 1203–1209.
22. Бейтуганов М.Н. Об обуславливаемых сильными электрическими полями физических явлениях в облаках. *Метеорология и гидрология.* 1989, (9), 42–49.
23. Zeleny J. The Electrical Discharge from Liquid Points, and Hydrostatic Method the Electric Intensity at their Surface. *Phys Rev.* 1914, **3**(2), 69–91.
24. Nolan J.J. The Breaking of Water-Drops by Electric Fields. *Proc. Irish. Akad.* 1926, **A37**, 28–39.
25. O' Konski C.J., Thacher H.C. The Distortion of Aerosol Droplets by an Electric Field. *J Phys Chem.* 1953, **57**, 955–958.
26. Cheng K.J. Capillary Oscillations of Drop in an Electric Field. *Phys. Lett.* 1985, **112A**(8), 392–396.
27. Григорьев А.И., Паранин А.Р., Ширяева С.О. О структуре поля скоростей под сферидальной свободной поверхностью осциллирующей капли вязкой жидкости в электростатическом поле. *ЖТФ.* 2011, **81**(9), 30–371.
28. Григорьев А.И., Паранин А.Р., Ширяева С.О. Модификация теории пограничного слоя для расчета осцилляций вязкой капли в однородном электростатическом поле. *ЖТФ.* 2012, **82**(3), 55–66.
29. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов.* М.: Наука, 1980. 976 с.
30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред.* М.: Наука, 1982. 620 с.
31. Ширяева С.О., Волкова М.В., Григорьев А.И. Нелинейные осцилляции незаряженной электропроводной капли в однородном внешнем электростатическом поле. *ЖТФ.* 2005, **75**(3), 36–42.
32. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. Неустойчивость сферической капли в неоднородном электрическом поле. *ЖТФ.* 2013, **83**(5), 50–60.
33. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. О равновесных формах проводящей капли в однородном и неоднородных электростатических полях. *ЖТФ.* 2013, **83**(11), 44–51.
34. Григорьев А.И., Ширяев А.А., Ширяева С.О. О некоторых физических закономерностях реализации неустойчивости капли в однородном электростатическом поле. *Изв. РАН. МЖГ.* 2013, (5), 127–140.
35. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А. Неустойчивость сферической капли в поле электрического диполя. *ЖТФ.* 2014, **84**(2), 8–16.
36. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. Равновесная форма заряженной капли в электрическом и гравитационном полях. *ЖТФ.* 1989, **59**(6), 27–34.
37. Latham J., Myers V. Loss of Charge and Mass from Raindrops Falling in Intense Electric Fields. *J Geophys Res.* 1970, **75**(3), 701–705.

38. Dawson G.A. The Rayleigh Instability of Water Drops in the Presence of External Electric Fields. *J Geophys Res.* 1970, **75**(3), 515–520.
39. Brazier-Smith P.R. The Stability of Charged Drops in Uniform Electric Fields. *J Roy Met Soc.* 1972, **98**, 434–441.
40. Zrnic D.S., Doviak R.J., Mahapatra P.R. The Effect of Charge and Electric Field on the Shape of Raindrops. *Radio Sci.* 1984, **19**(1), 75–80.
41. Abbas M.A., Latham J. The Disintegration and Electrification of Charged Water Drops Falling in an Electric Field. *Quart J R Met Soc.* 1969, **95**, 63–76.
42. Kim O.V., Dunn P.F. Control Production by in-flight Electro spraying. *Langmuir.* 2010, **26**, 15807–15813.
43. Ширяева С.О. Нелинейные осцилляции заряженной капли, подвешенной в электростатическом и гравитационном полях. *Изв. РАН. МЖГ.* 2006, (2), 17–30.
44. Ширяева С.О. Нелинейный анализ равновесной формы заряженной электропроводной капли в электростатическом подвесе. *ЖТФ.* 2006, **76**(10), 32–40.
45. Ширяева С.О. Аналитический нелинейный расчет равновесной формы заряженной капли, равноускоренно движущейся в электростатическом поле. *ЖТФ.* 2006, **76**(11), 36–42.

Поступила 02.04.14

После доработки 05.05.14

Summary

The criterion of realization of instability of a charged drop, motionless in the superposition of gravitational and uniform electrostatic fields is derived in the analytical way. An analytical expression is found for the connection of the critical values of the Rayleigh parameter and the Taylor parameter, corresponding to the charge. It is revealed that the suspension when used to check the Rayleigh criterion cannot, in essence, give the exact size of the criterion.

Keywords: spheroidal drop, charge, electrostatic field, electrostatic suspension, criterion of instability.