Определение характеристик канала разряда и окружающей его жидкости по заданному радиусу канала

Г. А. Барбашова

Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины,
пр. Октябрьский, 43-А, г. Николаев, 54018, Украина, e-mail: dpte@iipt.com.ua

По представленной в литературе математической модели решена обратная гидродинамическая задача восстановления кинематических и термодинамических характеристик канала разряда по экспериментальной зависимости радиуса канала разряда от времени. Определены также аналогичные характеристики окружающей канал жидкости.

Ключевые слова: математическая модель, обратная гидродинамическая задача, кинематические и термодинамические характеристики.

УДК 532:537.528

ВВЕДЕНИЕ

В ИИПТ НАН Украины разработан следующий подход к решению задачи проектирования технологических процессов, использующих электрический разряд в жидкости (чаще всего в воде), а именно путём решения цепочки обратных задач восстанавливаются электрические характеристики источника энергии по заданной нагрузке на обрабатываемый объект [1]. Работа делится на три этапа. На первом решается обратная гидродинамическая задача восстановления характеристик образующейся при электрическом разряде заполненной плотной низкотемпературной плазмой полости – канала разряда (в частности, радиуса $a(t)$, скорости расширения $\dot{a}(t)$ и давления $P_a(t)$) по зависимости давления от времени, заданной в точке пространства, заполненного водой. На втором – обратная электродинамическая задача: по значениям $a(t)$, $\dot{a}(t)$ и $P_a(t)$ вычисляются сопротивление канала, электропроводимость плазмы, ток в канале разряда, напряжение на канале. На третьем – определяются входные параметры высоковольтной электроразрядной системы, обеспечивающие заданное давление на объект обработки.

В ряде разрядно-импульсных технологий основной силовой нагрузкой на объект обработки является давление вещества в канале разряда (при этом разряд производится прямо на изделие), а давление жидкости можно не учитывать [2, 3]. В этом случае в качестве исходных данных при решении обратной гидродинамической задачи – задачи восстановления кинематических и термодинамических характеристик канала разряда – используется давление в канале. При проектировании технологий, в которых на объект действует только гидродинамическая нагрузка, исходными данными служит давление жидкости на обрабатываемый объект [1]. В [4] показано, что характеристики канала разряда для обоих видов технологий могут быть определены также по зависимости радиуса канала разряда от времени.

Предложенная математическая модель [4] позволяет также определить кинематические и термодинамические характеристики окружающей канал жидкости.

Цель настоящей работы – найти указанные характеристики канала разряда и жидкости по экспериментально полученной зависимости радиуса канала разряда от времени в плоскости его срединного сечения. Решение таких задач актуально при разработке электроразрядных технологий, использующих в качестве основной силовой нагрузки как давление вещества в канале разряда, так и технологий, в которых на обрабатываемый объект действует лишь гидродинамическая нагрузка.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И СПОСОБ ЕЁ РЕШЕНИЯ

Полагаем, что канал разряда в течение всего рассматриваемого времени имеет форму прямого кругового цилиндра с непроницаемой поверхностью. Радиус его равен радиусу канала разряда в плоскости его срединного сечения, который был определён экспериментально, – $a(t)$, а давление $P_a(t)$ однородно во всём объёме цилиндра, в том числе и на его боковой поверхности. Цилиндр окружает неограниченный объём идеальной сжимаемой жидкости (вода). Необходимо определить зависимости от времени скорости расширения цилиндра $\dot{a}(t)$ и давления в нём, а также давление в заданных точках жидкости.

Скорость расширения цилиндрической полости $\dot{a}(t)$ вычисляем путём численного дифференцирования заданной функции. Для этого, поскольку вычисление производной по экспериментальным данным – задача некорректная, используем метод регуляризации Тихонова [5]. В этом случае искомая величина есть решение интегрального уравнения Вольтерра первого рода:

$$Au \equiv \int_0^t u(\tau)\, d\tau = a(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

где t – время; u – искомая функция, $u(t) \equiv \dot{a}(t)$.

Полагаем, что $a(t) \in L_2, u(\tau) \in W_2^1$ (L_2 – пространство функций, интегрируемых с квадратом, W_2^1 – пространство непрерывно дифференцируемых функций). $a(t)$ – приближённая функция:

$$\left\| a(t) - a_T(t) \right\| \le \delta, \tag{2}$$

$a_T(t)$ – точное значение радиуса канала разряда, δ – погрешность измерений.

Для решения уравнения (1) были использованы алгоритм и компьютерная программа, приведенные в монографии [6].

Введём сглаживающий функционал:

$$\Phi_\alpha[u, a] = \int_0^T \left[Au - a(t) \right]^2 dt + \alpha \cdot \Omega[u], \tag{3}$$

где стабилизирующий функционал имеет вид:

$$\Omega[u] = \int_0^T \left[u^2(t) + q \cdot \left[u'(t) \right]^2 \right] dt. \tag{4}$$

Здесь $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, определяемый способом невязки [6], а $q \ge 0$ задаёт порядок регуляризации (нулевой при $q = 0$ и первый при $q > 0$).

Решение задачи сводится к минимизации функционала (3) по u. Раскрытие этого условия с использованием выражения (4) и с учётом того, что (1) – уравнение Вольтерра, приводит к интегродифференциальному уравнению при $q \ne 0$ и уравнению Фредгольма второго рода при $q = 0$:

$$\alpha \cdot \left[u(t) - q \cdot u''(t) \right] + \int_0^T (T - t) \cdot u(\tau)\, d\tau = \int_0^T a(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Интегралы в (5) заменяются суммами по формуле трапеций, производная аппроксимируется конечной разностью. Дискретные значения функции $u(t)$ определяются в те же моменты времени, что и функция $a(t)$. Полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом квадратных корней.

Далее, задавая полученную скорость расширения цилиндра, найдём давление в нём, а также кинематические и термодинамические характеристики окружающей цилиндр жидкости. С этой целью решаем задачу о расширении с заданной скоростью цилиндрической полости в жидкости. Математическая постановка этой задачи записывается следующим образом. В области жидкости, ограниченной расширяющейся с известной скоростью боковой поверхностью прямого кругового цилиндра (внутренняя граница расчётной области) и ударной волной (внешняя граница), необходимо решить систему одномерных нелинейных уравнений газовой динамики [7]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(r \cdot \rho)}{\partial t} + \dfrac{\partial(r \cdot \rho \cdot v)}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{\partial(r \cdot \rho \cdot v)}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[r \cdot (\rho \cdot v^2 + p) \right]}{\partial r} = p, \\ \dfrac{\partial(r \cdot e)}{\partial t} + \dfrac{\partial\left[r \cdot (e + p) \cdot v \right]}{\partial r} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

с двучленным уравнением состояния [7]:

$$\varepsilon = \left[p - c_0^2(\rho - \rho_0) \right] / \left[\rho(\kappa - 1) \right], \tag{7}$$

где r – пространственная цилиндрическая координата; ν – скорость жидкости; p – давление; ρ – плотность жидкости; $e = \rho[\varepsilon + v^2/2]$; ε – удельная внутренняя энергия; ρ_0 – плотность покоящейся жидкости; c_0 – скорость звука в покоящейся жидкости; $\kappa = 7{,}15$.

На внутренней границе расчётной области скорость жидкости равна скорости расширения цилиндра:

$$v = \dot{a}(t). \tag{8}$$

На внешней границе ставятся условия динамической совместности [7]:

$$\begin{aligned} &[\rho] D - [\rho v] = 0; \\ &[\rho v] D - \left[\rho v^2 + p \right] = 0; \\ &\left[\rho\left(\varepsilon + v^2/2 \right) \right] D - \left[\rho v \left(\varepsilon + v^2/2 \right) + p v \right] = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

где D – скорость ударной волны; $[f] = f_1 - f_2$; f_1, f_2 – значения функции слева и справа от ударной волны.

Начальные значения гидродинамических параметров равны своим значениям в невозмущенной среде при нормальных условиях.

Задачи (6)–(9) решаются конечно-разностным методом Годунова [7]. Используется подвижная сетка.

РЕЗУЛЬТАТЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

В ходе эксперимента радиус канала разряда регистрировался в плоскости серединного его сечения. Относительная погрешность измерения $\delta \approx 0{,}1$. На рис. 1 приведена полученная кривая зависимости радиуса канала разряда от времени, а на рис. 2 – результат конечно-разностного дифференцирования этих данных (кривая *1*). Вид кривой свидетельствует о том, что полученная скорость расширения канала разряда не может быть использована для решения задач (6)–(9).

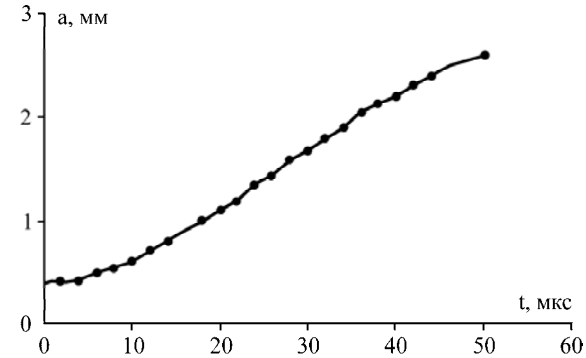

Рис. 1. Радиус канала разряда, полученный экспериментально.

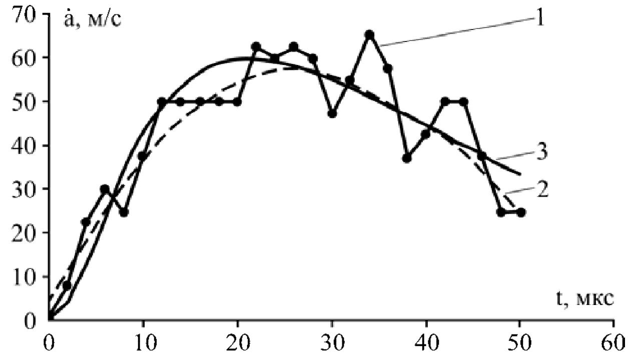

Рис. 2. Скорость расширения цилиндрической полости: 1 – полученная при численном дифференцировании экспериментальных данных; 2 – функция, сглаживающая кривую *1*; 3 – результат решения интегрального уравнения.

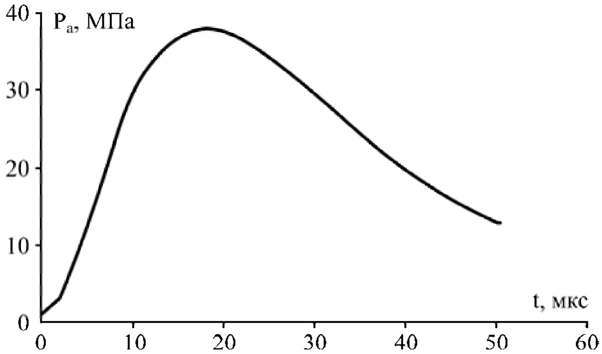

Рис. 3. Давление в цилиндрической полости.

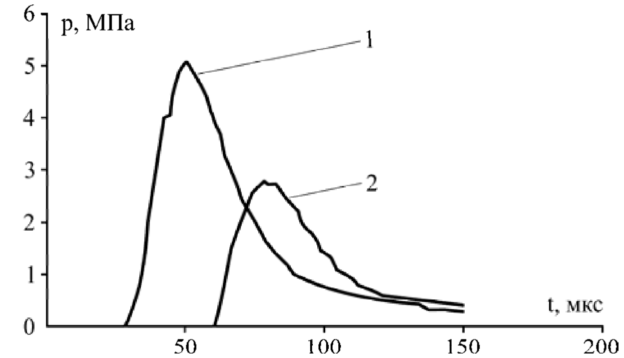

Рис. 4. Давление в жидкости: 1 – на расстоянии r = 4,5 см от оси цилиндра; 2 – на расстоянии r = 9 см от оси цилиндра.

Было предпринято много попыток сглаживания этой кривой (в частности, кривая *2* на рис. 2 получена в результате выборочного симметричного линейного сглаживания по ближайшим соседним точкам методом наименьших квадратов по каждому элементу с адаптивным выбором числа ближайших соседей). Однако результаты решения задач (6)–(9), в частности временные зависимости давления в канале разряда и воде, имели нехарактерные для этих величин значения. Для устранения данного факта использован метод регуляризации Тихонова. Скорость расширения канала разряда, определённая при решении интегрального уравнения (1), изображена кривой *3* на рис. 2. При решении полагали $q = 1$.

Далее решаем задачи (6)–(9). При этом на внутренней границе расчётной области скорость жидкости равна полученной методом регуляризации зависимости *3* на рис. 2. И поскольку расчётный шаг по времени решения задач (6)–(9) не совпадает с шагом задаваемой таблично функции, величину скорости в несовпадающие моменты времени определяем при помощи линейной интерполяции.

Некоторые результаты решения задачи приведены на рис. 3 (зависимость давления от времени в цилиндрической полости) и 4 (давление в жидкости).

По полученным при решении обратной гидродинамической задачи результатам могут быть решены обратные электродинамическая и электротехническая задачи [4]. Таким способом можно приближённо восстановить параметры электрической цепи, при которых был получен радиус канала разряда, приведенный на рис. 1.

ВЫВОДЫ

Разработанный метод позволяет решать задачи восстановления кинематических и термодинамических характеристик канала разряда по экспериментально полученной зависимости его радиуса от времени в плоскости его серединного сечения канала.

Метод позволяет также определить кинематические и термодинамические характеристики окружающей канал жидкости.

По характеризующим канал разряда данным могут быть приближённо восстановлены параметры электрической цепи, при которых был получен задаваемый его радиус.

Автор благодарит к.ф.-м.н. В.Н. Цуркина за предоставленные экспериментальные данные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Barbashova G.A. Restoration of the Characteristics of the Cavity Formed upon Explosion of a Microconductor According to the Specified Two Pulse Temperature Dependence of the Pressure at a Point in a Liquid. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2010, **46**(1), 53–56.

2. Барбашова Г.А., Каменская Л.А. Влияние нагрузки, создаваемой каналом электрического разряда в воде, и гидродинамической нагрузки на напряженно-деформированное состояние сварного соединения. *Электронная обработка материалов*. 2007, (3), 20–23.
3. Kamenskaya L. A. The Effect of the Components of a Complex Load Created by an Electric Discharge in Water on a Deflected Mode of Cast Iron Molds. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2011, **47**(3), 248–252.
4. Barbashova G.A. Mathematical Model for the Determination of the Extension Rate of a Cylindrical Cavity and of the Pressure Inside it from the Given Radius. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2010, **46**(4), 339–342.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1986. 288 с.
6. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. *Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, програмы*. Киев: Наукова думка, 1986. 544 с.
7. *Численное решение многомерных задач газовой динамики*. Под ред. С.К.Годунова. М.: Наука, 1976. 400 с.

Поступила 02.11.12
После доработки 24.12.12

Summary

Using the mathematical model presented in the literature, a solution is offered to the inverse hydro-dynamic problem of the recovery of kinematic and thermodynamic characteristics of the discharge channel by the experimental time dependence of the discharge channel radius. Analog characteristics of the ambient fluid of the channel are also determined.

Keywords: mathematical model, inverse hydrodynamic problem, kinematic and thermodynamic characteristics.