

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОПРАВКИ К ФОРМЕ И ЧАСТОТЕ ВОЛН НА ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

*Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

**Введение.** Неустойчивость плоской свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями [1–3]. Первые исследования периодических волн на заряженной поверхности жидкости и ее устойчивости по отношению к индуцированному заряду относятся к сороковым годам прошлого века и выполнены в линейном приближении [4–5] по амплитуде волны. Разработанная в [4–5] физико-математическая модель феномена позволила описать начальную стадию неустойчивости: получено дисперсионное соотношение для капиллярных волн и выведены критерии реализации неустойчивости, тогда как вопрос о дальнейшей временной эволюции неустойчивых волновых возмущений малой амплитуды остался нерешенным. Экспериментальные исследования [1–3, 6–8] показали, что при развитии неустойчивости заряженной поверхности жидкости на ней появляются конические выступы – конусы Тейлора, с вершин которых идет сброс избыточного поляризованного заряда. На современном этапе теоретического изучения периодических капиллярно-гравитационных волн на свободной заряженной поверхности жидкости необходимо проводить учет реальной нелинейности полных уравнений и граничных условий электрогидродинамики. В последнее время эта проблема привлекла к себе внимание в связи с исследованием нелинейных волн на заряженной поверхности бесконечно глубокой жидкости [9–13].

Влияние глубины на закономерности реализации неустойчивости поверхности идеальной жидкости достаточно хорошо изучено на основе ранее предложенной модели капиллярно-гравитационных волн на незаряженной свободной поверхности [14–18]. В [18] основное внимание уделено исследованию резонансного взаимодействия волн; методом многих масштабов получено выражение для возмущения поверхности, а также найдены нелинейные поправки к частоте колебаний. В [14–17] также выведены уравнения, описывающие нелинейные волны малой амплитуды, но в приближении „мелкой воды”, когда в качестве малого параметра используется не отношение амплитуды волны к ее длине, как в [18], а отношение толщины слоя жидкости к длине волны. Однако последние работы направлены на поиск солитонных решений. Попытки исследования нелинейных периодических волн на заряженной поверхности идеальной жидкости без использования модели „мелкой воды” предприняты в [19–23]. В работах авторы обобщают задачу [18] в случае заряженной поверхности проводящей жидкости, являющейся нижним электродом конденсатора с плоской верхней обкладкой, расположенной горизонтально, но не приводят физически четкого вывода о значении полученных результатов для исследования неустойчивости Тонкса–Френкеля. Несмотря на столь разностороннее исследование закономерностей формирования капиллярных волновых движений в идеальной жидкости, особенности реализации неустойчивости слоев жидкости конечной толщины с заряженной свободной поверхностью практически не изучены. Цель работы – определение методом многих масштабов аналитического выражения для профиля нелинейной бегущей волны (отыскание нелинейных поправок к амплитудам) на заряженной свободной поверхности слоя идеальной жидкости конечной глубины в четвертом порядке малости по амплитуде, которую будем считать малой по сравнению с длиной волны, аналитических решений того же порядка малости для потенциалов поля скоростей волнового течения жидкости и электростатического поля в пространстве над жидкостью, а также нахождение нелинейной поправки к частоте волны.

**Математическая формулировка задачи.** Рассмотрим идеальную несжимаемую жидкость (с плотностью  $\rho$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma_0$ ), заполняющую в поле сил тяжести бес-

конечный в горизонтальном направлении слой  $0 \leq z \leq h_0$  в декартовой системе координат, орт  $\vec{e}_z$  которой направлен противоположно ускорению силы тяжести  $\vec{g}$ . Жидкость – идеально электропроводна и находится в электростатическом поле с напряженностью  $E_0$ . Предположим, что по поверхности слоя жидкости в положительном направлении оси  $Ox$  распространяется плоская бегущая волна малой амплитуды  $a$  с волновым числом  $k$ . Математическая модель однородна по координате  $y$  и, следовательно, все переменные в задаче будут зависеть только от координат  $x, z$  и времени  $t$ . А все физические параметры жидкости и окружающей ее среды –  $\rho, h_0, \sigma_0, g, E_0, a, k$  – считаем постоянными величинами.

Система уравнений, описывающая нелинейное волновое движение в слое идеальной проводящей жидкости конечной глубины, имеет вид

$$0 < z < \xi: \quad \Delta \phi = 0; \quad (1)$$

$$\xi < z < \infty: \quad \Delta \Phi = 0; \quad (2)$$

$$z = \xi: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial z}; \quad (3)$$

$$\rho \cdot \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \cdot \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 + \rho g \xi + P_\sigma + P_g - P_E = 0, \quad (4)$$

$$P_\sigma = \sigma_0 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \left( \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 1 \right)^{-3/2}; \quad P_E \equiv \frac{E^2(\xi)}{8\pi}; \quad P_g \equiv \rho g(h + \xi). \quad z = \xi: \quad \Phi = 0; \quad (5)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0; \quad (6)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \Phi \rightarrow -E_0 z. \quad (7)$$

$$t = 0: \quad \xi(x, t) = a \cdot \cos(kx - \omega t); \quad ka \ll 1.$$

Второе начальное условие выберем при решении, чтобы результирующие выражения для возмущения свободной поверхности  $\xi$  и потенциалов скорости  $\phi$  и электрического поля  $\Phi$  имели наиболее простой вид.

**Решение задачи.** Разобьем задачу по порядкам малости. Незвестными функциями являются возмущение свободной поверхности  $\xi = \xi(x, t)$ , потенциал поля скоростей  $\phi = \phi(x, z, t)$  и электрический потенциал  $\Phi = \Phi(x, z, t)$ . Рассчитаем их в виде разложений по малому безразмерному параметру  $\varepsilon^n$ :

$$\xi = \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + \varepsilon^3 \xi_3 + \varepsilon^4 \xi_4 + O(\varepsilon^5), \quad (8)$$

$$\phi = \varepsilon \phi_1 + \varepsilon^2 \phi_2 + \varepsilon^3 \phi_3 + \varepsilon^4 \phi_4 + O(\varepsilon^5), \quad (9)$$

$$\Phi = -E_0 z + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \varepsilon^3 \Phi_3 + \varepsilon^4 \Phi_4 + O(\varepsilon^5), \quad (10)$$

где  $\varepsilon$  определяется произведением амплитуды волны  $a$  на волновое число  $k$ .

Решать поставленную задачу будем методом многих масштабов теории возмущений. То есть предположим, что искомые функции  $\xi_n, \phi_n$  и  $\Phi_n$  зависят не только от координат  $x$  и  $z$ , но и от разных временных масштабов: основного  $T_0 = t$  и более медленных  $T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t$  и  $T_3 = \varepsilon^3 t$ :

$$\xi_n = \xi_n(x, T_0, T_1, T_2, T_3); \quad \phi_n = \phi_n(x, z, T_0, T_1, T_2, T_3);$$

$$\Phi_n = \Phi_n(x, z, T_0, T_1, T_2, T_3).$$

Тогда, используя правило дифференцирования сложной функции, оператор  $\partial/\partial T$  можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \varepsilon^3 \frac{\partial}{\partial T_3} + O(\varepsilon^4). \quad (11)$$

Подставляя (8)–(11) в задачи (1)–(7), собирая слагаемые при одинаковых степенях  $\varepsilon$  и приравнивая их нулю, получаем задачи нулевого, первого, второго, третьего и четвертого порядков малости. Решая последовательно данные задачи, находим неизвестные величины  $\xi, \phi$ , и  $\Phi$ .

**Полученные результаты.** Опуская громоздкую математическую процедуру, достаточно подробно описанную ранее в [9–13, 18], выпишем окончательные выражения для возмущения свободной поверхности  $\xi(x, t)$  и потенциалов скорости  $\phi(x, z, t)$  и электрического поля  $\Phi(x, z, t)$  в безразмерных переменных, в которых  $\rho = \sigma = g = 1$  (за всеми безразмерными величинами сохраняем прежние обозначения):

$$\begin{aligned} \xi = & a \cdot \text{Cos}[\theta + X_{31} \cdot a^2 t] + a^2 \cdot \frac{\omega^2}{4} \cdot (1 - (\text{Cth}[kh_0])^2) + \\ & + 2a^2 \Omega \cdot \text{Cos}[2\theta + 2X_{31} \cdot a^2 t] + 2a^3 \Psi_{33} \cdot \text{Cos}[3\theta]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \phi = & \frac{a\omega}{k} \cdot \frac{\text{Ch}[kz]}{\text{Sh}[kh_0]} \cdot \text{Sin}[\theta + X_{31} a^2 t] + \\ & + a^2 \frac{\omega}{k} \cdot \frac{\text{Ch}[2kz]}{\text{Sh}[2kh_0]} \cdot \left( -\frac{k}{4} \cdot \text{Cth}[kh_0] + \Omega \right) \cdot \text{Sin}[2\theta + 2X_{31} a^2 t] - \\ & - a^3 \frac{\text{Ch}[kz]}{k \cdot \text{Sh}[kh_0]} \cdot \left( i\Sigma_{32} + \frac{1}{2} X_{31} \right) \cdot \text{Sin}[\theta] - \\ & - a^3 \frac{2(-3\omega \cdot \Psi_{33} + i\Sigma_{31}) \cdot \text{Ch}[3kz]}{3k \cdot \text{Sh}[3kh_0]} \cdot \text{Sin}[3\theta]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi = & -\sqrt{4\pi W} z + a \cdot \sqrt{4\pi W} \cdot e^{k(h_0-z)} \cdot \text{Cos}[\theta + X_{31} a^2 t] + \\ & + a^2 \cdot \left( \frac{\omega^2 \cdot \sqrt{\pi W}}{2} \cdot ((\text{Cth}[kh_0])^2 - 1) + k \cdot \sqrt{\pi W} \right) + \\ & + 4a^2 \cdot \sqrt{\pi W} \cdot e^{2k(h_0-z)} \cdot \left( \frac{k}{4} + \Omega \right) \cdot \text{Cos}[2\theta + 2X_{31} a^2 t] + \\ & + 2a^3 \cdot \Xi_{32} e^{k(h_0-z)} \cdot \text{Cos}[3\theta] + \\ & + 2a^3 \cdot e^{3k(h_0-z)} \cdot (\sqrt{4\pi W} \cdot \Psi_{33} + \Xi_{31}) \cdot \text{Cos}[3\theta]; \\ & \theta \equiv kx - \omega t, \end{aligned}$$

где частота  $\omega$  определяется из дисперсионного выражения

$$\omega^2 = [k + k^3 - Wk^2] \cdot \text{Th}[kh_0],$$

а  $W = E_0^2 / 4\pi\sqrt{\rho g \sigma}$  – безразмерный параметр Тонкса–Френкеля, характеризующий устойчивость свободной поверхности жидкости по отношению к поверхностному заряду. Постоянные коэффициенты, входящие в решения задачи, имеют вид

$$\begin{aligned} \Omega = & \frac{-4Wk^2 \cdot \text{Th}[2kh_0] + 2k \cdot \text{Th}[kh_0] \cdot (1 + k^2 - Wk)}{32 \cdot \text{Th}[kh_0] \cdot (1 + k^2 - Wk) -} \\ & \cdot \left( -3\text{Th}[2kh_0] + (\text{Cth}[kh_0])^2 \cdot \text{Th}[2kh_0] + 4\text{Cth}[kh_0] \right); \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{31} = & \frac{3}{4} i\omega k^2 \cdot \text{Cth}[2kh_0] \cdot \text{Cth}[kh_0] - 3i\omega k \Omega \cdot \text{Cth}[2kh_0] - \\ & - i\omega k \Omega \cdot \text{Cth}[kh_0] - \frac{1}{8} i\omega k^2 - \frac{1}{2} i\omega k \Omega - \frac{1}{16} i\omega k^2 \cdot \text{Cth}[kh_0]; \\ \Sigma_{32} = & \frac{1}{4} i\omega k^2 \cdot \text{Cth}[2kh_0] \cdot \text{Cth}[kh_0] - i\omega k \Omega \cdot \text{Cth}[2kh_0] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -i\omega k\Omega \cdot Cth[kh_0] - \frac{1}{8}i\omega k^2 - \frac{1}{8}i\omega^3 k \cdot Cth[kh_0] + \\
& + \frac{1}{8}i\omega^3 k \cdot (Cth[kh_0])^3 + \frac{1}{2}i\omega k\Omega - \frac{1}{16}i\omega k^2 \cdot Cth[kh_0], \\
& \Xi_{31} = \frac{3}{2}k \cdot \sqrt{\pi W} \cdot \left(\frac{k}{8} + \Omega\right); \\
& \Xi_{32} = k\sqrt{\pi W} \cdot \left(\frac{k}{8} + 3\Omega + \frac{\omega^2}{4} \cdot (1 - (Cth[kh_0])^2)\right); \\
\Psi_{33} = & \left(\omega^2 k \cdot Cth[3kh_0] \cdot (-3k \cdot Cth[2kh_0] \cdot Cth[kh_0] + 12\Omega \cdot Cth[2kh_0] + \right. \\
& + 4\Omega \cdot Cth[kh_0] + \frac{k}{2} + 2\Omega + \frac{k}{4} \cdot Cth[kh_0]) - 18Wk^3 \cdot \left(\frac{k}{8} + \Omega\right) + \\
& + \frac{11}{4}\omega^2 k \cdot Cth[kh_0] - 14k\omega\Omega + \frac{3k^5}{4} + \frac{7Wk^4}{4} + 10Wk^3\Omega + \\
& + 4\omega^2 k\Omega \cdot Cth[2kh_0] \cdot Cth[kh_0] - \omega^4 k^2 \cdot (Cth[kh_0])^2 \cdot Cth[2kh_0] \Big/ \\
& \left. (12\omega^2 \cdot Cth[3kh_0] - 4k - 36k^3 + 12Wk^2)\right), \tag{14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{31} = & \omega k \cdot Cth[kh_0] \cdot \left(\frac{k}{4} \cdot Cth[2kh_0] \cdot Cth[kh_0] - \Omega \cdot Cth[2kh_0] - \right. \\
& - \Omega \cdot Cth[kh_0] - \frac{\Omega}{8} - \frac{\omega^2}{8} \cdot Cth[kh_0] - \frac{k}{16} \cdot Cth[kh_0] \Big) + \\
& + \frac{Wk^3}{2\omega} \cdot \left(\frac{k}{8} + 3\Omega\right) + \frac{Wk^3\omega}{8} \cdot (1 - (Cth[kh_0])^2) + \\
& + k\omega \cdot \left(\frac{k}{4} \cdot Cth[kh_0] - \Omega\right) \cdot Cth[2kh_0] \cdot Cth[kh_0] - \\
& - \frac{\omega k}{8} \cdot (\omega^2 - Wk^2) \cdot ((Cth[kh_0])^2 - 1) + \frac{3k^5}{16\omega} - \frac{Wk^3\Omega}{2\omega} + \\
& + \frac{5Wk^4}{16\omega} + \frac{9\omega k^2}{16} \cdot Cth[kh_0] - \frac{3\Omega k}{2}. \tag{15}
\end{aligned}$$

**Анализ результатов.** Полученное выражение для профиля нелинейной волны (12) в пределе  $h_0 \rightarrow \infty$  совпадает с решением для бесконечно глубокой жидкости [12], а при  $W \rightarrow 0$  переходит в известное выражение для профиля нелинейной капиллярно-гравитационной волны на незаряженной поверхности слоя идеальной жидкости конечной толщины [18]. В [12, 18] показано, что амплитудные коэффициенты поправок второго и третьего порядков малости к возмущению свободной поверхности имеют резонансный вид. В случае бесконечно глубокой жидкости амплитудные коэффициенты поправок второго порядка малости к решениям (12)–(15) резонансно нарастают при  $k^2 \rightarrow 1/2$ , а амплитудные коэффициенты поправок третьего порядка имеют два резонанса: при  $k^2 \rightarrow 1/2$  и  $k_3^2 \rightarrow 1/3$ . Несмотря на то что выражение (12) для  $\xi$  используется в широком диапазоне волновых чисел, амплитудные множители  $\Omega$  (13) и  $\Psi_{33}$  (14) неограниченно нарастают при тех значениях волновых чисел, когда выполняется соотношение

$$n \cdot Th[kh_0] \cdot (1 + k^2 - Wk) - Th[nkh_0] \cdot (1 + n^2 k^2 - nWk) = 0, \tag{16}$$

где  $n$  – целое число. Коэффициент  $\Omega$  имеет резонанс при  $n = 2$ , а коэффициент  $\Psi_{33}$  – два резонанса при  $n = 2$  и  $3$  (см. рис. 1, 2). Это означает, что использование выражения (12) ограничено в окрестности волновых чисел  $k$ , определяемых из уравнения (16), так как амплитудные коэффициенты должны быть малыми поправками к величинам первого порядка малости. Из рис. 1 и 2 видно, что положения

внутренних нелинейных резонансов во взаимодействии гравитационных и капиллярных волн (геометрического места точек, в которых коэффициенты  $\Omega$  и  $\Psi_{33}$  расходятся) зависят от толщины слоя жидкости и величины поверхностного заряда в тонких слоях жидкости ( $h_0 \leq 1$ ) и не зависят от  $W$  в толстых ( $h_0 \gg 1$ ) слоях.

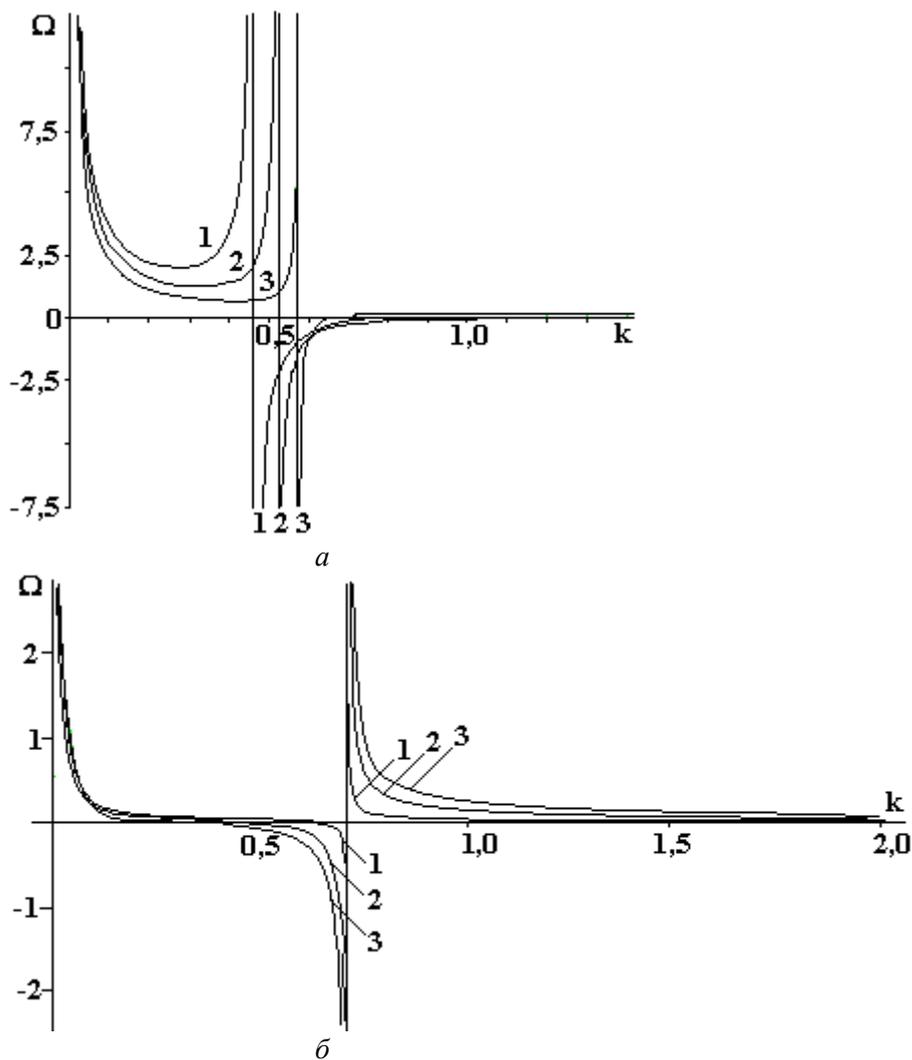
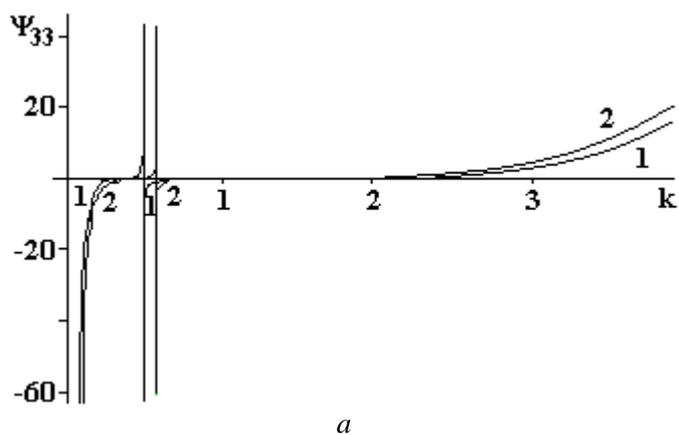


Рис. 1. Зависимости безразмерного амплитудного множителя  $\Omega$  в нелинейной поправке к профилю волны, квадратичной по малому параметру, от безразмерного волнового числа  $k$ , рассчитанные при: 1)  $W = 1,1$ ; 2)  $W = 1,3$ ; 3)  $W = 1,5$ . а –  $h_0 = 1$ ; б –  $h_0 = 5$



а

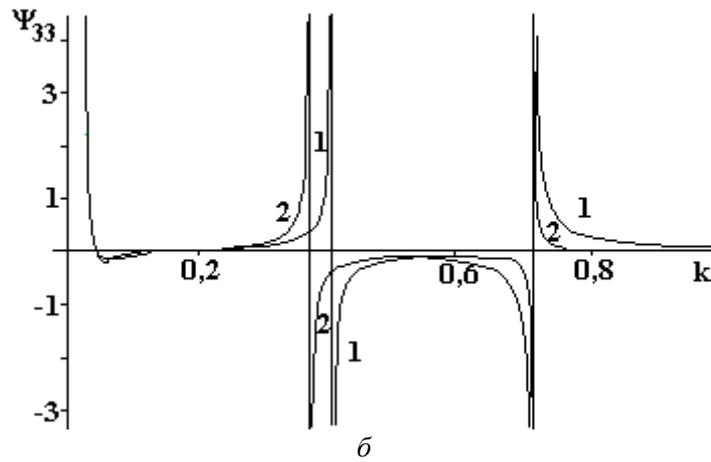
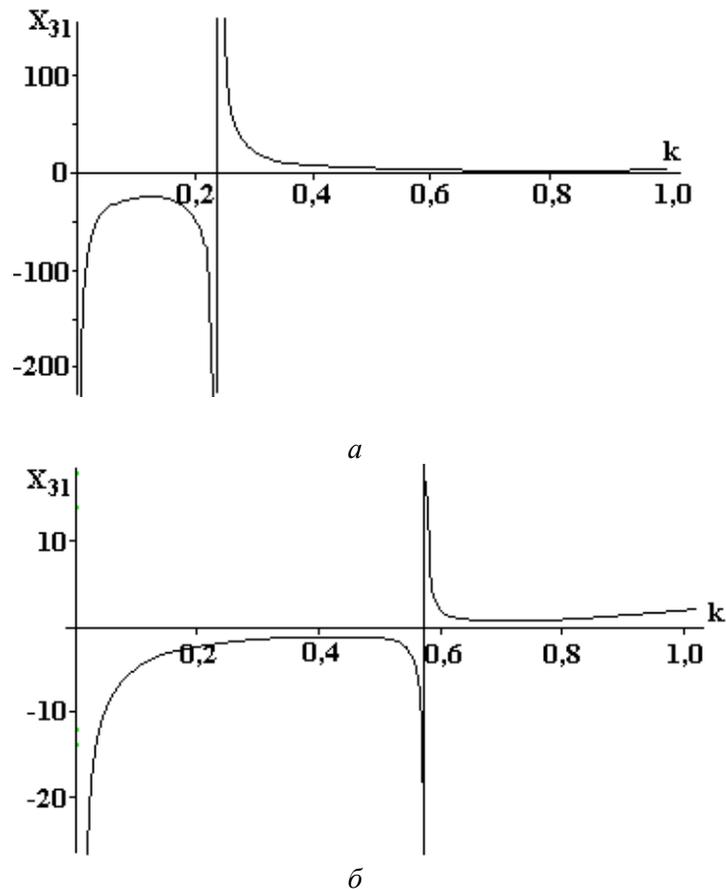
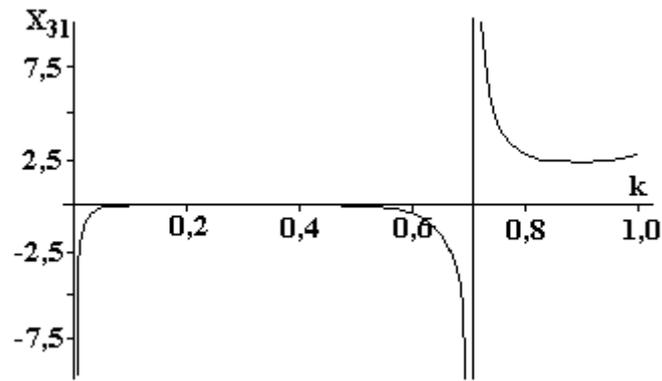


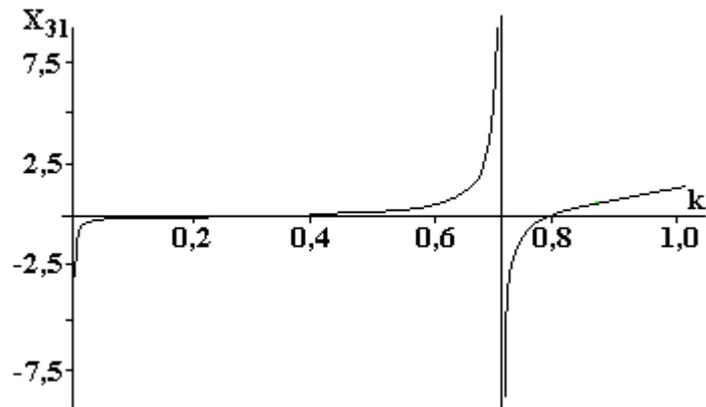
Рис.2. Зависимости безразмерного амплитудного множителя  $\Psi_{33}$  в нелинейной поправке к профилю волны, кубической по малому параметру, от безразмерного волнового числа  $k$ , рассчитанные при: 1)  $W = 1,2$ ; 2)  $W = 1,5$ .  $a - h_0 = 1$ ;  $b - h_0 = 5$

Согласно выражению (12), профиль волны не является стационарным, это объясняется наличием в (12) нелинейной добавки к частоте  $a^2 \cdot X_{31}$ , где безразмерный множитель  $X_{31}$  задан равенством (15). Говорить о стационарном профиле можно только в том случае, если ограничить расчеты вторым порядком малости, так как уже при решении задачи в третьем порядке нелинейная поправка  $a^2 \cdot X_{31}$  появится в линейном по амплитуде слагаемом, а при решении в четвертом – и в квадратичном. Поправка к частоте колебаний компоненты  $\xi$  третьего порядка малости будет модифицировать это слагаемое на величину порядка  $O(a^5)$ , а так как в данную задачу не входит учет величин такого порядка, то в кубическое по малому параметру слагаемое входит невозмущенный аргумент  $\theta$ .



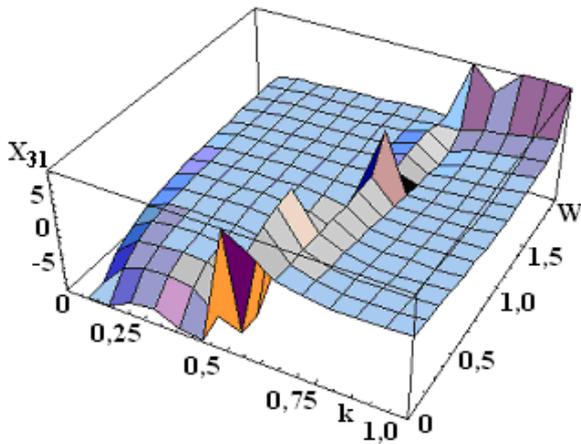


а

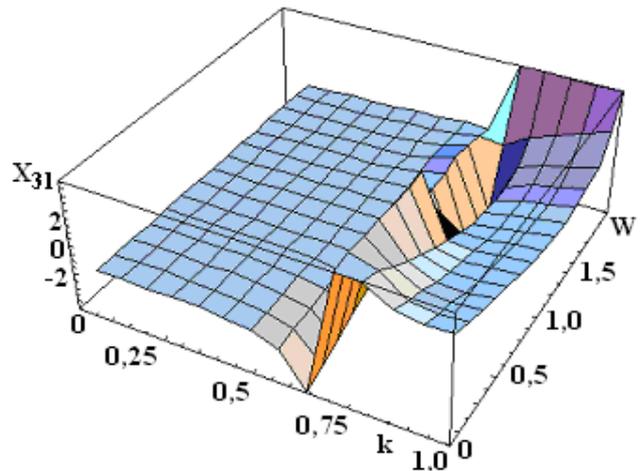


б

Рис.3. Зависимости безразмерного множителя при нелинейной поправке к частоте волн  $X_{31}$  от безразмерного волнового числа  $k$ , рассчитанные при  $h_0 = 1$  (а, б) и 5 (в, г). а –  $W = 0,5$ ; б –  $W = 1,5$ ; в –  $W = 0,5$ ; г –  $W = 1,5$



а



б

Рис. 4. Зависимости безразмерного множителя при нелинейной поправке к частоте волн  $X_{31}$  от безразмерного волнового числа  $k$  и параметра Тонкса-Френкеля  $W$ . а –  $h_0 = 2$ ; б –  $h_0 = 6$

Из выражения (16) видно, что коэффициент при нелинейной поправке к частоте  $\Theta$ , так же как и амплитудные множители  $\Omega$  и  $\Psi_{33}$ , имеет резонансный вид. Безразмерный коэффициент  $X_{31}$ , аналогично  $\Omega$ , будет резонансно нарастать в окрестности волновых чисел, определяемых из уравнения (16), при  $n = 2$  (см. рис. 3, 4). Для бесконечно глубокой жидкости, как показано в [13], нелинейная добавка к частоте, пропорциональная квадрату амплитуды, имеет резонанс при  $k^2 \rightarrow 1/2$ . Из рис.4,

на котором представлены графики зависимости  $X_{31} = X_{31}(k, W)$  при  $h_0 = 2$  и 6, видно, что для жидкости конечной толщины резонансное нарастание  $X_{31}$  при различных значениях параметра Тонкса–Френкеля  $W$  и безразмерной толщины слоя жидкости  $h_0$  имеет место при различных значениях волнового числа  $k$ . Причем в тонких слоях жидкости ( $h_0 \sim 1$ ) положение резонанса (резонансное значение волнового числа) зависит от величины параметра Тонкса–Френкеля  $W$ , а в толстых слоях ( $h_0 \gg 1$ ) – не зависит.

**Заключение.** Решена задача о расчете нелинейного волнового движения в слое идеальной жидкости конечной толщины. В результате анализа выражений для нелинейных амплитудных поправок к линейным решениям, а также нелинейной поправки к частоте обнаружено, что положения внутренних нелинейных резонансов во взаимодействии гравитационных и капиллярных волн, а также величины и знаки коэффициентов  $\Omega$ ,  $\Psi_{33}$  и  $X_{31}$  существенно зависят от толщины слоя жидкости и величины поверхностного заряда, причем влияние поверхностного заряда усиливается с уменьшением толщины слоя жидкости. Исследование влияния толщины слоя жидкости на закономерности реализации нелинейного волнового движения показало, что в тонких и толстых слоях жидкости вид нелинейных поправок качественно и количественно различен.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-01-00760.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Габович М.Д.* Жидкометаллические источники ионов (Обзор) // УФН. 1983. Т. 140. №. 1. С.137–151.
2. *Григорьев А.И.* Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (Обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.
3. *Дудников В.Г., Шабалин А.Л.* Электрогидродинамические источники ионных пучков (Обзор) // Препринт 87–63 ИЯФ СО АН СССР: Новосибирск, 1987.
4. *Френкель Я.И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
5. *Tonks L.* A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field // Phys. Rev. 1935. V. 48. P.562–568.
6. *Габович М.Д., Порицкий В.Я.* Исследование нелинейных волн на поверхности жидкого металла, находящегося в электрическом поле // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. Вып.6. С.320–324.
7. *Taylor G.* Disintegration of water drops in an electric field // Proc. Roy. Soc. A. 1964. V.280. P. 383–397.
8. *Taylor G.I., McEwan A.D.* The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. № 1. P. 1–15.
9. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные электрокапиллярные волны на заряженной поверхности идеальной жидкости // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып.18. С. 46–51.
10. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* О нелинейных капиллярно-гравитационных волнах на заряженной поверхности идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 102–109.
11. *Белоножко Д.Ф., Климов В.А., Григорьев А.И.* Нелинейные капиллярно-гравитационные волны на заряженной поверхности идеальной жидкости // Электронная обработка материалов. 2003. № 6. С. 55–59.
12. *Климов А. В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Нелинейные периодические волны на заряженной свободной поверхности идеальной жидкости // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 32–39.
13. *Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* О нелинейных поправках к частоте капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности жидкости и к критическим условиям реализации ее неустойчивости // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 24. С. 42–46.
14. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф.* Электростатическая неустойчивость заряженной поверхности слоя жидкости конечной толщины // Электронная обработка материалов. 1996. № 3–4. С. 71–73.
15. *Курочкина С.А., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* Об устойчивости волновых течений в тонких слоях жидкости с заряженной свободной поверхностью. Часть 1. Волны малой амплитуды (Обзор) // Электронная обработка материалов. 2003. № 3. С. 26–36.
16. *Курочкина С.А., Белоножко Д.Ф.* Об устойчивости тонкой пленки вязкой жидкости по отношению к поверхностному заряду // Электронная обработка материалов. 2003. № 5. С. 34–38.
17. *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Климов А.В., Ширяева С.О., Курочкина С.А.* Об устойчивости волновых течений в тонких слоях жидкости с заряженной свободной поверхностью. Часть 2.

- Периодические волны конечной амплитуды в вязкой жидкости (Обзор) // Электронная обработка материалов. 2004. № 4. С. 66–78.
18. *Nayfeh A.H.* Finite amplitude surface waves in a liquid layer//J. Fluid Mech. 1970. V.40. Part 4. P. 671–684.
19. *Bhimsen K., Sh.* Nonlinear stability of surface waves in electrohydrodynamics // Quart. of Appl. Math. 1979. V. 35. P. 423–427.
20. *Malik S.K., Rama Kant.* Second harmonic resonance in electrohydrodynamics // Quart. of Appl. Math. 1986. V. 43. P. 23–24.
21. *Michael D.H.* Nonlinear effects in electrohydrodynamic surface wave propagation // Quart. of Appl. Math. 1977. V.35. P.139–143, 345–355.
22. *Michael D.H.* Note on electrohydrodynamic stability //Quart. of Appl. Math. 1970. V. 28. № 1. P. 139–143.
23. *Rama Kant, Jindia R.K., Malik S.K.* Finite amplitude surface waves in electrohydrodynamics // Quart. of Appl. Math. 1981. V. 39. P. 23–24.

Поступила 15.02.05

### Summary

The asymptotic analytical solution of a problem of nonlinear capillary-gravity waves in a layer of finite depth of ideal fluid in forth approximation on wave amplitude is found. It is shown that the dependence of nonlinear corrections to amplitudes and frequency of waves is qualitatively and quantitatively changed at the transition from thick to thin layers.

---

С.А. Хайнацкий, В.В. Шамко, Л.З. Богуславский\*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПРОРАСТАНИЯ ИМПУЛЬСНОЙ КОРОНЫ В СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОЛИТАХ

*Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины,  
пр. Октябрьский, 43-А, г. Николаев, 54018, Украина  
\*Николаевский филиал Европейского университета,  
ул. Мореходная, 2-А, г. Николаев, 54010, Украина*

**Введение.** Исследования последних лет показали, что при определенных условиях импульсная корона (ИК) в жидкостях обладает достаточно высокой интенсивностью гидродинамических возмущений, сравнимых по крайней мере с возмущениями, генерируемыми подводным искровым разрядом [1]. Такая гидродинамическая особенность присуща ИК в сильных электролитах, для которых характерно наличие короны в виде сплошного плазменного образования (СПО). Поэтому вопрос определения скорости прорастания импульсной короны в сильных электролитах является ключевым в развитии представлений о характере и интенсивности гидродинамических возмущений, генерируемых разрядом в жидкости.

Реализовано уже несколько подходов к решению этой задачи. В [1] представлены экспериментальные результаты зависимости радиуса СПО для некоторых режимов разряда. В работе [2] приведены результаты моделирования ИК в постановке, когда скорость распространения границы плазменного образования определяется двумя процессами – скоростью распространения фронта ионизации и скоростью газодинамического расширения плазмы под действием разности давлений внутри плазмы и в окружающей жидкости. Скорость ионизации полагалась постоянной и задавалась параметрически. В [3] приводятся результаты экспериментальных исследований и моделирования протяженности переходного слоя и временной зависимости его относительного изменения в процессе разряда. В работе предполагается, что процессы, происходящие в переходном слое, во многом определяют динамику прорастания ИК.