

Нелинейное резонансное взаимодействие волн на струе в радиальном электрическом поле

Н. А. Петрушов, А. И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: shir@uniyar.ac.ru

В нелинейных аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости показано, что движение заряженной струи относительно материальной среды приводит к появлению нарастающих во времени периодических волновых движений её границы раздела со средой (неустойчивости Кельвина-Гельмгольца), а также нелинейного внутреннего резонансного взаимодействия волн, параметры которого (интенсивность и характерное время взаимодействия) зависят от физических параметров системы: плотности электрического заряда на струе, скорости её движения относительно среды, массовой плотности, значений волновых чисел взаимодействующих волн, величины коэффициента поверхностного натяжения границы раздела.

Ключевые слова: движущаяся струя, нелинейные волны, идеальная электропроводная жидкость, заряд, материальная среда, тангенциальный разрыв поля скоростей.

УДК 532.517.013.4:537.2

ВВЕДЕНИЕ

Исследование влияния движения жидкой цилиндрической заряженной струи относительно материальной диэлектрической среды (то есть наличия тангенциального разрыва поля скоростей) на устойчивость заряженной границы раздела представляет интерес в связи с многочисленными приложениями феномена диспергирования струи в технике и технологии [1–3]. Изучение нелинейного резонансного взаимодействия капиллярных волн на поверхности струи вообще находится в зачаточном состоянии: отмечен сам факт наличия такого взаимодействия [4], определены положения резонансов [5], но не рассмотрено само взаимодействие. Этой проблеме и посвящена настоящая статья.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об устойчивости капиллярных волн на однородно заряженной с поверхностной плотностью заряда χ (вызывающего появление у струи электрического поля с напряженностью $\mathbf{E} = 4\pi\chi\mathbf{e}_z$) цилиндрической поверхности струи радиуса R идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с коэффициентом межфазного натяжения σ и плотностью ρ_1 . Примем, что струя движется со скоростью \mathbf{U}_0 , параллельной \mathbf{e}_z (\mathbf{e}_z – орт продольной координаты), в идеальной несжимаемой диэлектрической среде, имеющей плотность ρ_2 и диэлектрическую проницаемость, равную единице. Задачу будем решать в инерциальной системе отсчета, связанной с осью симметрии невозмущенной струи и движущейся со скоростью \mathbf{U}_0 , в цилиндрической

системе координат, орт \mathbf{e}_z которой совпадает по направлению с \mathbf{U}_0 и с осью симметрии невозмущенной капиллярным волновым движением цилиндрической поверхности струи. Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых $R = \rho_1 = \sigma = 1$, а поверхность раздела сред, возмущенная капиллярным волновым движением, описывается соотношением

$$F = r - 1 - \xi(\varphi, z, t) = 0, \quad |\xi| \ll 1,$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение цилиндрической поверхности струи, обусловленное капиллярным волновым движением; φ – азимутальный угол.

Полная математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_1, \nabla) \mathbf{u}_1 &= -\nabla p_1; \\ \partial_t \mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_2, \nabla) \mathbf{u}_2 &= -\frac{1}{\rho} \nabla p_2; \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_1 &= 0; \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0; \operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \\ r = 1 + \xi(\varphi, z, t) : \frac{dF}{dt} &= 0; (\mathbf{n}, \mathbf{u}_1) = (\mathbf{n}, \mathbf{u}_2); \\ p_1 - p_2 + p_E - p_\sigma &= 0; \\ \Phi(r, \varphi, z, t) &= \Phi_s(t); \\ r \rightarrow 0: \mathbf{u}_1 &\rightarrow 0; \\ r \rightarrow \infty: \mathbf{u}_2 &\rightarrow -\mathbf{U}_0; \mathbf{E} \rightarrow 0; t = 0: \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi(z, \varphi, t) &= \zeta(\exp(ikz + im\varphi) + \exp(ikz - im\varphi)) + (k.c.); \\ \partial_t \xi(z, \varphi, t) &= 0; \end{aligned}$$

где ζ – амплитуда начальной волновой деформации; k – волновое число; m – азимутальный па-

раметр; $\rho \equiv \rho_2/\rho_1$ – безразмерная плотность окружающей среды; i – мнимая единица.

В качестве дополнительных условий принимается условие постоянства объёма струи, происходящего на одну длину волны $\lambda \equiv 2\pi/k$,

$$\int_V dV = \pi\lambda, \quad V = \{0 \leq r \leq 1 + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\}$$

и условие сохранения заряда на отрезке струи протяженностью в длину волны λ :

$$\frac{1}{4\pi} \int_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}) dS = 2\pi\chi\lambda,$$

$$S = \{r = 1 + \xi(\varphi, z, t); 0 \leq \varphi \leq 2\pi; z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\}.$$

В сформулированной задаче $\mathbf{u}_j \equiv \mathbf{u}_j(r, \varphi, z, t)$ – поля скоростей течения жидкости в струе ($j = 1$) и в среде ($j = 2$), генерируемые волнами на поверхности раздела сред; $p_j \equiv p_j(r, \varphi, z, t)$ – гидродинамические давления в струе ($j = 1$) и среде ($j = 2$); p_E – давление электрических сил:

$$p_E = \frac{E^2}{8\pi};$$

p_σ – давление сил поверхностного натяжения:

$$p_\sigma = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n};$$

на границе раздела сред $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, $\Phi \equiv \Phi(r, \varphi, z, t)$ – напряженность и потенциал электрического поля; $\Phi_s(t)$ – потенциал поверхности струи; \mathbf{n} – орт нормали к возмущённой поверхности струи.

В нижеследующем рассмотрении течения будем считать потенциальными:

$$\mathbf{u}_1 = \nabla\psi_1, \quad \mathbf{u}_2 = -\mathbf{U}_0 + \nabla\psi_2.$$

АНАЛИЗ

В аналитическом выражении для поправки к форме поверхности второго порядка малости были найдены резонансно подобные множители шести различных типов [5]. Для детального исследования резонансов сформулируем задачу, задавшись целью получить эволюционные уравнения для амплитуд волн. Решение задачи первого порядка малости запишем в виде суперпозиции волн с различными k и m [5]:

$$\xi^{(1)} = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (\exp[im\varphi] + \exp[-im\varphi]) \times \\ \times (\zeta_1(T_1) \exp[ikz + is_1T_0] + \zeta_2(T_1) \exp[ikz + is_2T_0]) \times \\ \times dk + (\kappa.c.); \\ \Phi^{(1)} = 4\pi\chi \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{K_m(kr)}{K_m(k)} (\exp[im\varphi] + \exp[-im\varphi]) \times$$

$$\times (\zeta_1(T_1) \exp[ikz + is_1T_0] + \zeta_2(T_1) \exp[ikz + is_2T_0]) \times \\ \times dk + (\kappa.c.);$$

$$\psi_1^{(1)} = i \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{I_m(kr)}{k I'_m(k)} (\exp[im\varphi] + \exp[-im\varphi]) \times \\ \times (s_1 \zeta_1(T_1) \exp[ikz + is_1T_0] + s_2 \zeta_2(T_1) \exp[ikz + is_2T_0]) \times \\ \times dk + (\kappa.c.);$$

$$\psi_2^{(1)} = i \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{K_m(kr)}{k K'_m(k)} (\exp[im\varphi] + \exp[-im\varphi]) \times \\ \times \{(s_1 - kU_0) \zeta_1(T_1) \exp[ikz + is_1T_0] + \\ + (s_2 - kU_0) \zeta_2(T_1) \exp[ikz + is_2T_0]\} dk + (\kappa.c.).$$

В этих выражениях $T_0 \equiv t$ и $T_1 \equiv \varepsilon t$ – разные масштабы времени, которые нужно ввести в задачу при использовании метода многих временных масштабов [1, 5]; ε – малый параметр (безразмерная амплитуда капиллярной волны, заданная в начальный момент времени); I_m и K_m – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка m [1], а I'_m и K'_m – их первые производные по аргументу; s_j – комплексные частоты, $j = 1; 2$ – номер решения дисперсионного уравнения для струи, претерпевающей неустойчивость Кельвина-Гельмгольца; $\kappa.c.$ – аббревиатура, означающая «члены, комплексно сопряженные к выписанным».

Решения второго порядка малости, удовлетворяющие соответствующим уравнениям Лапласа и условиям ограниченности, будут иметь вид:

$$\Phi^{(2)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_\mu(\kappa r)$$

$$(a_1 \exp[i\kappa z + i\mu\varphi] + a_2 \exp[i\kappa z - i\mu\varphi] + (\kappa.c.)) d\kappa;$$

$$\psi_1^{(2)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} I_\mu(\kappa r)$$

$$(b_1 \exp[i\kappa z + i\mu\varphi] + b_2 \exp[i\kappa z - i\mu\varphi] + (\kappa.c.)) d\kappa;$$

$$\psi_2^{(2)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_\mu(\kappa r)$$

$$(c_1 \exp[i\kappa z + i\mu\varphi] + c_2 \exp[i\kappa z - i\mu\varphi] + (\kappa.c.)) d\kappa;$$

μ – обозначение азимутального числа, по которому ведется суммирование; a_n, b_n, c_n – неизвестные коэффициенты ($n = 1; 2$), являющиеся функциями времени T_0 .

В аналогичном виде запишем выражение второго порядка малости к форме поверхности струи:

$$\xi^{(2)} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (\alpha_1(T_0) \exp[i\kappa z + i\mu\phi] + \alpha_2(T_0) \exp[i\kappa z - i\mu\phi] + (к.с.)) d\kappa.$$

Используя кинематические условия и условие эквипотенциальности, выразим неизвестные a_n , b_n , c_n через амплитуды $\alpha_i(T_0)$, получив неоднородное дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию амплитуд $\alpha_n(T_0)$ во времени:

$$-\partial_{T_0} \alpha_i(T_0) \mp \frac{2i\delta_{\mu}}{\beta_{\mu}} \partial_{T_0} \alpha_i(T_0) + \frac{\eta_{\mu}}{\beta_{\mu}} \alpha_i(T_0) = G(T_0, T_1),$$

где $G(T_0, T_1)$ – известная функция неоднородности, явный вид которой не существует.

Исключение секулярных членов в функции неоднородности позволяет исследовать временную эволюцию амплитуд волн в состояниях, близких к состояниям реализации резонансов. Например, для имеющегося резонанса $\Omega_1 = 4(s_{m,k}^{(1)})^2 - (s_{2m,2k}^{(1)})^2 \approx \varepsilon\delta$ (где δ – параметр расстройки, а $s_{m,k}^{(j)}$ – комплексная частота с указанием на азимутальное число m и волновое число волны k , верхний индекс указывает номер корня дисперсионного уравнения [5]) следует записать эволюционные уравнения для обеих мод, связанных резонансным взаимодействием, то есть принять для первого уравнения $\mu = 2m$, $\kappa = 2k$, $m_1 = m$ и $k_1 = k$; для второго уравнения – $\mu = m$, $\kappa = k$, $m_1 = 2m$ и $k_1 = 2k$. Исключая секулярные слагаемые в каждом из уравнений, несложно получить систему дифференциальных уравнений для амплитуд первого порядка взаимодействующих мод, описывающих их зависимость от временного масштаба T_1 :

$$\begin{cases} i A_1 \zeta'_{2m,2k,1}(T_1) + B_1 \zeta_{m,k,1}^2(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0; \\ i C_1 \zeta'_{m,k,1}(T_1) + D_1 \zeta_{2m,2k,1}(T_1) \bar{\zeta}_{m,k,1}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0. \end{cases}$$

Здесь $\zeta'_{m,k,g}$ – первая производная по времени от амплитуды $\zeta_{m,k,g}$.

Аналогичная процедура для резонанса $\Omega_2 = 4(s_{m,k}^{(2)})^2 - (s_{2m,2k}^{(2)})^2 \approx \varepsilon\delta$ приводит к системе:

$$\begin{cases} i A_2 \zeta'_{2m,2k,2}(T_1) + B_2 \zeta_{m,k,2}^2(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0; \\ i C_2 \zeta'_{m,k,2}(T_1) + D_2 \zeta_{2m,2k,2}(T_1) \bar{\zeta}_{m,k,2}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0. \end{cases}$$

Для резонанса $\Omega_3 = 4(b_m(k))^2 - (s_{2m,2k}^{(1)})^2 \approx \varepsilon\delta$:

$$\begin{cases} i A_3 \zeta'_{2m,2k,1}(T_1) + B_3 \zeta_{m,k,1}(T_1) \zeta_{m,k,2}(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0; \\ i C_3 \zeta'_{m,k,2}(T_1) + D_3 \zeta_{2m,2k,1}(T_1) \bar{\zeta}_{m,k,1}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0; \\ i E_3 \zeta'_{m,k,1}(T_1) + F_3 \zeta_{2m,2k,1}(T_1) \bar{\zeta}_{m,k,2}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0. \end{cases}$$

Для резонанса $\Omega_4 = 4(s_{m,k}^{(1)})^2 - (s_{0,2k}^{(1)})^2 \approx \varepsilon\delta$:

$$\begin{cases} i A_4 \zeta'_{0,2k,1}(T_1) + B_4 \zeta_{m,k,1}^2(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0; \\ i C_4 \zeta'_{m,k,1}(T_1) + D_4 \zeta_{0,2k,1}(T_1) \bar{\zeta}_{m,k,1}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0. \end{cases}$$

Для резонанса $\Omega_5 = 4(s_{m,k}^{(2)})^2 - (s_{0,2k}^{(2)})^2 \approx \varepsilon\delta$:

$$\begin{cases} i A_5 \zeta'_{0,2k,2}(T_1) + B_5 \zeta_{m,k,2}^2(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0; \\ i C_5 \zeta'_{m,k,2}(T_1) + D_5 \zeta_{0,2k,2}(T_1) \bar{\zeta}_{m,k,2}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0. \end{cases}$$

Для резонанса $\Omega_6 = 4(b_m(k))^2 - (s_{0,2k}^{(1)})^2 \approx \varepsilon\delta$:

$$\begin{cases} i A_6 \zeta'_{0,2k,1}(T_1) + B_6 \zeta_{m,k,1}(T_1) \zeta_{m,k,2}(T_1) \exp[i\delta T_1] = 0; \\ i C_6 \zeta'_{m,k,2}(T_1) + D_6 \zeta_{0,2k,1}(T_1) \bar{\zeta}_{m,k,1}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0; \\ i E_6 \zeta'_{m,k,1}(T_1) + F_6 \zeta_{0,2k,1}(T_1) \bar{\zeta}_{m,k,2}(T_1) \exp[-i\delta T_1] = 0; \end{cases}$$

Решения для амплитуд определяются в виде

$$\zeta_{m,k}^{(j)} = a_{m,k}^{(j)}(T_1) \exp[ib_{m,k}^{(j)}(T_1)]. \quad (1)$$

Начальные условия для систем уравнений получаются подстановкой проектов решений (1) в начальные условия задачи. Коэффициенты A_g , B_g , C_g , D_g , E_g , F_g (где $g = 1; 2; \dots; 6$) – известные коэффициенты, явный вид которых не принципиален.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Заметим, что инкремент неустойчивости γ любой волны определяется модулем мнимой части её частоты, являющейся решением дисперсионного уравнения.

Для определения области реализации резонанса рассмотрим взаимное расположение поверхности $J = \Omega_j$ (где $j = 1, 2, \dots, 6$, а J – буквенное обозначение поверхности для удобства графического представления), пересеченной нулевой плоскостью, и поверхностей инкрементов взаимодействующих волн $\gamma(2m, 2k)$ и $\gamma(m, k)$ как функций от безразмерного параметра $w \equiv 4\pi\chi^2$ и безразмерного волнового числа k , численно рассчитанных при различных параметрах системы (приведенных полностью в явном виде в [5]). Секущая плоскость является нулевой, пересечение секущей плоскости и поверхности $J \equiv \Omega_j$ будет являться линией реализации резонанса $\Omega_j \approx \varepsilon\delta$. Отметим, что частоты обозначаются как $s_{m,k}^{(j)}$ и $b_{m,k}$, а δ – параметр расстройки.

Для возможных резонансов:

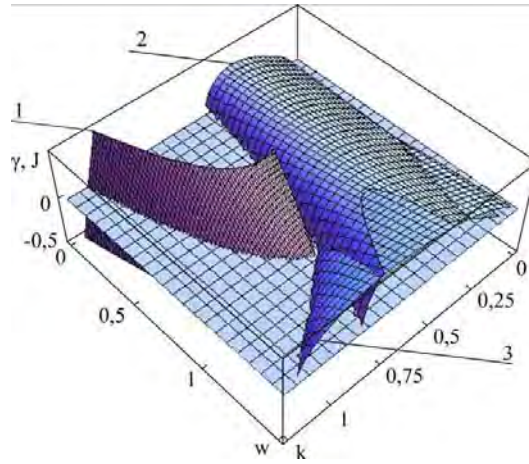


Рис. 1. Взаимное расположение поверхностей, соответствующих инкрементам взаимодействующих волн, и комбинации квадратов их частот. Рассчитано при $We = 0,1$, $m = 1$, $\rho = 0,001$ для резонанса $J \equiv \Omega_4 = 4\left(s_m^{(1)}(k)\right)^2 - \left(s_0^{(1)}(2k)\right)^2 \approx \varepsilon\delta$.

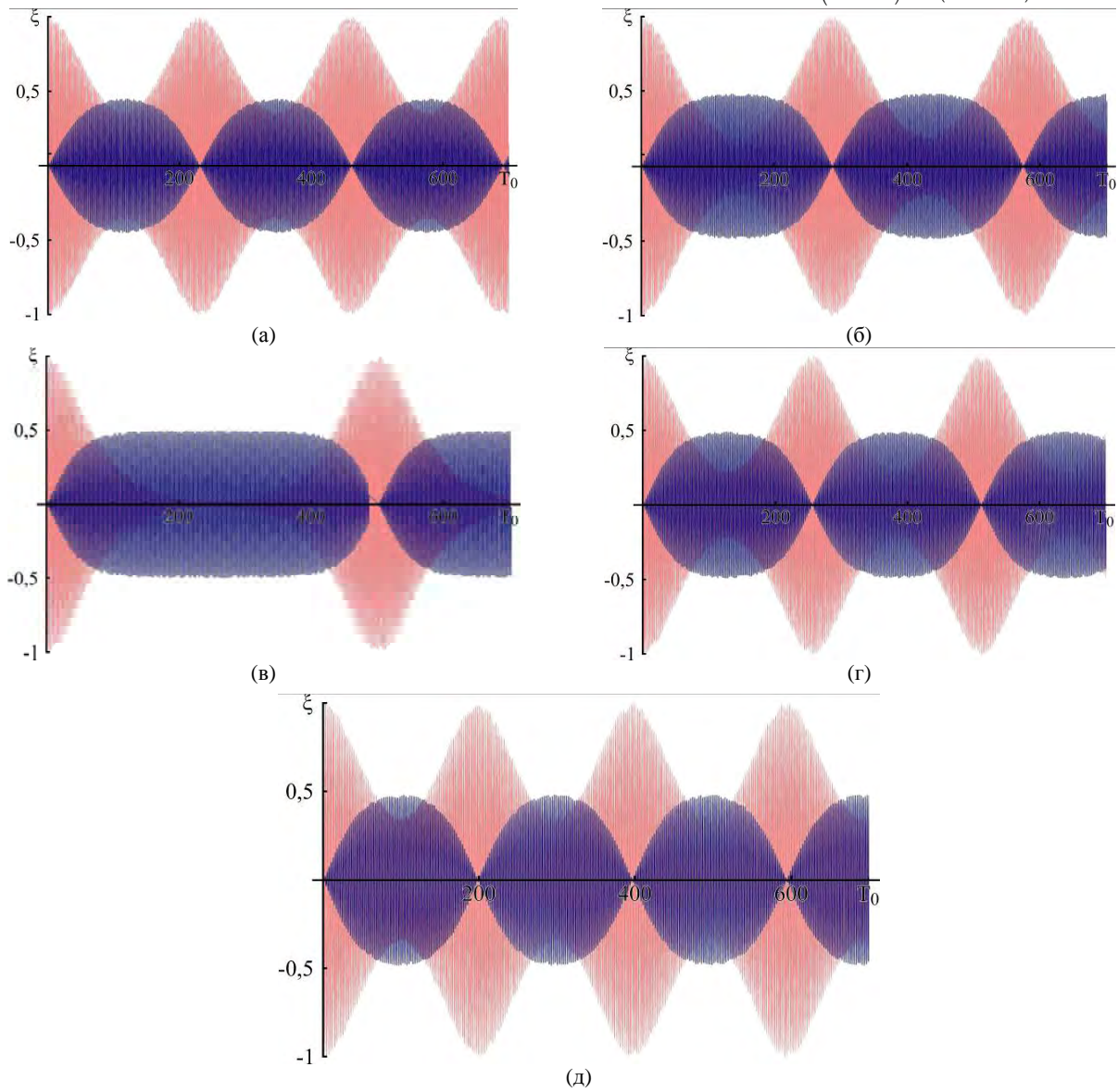


Рис. 2. Резонансное взаимодействие волн при нелинейном резонансе $\Omega_4 = 4\left(s_m^{(1)}(k)\right)^2 - \left(s_0^{(1)}(2k)\right)^2 \approx \varepsilon\delta$; рассчитано при значении параметров $m = 1$, $w = 0$, $We = 0,1$, $\rho = 0,001$, $\varepsilon = 0,3$, $k = 1,099$ (а); то же, что на рис. 2а, но рассчитано при $k = 1,101$ (б); то же, что на рис. 2а, но рассчитано при $k = 1,1018$ (в); то же, что на рис. 2а, но рассчитано при $k = 1,103$ (г); то же, что на рис. 2а, но рассчитано при $k = 1,105$ (д).

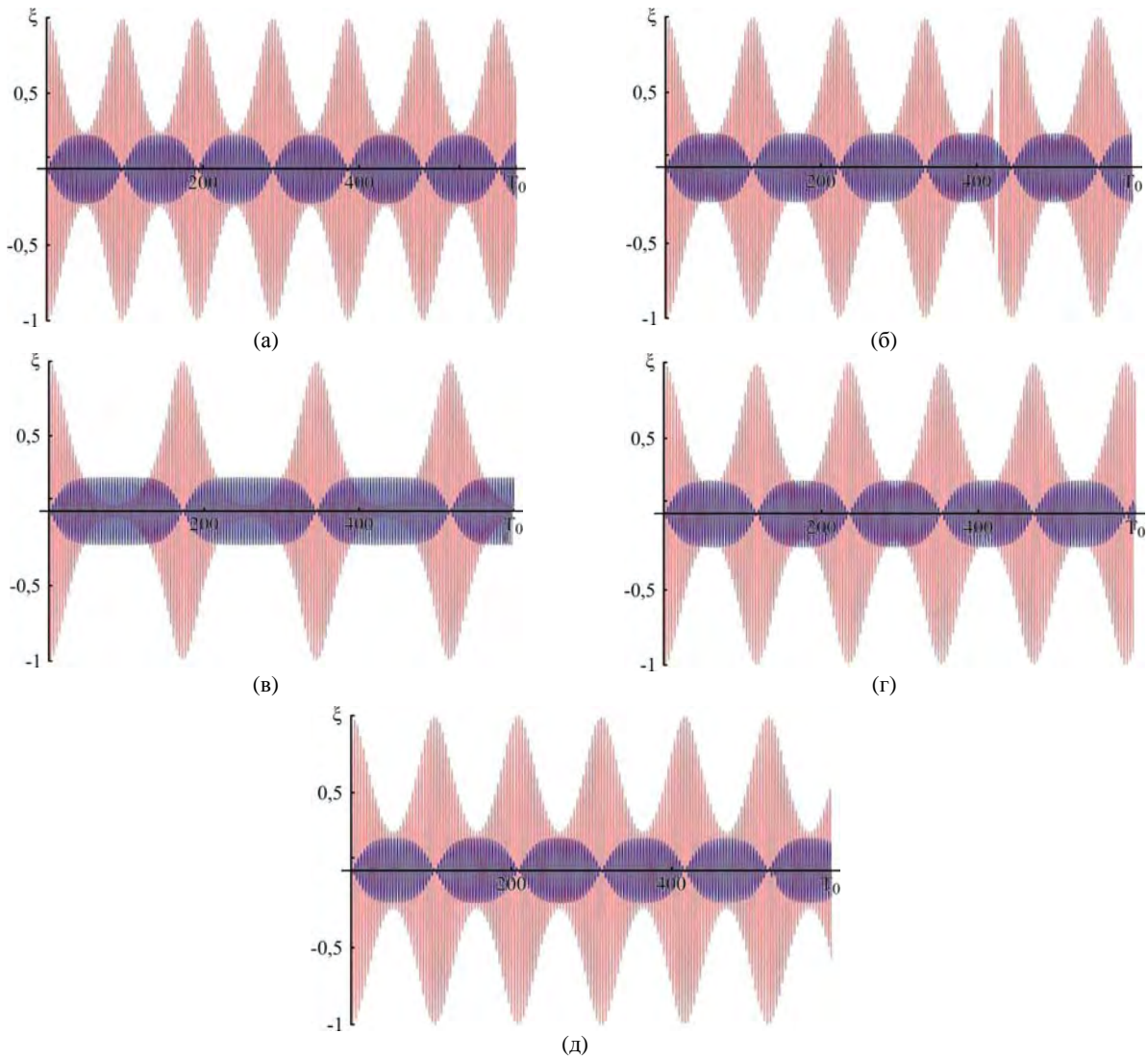


Рис. 3. Резонансное взаимодействие волн при нелинейном резонансе $\Omega_4 = 4\left(s_m^{(1)}(k)\right)^2 - \left(s_0^{(1)}(2k)\right)^2 \approx \varepsilon\delta$. Рассчитано при значении параметров $m = 1$, $w = 0,6$, $We = 0$, $\rho = 0,001$, $\varepsilon = 0,3$, $k = 0,979$ (а); то же, что на рис. 3а, но рассчитано при $k = 0,981$ (б); то же, что на рис. 3а, но рассчитано при $k = 0,983$ (в); то же, что на рис. 3а, но рассчитано при $k = 0,985$ (г); то же, что на рис. 3а, но рассчитано при $k = 0,987$ (д).

$$\Omega_1 = 4\left(s_{m,k}^{(1)}\right)^2 - \left(s_{2m,2k}^{(1)}\right)^2 \approx \varepsilon\delta,$$

$$\Omega_2 = 4\left(s_{m,k}^{(2)}\right)^2 - \left(s_{2m,2k}^{(2)}\right)^2 \approx \varepsilon\delta,$$

$$\Omega_3 = 4\left(b_{m,k}\right)^2 - \left(s_{2m,2k}^{(1)}\right)^2 \approx \varepsilon\delta,$$

$\Omega_6 = 4\left(b_{m,k}\right)^2 - \left(s_{0,2k}^{(1)}\right)^2 \approx \varepsilon\delta$, область реализации нелинейного взаимодействия лежит в области неустойчивости взаимодействующих мод. Резонансы не реализуются.

Ситуация с резонансом $\Omega_4 = 4\left(s_{m,k}^{(1)}\right)^2 - \left(s_{0,2k}^{(1)}\right)^2 \approx \varepsilon\delta$ иная. На рис. 1 поверхность $J = \Omega_4 = 4\left(s_{m,k}^{(1)}\right)^2 - \left(s_{0,2k}^{(1)}\right)^2$ отмечена цифрой «1», поверхности $\gamma(0,2k)$ и $\gamma(m,k)$ – цифрами «2» и «3» соответственно. Поверхности по-

строены при значениях параметров $We = 0,1$, $m = 1$, $\rho = 0,001$. Однако в данном случае часть линии реализации данного типа резонанса лежит в области устойчивости взаимодействующих волн. We – число Вебера.

После удовлетворения начальных условий получится система дифференциальных уравнений с начальными условиями для резонанса

$$\Omega_4 = 4\left(s_{m,k}^{(1)}\right)^2 - \left(s_{0,2k}^{(1)}\right)^2 \approx \varepsilon\delta:$$

$$\begin{cases} a'_{0,2k}(T_1) = -\frac{B_4}{A_4} \left(a_{m,k}(T_1)\right)^2 \sin[\eta(T_1) + 2b_{m,k}(T_1)]; \\ \eta'(T_1) = \delta - \frac{B_4 \left(a_{m,k}(T_1)\right)^2}{A_4 a_{0,2k}(T_1)} \cos[\eta(T_1) + 2b_{m,k}(T_1)]; \\ b'_{m,k}(T_1) = \frac{D_4}{C_4} a_{0,2k}(T_1) \cos[\eta(T_1) + 2b_{m,k}(T_1)]; \\ a'_{m,k}(T_1) = \frac{D_4}{C_4} a_{0,2k}(T_1) a_{m,k}(T_1) \sin[\eta(T_1) + 2b_{m,k}(T_1)]; \end{cases}$$

$$a_{0,2k}(0) = 0.000001; \eta(0) = \frac{\pi}{2};$$

$$a_{m,k}(0) = 0.5; b_{m,k}(0) = 0, \quad (2)$$

где $b_{0,2k}(T_1) = \delta T_1 - \eta(T_1)$. Численное решение системы позволяет установить характер временной эволюции нелинейно взаимодействующих волн на поверхности струи. Временная зависимость амплитуд взаимодействующих волн при различных значениях волнового числа, близких к области резонанса, строится в виде

$$\xi(m, k) = 2a_{m,k}(T_1) \cos \left[s_{m,k}^{(1)} T_0 + b_{m,k}(T_1) \right],$$

где $a_{m,k}(T_1)$ и $b_{m,k}(T_1)$ – полученные численные решения системы (2).

При фиксированных параметрах m , We , w и ρ , изменяя значения волнового числа k , можно проследить за степенью нелинейного взаимодействия волн от величины параметра расстройки δ .

На рис. 2 изображены временные эволюции амплитуд резонансно-взаимодействующих волн $\xi(1, k)$ и $\xi(0, 2k)$ в отсутствие заряда на поверхности струи при $We = 0, 1$, $\rho = 0, 001$, для различных значений параметра δ . Как видно из рисунков, при $\delta \rightarrow \pm 0$ характерное время нелинейного резонансного обмена и доля передаваемой энергии увеличиваются. На рис. 2в изображен случай, наиболее близкий к области резонансного взаимодействия ($\delta = -0, 00007$), начальная волна передает всю свою энергию в возбуждаемую волну.

На рис. 3 изображены временные эволюции амплитуд резонансно-взаимодействующих волн $\xi(1, k)$ и $\xi(0, 2k)$ при $m = 1$, $w = 0, 6$, $We = 0$, $\rho = 0, 001$ для различных значений параметра δ .

В целом ситуация такая же, как и на рис. 2, но, как известно, энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды и квадрату частоты: $E \sim A^2 \omega^2$; при сильном резонансном взаимодействии (δ – минимально), как на рис. 2в, энергия начальной волны $E_1 \sim \zeta^2 \left(s_{1,k}^{(1)} \right)^2$ полностью переходит в возбуждаемую, причем энергия возбуждаемой волны – $E_2 \sim (\zeta/2)^2 \left(s_{0,2k}^{(1)} \right)^2$; учитывая соотношение $4 \left(s_{1,k}^{(1)} \right)^2 \approx \left(s_{0,2k}^{(1)} \right)^2$, нетрудно убедиться, что возбуждаемая волна полностью получает передаваемую энергию. Из рис. 3в видно, что возбуждаемая волна получает только часть энергии, отдаваемой начальной волной. Таким образом, можно сделать вывод, что при параметрах системы рис. 2 начальная волна возбуждает только одну волну (реализуется только одно нелинейное резонансное взаимодействие). А для

параметров системы рис. 3 начальная волна возбуждает более одной волны, то есть одновременно реализуется несколько нелинейных резонансных взаимодействий.

Качественно также реализуется и последний возможный вырожденный нелинейный резонанс $\Omega_5 = 4 \left(s_m^{(2)}(k) \right)^2 - \left(s_0^{(2)}(2k) \right)^2 \approx \varepsilon \delta$. Вид поверхности $J = \Omega_5$ и поверхностей инкрементов для него не приводится, поскольку он подобен приведенному на рис. 1.

Следует отметить, что на рис. 2 и 3 безразмерная амплитуда волны, заданной в начальный момент времени, принята равной единице.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Внутреннее нелинейное вырожденное резонансное взаимодействие капиллярных волн на поверхности однородно заряженной цилиндрической струи идеальной несжимаемой электропроводной жидкости, движущейся относительно идеальной несжимаемой материальной среды вдоль оси симметрии невозмущенной струи, может реализоваться в резонансных ситуациях двух типов. В обоих случаях энергия передается от изначально возбужденной волны (независимо от её симметрии) в волну осесимметричную. Интенсивность и характерное время внутреннего резонансного взаимодействия определяются физическими параметрами задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. *Спонтанный капиллярный распад заряженных струй*. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2007. 340 с.
2. Eggers J., Willermaux E. *Physics of Liquid Jets. Rep. Prog. Phys.* 2008, **71**(036601), 1–79.
3. Kim O.V., Dunn P.F. *Control Production by in-flight Electrospaying. Langmuir.* 2010, **26**, 15807–15813.
4. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Егорова Е.В. О некоторых особенностях нелинейного резонансного взаимодействия мод заряженной струи. *ЭОМ.* 2005, (1), 42–50.
5. Григорьев А.И., Петрушов Н.А., Ширяева С.О. Нелинейный анализ закономерностей реализации волнового движения на поверхности заряженной струи, движущейся относительно материальной среды. *Изв. РАН. МЖГ.* 2012, (1), 81–92.

Поступила 06.07.12
После доработки 09.09.12

Summary

The calculation of the asymptotic analysis of the non-linear second order shows that the motion of a charged jet relative to the material environment leads to the increase in the time-periodic wave motion of the interface with the environment (Kelvin-Helmholtz instability) and the ap-

pearance of a nonlinear internal wave resonant interaction. The parameters of the latter (intensity and the characteristic time of interaction) depend on the physical parameters of the system: the electric charge density on

the jet, its velocity relative to the medium, the mass density, wave numbers of the interacting waves, the coefficient of the surface tension of the interface.

Keywords: a moving jet, a nonlinear waves, a surface charge, a material medium, a velocity field tangential discontinuity.