

А.В. Климов, Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, С.А. Санасарян

НЕЛИНЕЙНЫЕ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

*Ярославский госуниверситет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

Изучение нелинейных капиллярно-гравитационных волновых движений на поверхности вязкой жидкости представляет интерес в связи с исследованиями критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости по отношению к поверхностному заряду – неустойчивости Тонкса–Френкеля. Последний феномен представляет значительный интерес для многочисленных технических и технологических приложений, связанных с явлением электродиспергирования (см. [1–3] и цитируемую литературу). Механизм реализации неустойчивости плоской однородно заряженной поверхности жидкости с учетом ее реальных физико-химических свойств в линейном приближении изучен достаточно подробно. В этой связи, например, в [4, 5] получено и проанализировано дисперсионное уравнение для капиллярных волн на заряженной поверхности вязкой жидкости, а в [6–9] изучено влияние толщины ее слоя с заряженной свободной поверхностью на закономерности развития неустойчивости. Основным результатом работ состоит в том, что на начальной стадии диссипация изменяет величину инкремента развития неустойчивости, но не влияет на условия ее реализации.

Большая часть нелинейных исследований неустойчивости слоя однородно заряженной поверхности вязкой жидкости выполнена в приближении «мелкой воды», когда малым параметром задачи является отношение длины волны к толщине жидкой пленки (см., например, [10–13]). Подобное упрощение не всегда обосновано [14, 15], и к тому же большинство работ сводится к выводу нелинейных уравнений, имеющих солитонные решения [11–13]. Только в последние годы появились работы, позволяющие корректно учитывать влияние вязкости на нелинейные волновые процессы [16–19]. Но весьма существенный вопрос о совместном влиянии толщины слоя и вязкости на распространение нелинейных периодических волн по поверхности жидкого слоя остается открытым.

Цель работы – построение математической модели нелинейных капиллярно-гравитационных волн на поверхности слоя электропроводной жидкости произвольной вязкости, а также анализ влияния вязкости жидкости и ее глубины на закономерности волнового движения.

Описание физической модели. Для исследования нелинейных капиллярно-гравитационных волн на поверхности однородно заряженной вязкой жидкости конечной глубины выбрана следующая физическая модель. Несжимаемая жидкость с плотностью ρ , кинематической вязкостью ν , коэффициентом поверхностного натяжения γ заполняет в поле тяжести $g \parallel -\vec{n}_z$ бесконечный по площади слой $d \leq z \leq 0$ в декартовой системе координат x, y, z (\vec{n}_z обозначен орт оси z). Идеально электропроводная жидкость находится в однородном электрическом поле с напряженностью E_0 , вектор которого направлен вниз. По поверхности жидкости в положительном направлении оси Ox распространяется волна малой амплитуды a с волновым числом k . Все физические параметры жидкости и окружающей среды – $\rho, \nu, \gamma, g, d, E_0, a, k$ – считаются постоянными величинами. Вполне очевидно, что модель однородна по координате y , и, следовательно, все гидродинамические и прочие переменные в модели не будут зависеть от y .

Математическая постановка задачи. С учетом изложенного математическая модель описывается следующей задачей:

$$-d \leq z \leq \xi: \nabla \cdot \vec{U} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{U}) \times \vec{U} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} U^2 + gz \right) + \nu \Delta \vec{U}; \quad (2)$$

$$z \geq \xi: \Delta \Phi = 0; \quad (3)$$

$$z = \xi: \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = v; \quad (4)$$

$$p - 2\rho \nu \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{U} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; \quad (5)$$

$$\vec{\tau} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{U} + \vec{n} \cdot (\vec{\tau} \cdot \nabla) \vec{U} = 0; \quad (6)$$

$$\Phi = 0; \quad (7)$$

$$z = -d: u = 0; \quad (8)$$

$$v = 0; \quad (9)$$

$$z \rightarrow \infty: \nabla \Phi = -E_0 \cdot \vec{n}_z, \quad (10)$$

где $\xi = \xi(x, t)$ – отклонение свободной поверхности жидкости от равновесной плоской формы $z = 0$, вызванное волновым движением; $\vec{U} = (u, 0, v)$ – поле скоростей жидкости; p – гидродинамическое давление внутри жидкости; Φ – потенциал электрического поля, а \vec{n} и $\vec{\tau}$ представляют собой нормальный и касательный вектора к свободной поверхности. Требуется решить задачу в данной постановке для нахождения зависимости величины возмущения свободной поверхности ξ от координаты x и времени t .

В постановке задач (1) – (10) отсутствуют начальные условия. Решение данной задачи при произвольных начальных условиях вызывает серьезные математические трудности. Поэтому указанные условия подбираются таким образом, чтобы получаемое на выходе решение имело более простой вид. В качестве такого условия можно представить, что возмущение свободной поверхности в первом приближении по малой амплитуде волны a имеет вид бегущей синусоидальной волны, то есть

$$\xi(x, t) = 2a \text{Exp}(St - ikx) + c.c. + o(a), \quad (11)$$

где S – комплексная частота волны, $c.c.$ – комплексно-сопряженное слагаемое.

Решение задачи в нулевом приближении. Примем свободную поверхность жидкости в нулевом приближении невозмущенной, то есть

$$\xi_0(x, t) = 0.$$

Тогда величины поля скоростей, давления и электрического потенциала будут определены из соотношений (1) – (10) следующим образом:

$$u_0 = v_0 = 0; \quad p_0 = -\frac{E_0^2}{8\pi} - \rho gz; \quad \Phi_0 = -E_0 z.$$

Разбиение задачи на порядки малости. Решение задач (1) – (10) будем искать в виде разложения неизвестных компонент профиля свободной поверхности жидкости ξ , поля скоростей $(u, 0, v)$, давления p , электрического потенциала Φ по степеням малого параметра ε :

$$\xi = \varepsilon \xi_1 + \varepsilon^2 \xi_2 + O(\varepsilon^3); \quad (12)$$

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + O(\varepsilon^3); \quad (13)$$

$$v = \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + O(\varepsilon^3); \quad (14)$$

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + O(\varepsilon^3); \quad (15)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + O(\varepsilon^3). \quad (16)$$

В качестве малого параметра выберем отношение малой амплитуды a к капиллярной постоянной:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}; \quad \varepsilon = \frac{a}{\alpha}. \quad (17)$$

Подставив выражения (12) – (16) в соотношения (1) – (10) и затем разложив граничные условия (4) – (7) в ряд Тэйлора в окрестности $z = 0$, разобьем исходную задачу на порядки малости.

Математическая постановка задачи первого порядка малости или 1-й задачи.

$$-d \leq z \leq 0: \quad \frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{\rho} p_1 \right) - \nu \Delta \vec{U}_1 = 0; \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \vec{U}_1 = 0; \quad (19)$$

$$z \geq 0: \Delta \Phi_1 = 0; \quad (20)$$

$$z = 0: \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \nu_1 = 0; \quad (21)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0; \quad (22)$$

$$-\rho g \xi_1 + p_1 - 2\rho \nu \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = 0; \quad (23)$$

$$\Phi_1 - E_0 \xi_1 = 0; \quad (24)$$

$$z = -d: u_1 = 0; \quad (25)$$

$$v_1 = 0; \quad (26)$$

$$z \rightarrow \infty: |\nabla \Phi_1| \rightarrow 0, \quad (27)$$

где \vec{U}_1 – векторное поле $(u_1, 0, v_1)$.

Решение 1-й задачи. Нетрудно убедиться в том, что уравнения (18), (19) эквивалентны соотношениям:

$$\Delta \varphi_1 = 0; \quad (28)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \nu \Delta \psi_1 = 0; \quad (29)$$

$$u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z}; \quad (30)$$

$$v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x}; \quad (31)$$

$$p_1 = -\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}. \quad (32)$$

Здесь φ_1 имеет смысл потенциала поля скоростей, а ψ_1 – функции тока.

Выражение для формы свободной поверхности ξ_1 определяется начальным условием и в комплексной форме представляет собой бегущую комплексную волну:

$$\xi_1(x, t) = \beta \text{Exp}(St - ikx), \quad (33)$$

где η некоторым образом выражается малой амплитудой волны a . Итак, решение задач (18) – (27) сводится к нахождению неизвестных величин φ_1 , ψ_1 , Φ_1 , а также частоты S в формуле (33).

Выражения для потенциала скорости φ_1 , функции тока ψ_1 , электрического потенциала Φ_1 будем искать в виде, аналогичном ξ_1 :

$$\varphi_1(x, z, t) = B(z) \text{Exp}(St - ikx); \quad (34)$$

$$\psi_1(x, z, t) = C(z) \text{Exp}(St - ikx); \quad (35)$$

$$\Phi_1(x, z, t) = A(z) \text{Exp}(St - ikx); \quad (36)$$

где A, B, C – амплитуды, подлежащие дальнейшему определению.

После подстановки выражений (33) – (36) в (18) – (32) последними можно выразить искомые величины электрического потенциала Φ_1 , давления p_1 и компонент поля скоростей u_1 и v_1 :

$$q = \sqrt{k^2 + S/v}; \quad \Phi_1 = E_0 \beta \text{Exp}(St - ikx - kz); \quad (37)$$

$$p_1 = -\frac{i\rho S}{k} \beta (\sigma_2 q \text{Ch}k(z+d) + \sigma_1 \text{Sh}k(z+d)) \cdot \text{Exp}(St - ikx); \quad (38)$$

$$u_1 = \beta \cdot (\sigma_2 q \text{Ch}k(z+d) + \sigma_1 k \text{Sh}k(z+d) - \sigma_2 q \text{Ch}q(z+d) - \sigma_1 q \text{Sh}q(z+d)) \cdot \text{Exp}(St - ikx); \quad (39)$$

$$v_1 = i\beta \cdot (\sigma_1 k \text{Ch}k(z+d) + \sigma_2 q \text{Sh}k(z+d) - \sigma_1 k \text{Ch}q(z+d) - \sigma_2 k \text{Sh}q(z+d)) \cdot \text{Exp}(St - ikx); \quad (40)$$

частота S определяется из дисперсионного уравнения:

$$\text{Det}M = 0; \quad \omega_0^2 = gk \left(1 + \frac{\gamma}{\rho g} k^2 - \frac{E_0^2}{4\pi \rho g} k \right);$$

$$M = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & -q & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -Sh dk & -Ch dk & Ch dq & Sh dq & S \\ (k^2 + q^2)Ch dk & (k^2 + q^2)Sh dk & -2kq Sh dq & -2kq Ch dq & v^{-1}\omega_0^2 \\ -2k^2 Sh dk & -2k^2 Ch dk & (k^2 + q^2)Ch dq & (k^2 + q^2)Sh dq & 0 \end{pmatrix},$$

а постоянные σ_1, σ_2 имеют вид

$$\sigma_1 = -\frac{iv(2kq \text{Sh}dk - (k^2 + q^2) \text{Sh}dq)}{q \text{Ch}dq \text{Sh}dk - k \text{Ch}dk \text{Sh}dq}; \quad \sigma_2 = \frac{iv(2k^2 \text{Ch}dk - (k^2 + q^2) \text{Ch}dq)}{q \text{Ch}dq \text{Sh}dk - k \text{Ch}dk \text{Sh}dq}.$$

Важно отметить, что мы получили решение 1-й задачи с начальным условием (33). Чтобы решение задачи было действительным, оно должно удовлетворять условию (11). Для этого величины (37) – (40) необходимо дополнить комплексно-сопряженными частями и выразить $\beta = 2a$.

Математическая постановка задачи второго порядка малости или 2-й задачи.

$$-d \leq z \leq 0: \nabla \cdot \vec{U}_2 = 0; \quad (41)$$

$$\frac{\partial \vec{U}_2}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{\rho} p_2 \right) - \nu \Delta \vec{U}_2 = -\frac{1}{2} \nabla (U_1^2) - (\nabla \times \vec{U}_1) \times \vec{U}_1; \quad (42)$$

$$z \geq 0: \Delta \Phi_2 = 0; \quad (43)$$

$$z = 0: \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - \nu_2 = \xi_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial z} - u_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x}; \quad (44)$$

$$\Phi_2 - E_0 \xi_2 = -\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}; \quad (45)$$

$$-\rho g \xi_2 + p_2 - 2\rho \nu \frac{\partial \nu_2}{\partial z} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = 2\rho \nu \xi_1 \frac{\partial^2 \nu_1}{\partial z^2} - \xi_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{1}{8\pi} \left(\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right) + \quad (46)$$

$$+ \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - 2\rho \nu \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial z} - 2\rho \nu \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \nu_1}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial \nu_2}{\partial x} = 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial \nu_1}{\partial z} - \xi_1 \frac{\partial^2 \nu_1}{\partial x \partial z} - \xi_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}; \quad (47)$$

$$z = -d: \quad u_2 = 0; \quad (48)$$

$$\nu_2 = 0; \quad (49)$$

$$z \rightarrow \infty: |\nabla \Phi_2| \rightarrow 0, \quad (50)$$

где $\vec{U}_2 = (u_2, 0, v_2)$.

Данная задача является системой неоднородных линейных дифференциальных уравнений в частных производных. По принятому в методах возмущений правилу при решении задач методом малого параметра определяется общее решение задачи первого приближения, в данном случае – 1-й задачи, а затем частные решения последующих приближений, в данной ситуации – 2-й задачи. Известно, что частное решение системы дифференциальных уравнений определяется видом ее неоднородностей. Поэтому сначала необходимо вычислить правые части соотношений (41), (42) и (44) – (47). Это делается подстановкой выражений (37) – (40) в данные соотношения. При этом необходимо подразумевать наличие у величин Φ_1, p_1, u_1, v_1 и ξ_1 комплексно-сопряженных слагаемых.

Итоговый результат решения задач (1) – (10). Опуская громоздкую в математическом смысле процедуру отыскания нелинейных поправок, квадратичных по амплитуде волны, выпишем аналитическое выражение с точностью до величин второго порядка малости волн для профиля нелинейной волны в слое вязкой жидкости конечной глубины:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) = & a \cdot \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t) \cdot \text{Cos}(\text{Im } S \cdot t - k \cdot x) + \\ & + 2a^2 \cdot |Z_1| \cdot \text{Exp}(2 \text{Re } S \cdot t) \cdot \text{Cos}(2 \text{Im } S \cdot t - 2k \cdot x + \text{Arg } Z_1), \end{aligned} \quad (51)$$

где

$$\begin{aligned} Z_1 = & \left(2\pi k v \rho w_1 \left(8k(S + 4k^2 v) R_{11} + i(S + 8k^2 v) R_{13} \right) + \right. \\ & + 8\pi k^2 v \rho w_1 S R_{22} \cdot \text{Ch} 2dk + 8\pi i k^2 v \rho w_1 S R_{21} \cdot \text{Sh} 2dk - \\ & - 2\pi \rho w_1 S (S + 4k^2 v) R_{22} \cdot \text{Ch} dw_1 - 4\pi i k \rho S (S + 4k^2 v) R_{21} \cdot \text{Sh} dw_1 - \\ & - 2\pi \rho w_1 \left((S^2 + 8k^2 v S + 32k^4 v^2) R_{11} + i k v (S + 8k^2 v) R_{13} \right) \cdot \text{Ch} 2dk \cdot \text{Ch} dw_1 + \\ & + 4\pi k \rho \left((S^2 + 16k^2 v S + 32k^4 v^2) R_{11} + i k v (3S + 8k^2 v) R_{13} \right) \cdot \text{Sh} 2dk \cdot \text{Sh} dw_1 - \\ & \left. - 2\pi k^2 S R_{12} \cdot \text{Ch} 2dk \cdot \text{Sh} dw_1 + \pi k w_1 S R_{12} \cdot \text{Sh} 2dk \cdot \text{Ch} dw_1 \right) / \Delta_{Z_1}; \\ \Delta_{Z_1} = & \pi \rho S \left(32k^2 v w_1 (S + 4k^2 v) - 4w_1 (S^2 + 8k^2 S + 32k^4 v^2) \text{Ch} 2dk \cdot \text{Ch} dw_1 + \right. \\ & \left. + 8k (S^2 + 16k^2 v S + 32k^4 v^2) \text{Sh} 2dk \cdot \text{Sh} dw_1 + \right. \\ & \left. + \left(2gk + 8 \frac{k^3 \gamma}{\rho} - \frac{E_0^2 k^2}{\pi \rho} \right) \cdot (2k \text{Ch} 2dk \cdot \text{Sh} dw_1 - w_1 \text{Sh} 2dk \cdot \text{Ch} dw_1) \right); \\ R_{11} = & \frac{ik^2}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \text{Sh} dk - \frac{ikq}{2} \cdot \sigma_1 \cdot \text{Sh} dq + \frac{ikq}{2} \cdot \sigma_2 \cdot \text{Ch} dk - \frac{ikq}{2} \cdot \sigma_2 \cdot \text{Ch} dq - \\ & - \frac{kS^2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \text{Ch} d(k+q)}{4v(S(S-4k^2v) - 8k^3v^2(k-q))} + \frac{k(k-q)S \cdot (k\sigma_1^2 + q\sigma_2^2) \cdot \text{Sh} d(k+q)}{4(S(S-4k^2v) - 8k^3v^2(k-q))} + \\ & + \frac{kS^2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \text{Ch} d(k-q)}{4v(S(S-4k^2v) - 8k^3v^2(k+q))} + \frac{k(k+q)S \cdot (k\sigma_1^2 - q\sigma_2^2) \cdot \text{Sh} d(k-q)}{4(S(S-4k^2v) - 8k^3v^2(k+q))}; \\ R_{12} = & - \frac{E_0^2 k^2}{8\pi} + \frac{i\rho}{2} (S + 6k^2 v) (q\sigma_2 \text{Sh} dk + k\sigma_1 \text{Ch} dk) - \\ & - i\rho k (2S + 3k^2 v) (\sigma_1 \text{Ch} dq + \sigma_2 \text{Sh} dq) - \frac{\rho(S + 2k^2 v)}{4v} \sigma_1^2 + \frac{\rho(S + k^2 v)}{2v} \sigma_2^2 + \\ & + \frac{k(3S + 2k(3k - q)v)\rho}{2v(3k - q)(S + 2k(k + q)v)} \left(S\sigma_1 \sigma_2 \text{Sh} d(k - q) + v(k + q)(k\sigma_1^2 - q\sigma_2^2) \text{Ch} d(k - q) \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k(3S+2k(3k+q)v)\rho}{2v(3k+q)(S+2k(k-q)v)}\left(S\sigma_1\sigma_2\text{Shd}(k+q)-v(k-q)(k\sigma_1^2+q\sigma_2^2)\text{Chd}(k+q)\right); \\
& R_{13} = -k^3 \cdot \sigma_1 \text{Shdk} + k^2 q \cdot \sigma_1 \text{Shdq} - k^2 q \cdot \sigma_2 \text{Chdk} + k^2 q \cdot \sigma_2 \text{Chdq} - \\
& -\frac{iS(S+2k(3k+q)v)}{8v^2(3k+q)(S+2k(k-q)v)}\left((k+q)\sigma_1\sigma_2\text{Chd}(k+q)+(k\sigma_1^2+q\sigma_2^2)\text{Shd}(k+q)\right) + \\
& +\frac{iS(S+2k(3k-q)v)}{8v^2(3k-q)(S+2k(k+q)v)}\left((k-q)\sigma_1\sigma_2\text{Chd}(k-q)-(k\sigma_1^2-q\sigma_2^2)\text{Shd}(k-q)\right); \\
& R_{21} = -\frac{ik(S(S-4k^2v)-8k^4v^2)}{4vS(S-8k^2v)} \cdot \sigma_1^2 + \frac{2ik^3(S+k^2v)}{S(S-8k^2v)} \cdot \sigma_2^2; \\
& R_{22} = -\frac{4k^4vq}{S(S-8k^2v)} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2.
\end{aligned}$$

Анализ решения. Наиболее интересный результат данной задачи – амплитудный множитель нелинейной поправки к профилю волны Z_1 . Его величина характеризует силу нелинейного взаимодействия и в то же время зависит от многих параметров, в числе которых глубина и вязкость жидкости. Весьма полезным представляется анализ поведения этой величины в зависимости от глубины и вязкости жидкости.

При аналитическом исследовании нелинейных волн на поверхности жидкости часто обращают внимание на профиль бегущей волны. При этом оцениваются такие величины, как заостренность гребня волны и его наклон. Данные величины определяются множителем Z_1 . Известно, что чем больше кривизна профиля волны на вершине, тем больше заостренность гребня. Покажем, что кривизна профиля на вершине пропорциональна $\text{Re } Z_1$. Тогда можно сказать, что с ростом $\text{Re } Z_1$ заостренность гребней увеличивается.

Точки вершин гребней нелинейной волны и самые нижние точки впадин определяются соответственно как точки максимума и минимума выражения (51). Если приравнять нулю первую производную этого выражения по координате, то получим формулу для нахождения этих точек:

$$\sin(\text{Im } S \cdot t - k \cdot x) + 4a \cdot |Z_1| \cdot \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t) \cdot \sin(2 \text{Im } S \cdot t - 2k \cdot x + \text{Arg} Z_1) = 0. \quad (52)$$

Представим, что амплитуда волны a мала, и найдем точки экстремума функции (51) в виде

$$\text{Im } S \cdot t_1 - k \cdot x_1 = \theta_0 + a\theta_1.$$

Подставим последнее выражение в (52) и полученное разложим по малой амплитуде, отбрасывая слагаемые выше первого порядка малости. При этом окажется, что точки экстремума определяются следующим образом:

$$\text{Im } S \cdot t_1 - k \cdot x_1 = \pi n - 4(-1)^n \cdot a \cdot \text{Im } Z_1 \cdot \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t_1). \quad (53)$$

Значение второй производной выражения (51) по координате в точках максимума и минимума примет вид

$$\frac{\partial^2 \xi(x_1, t_1)}{\partial x^2} = -k^2 a \cdot \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t_1) \cdot \left((-1)^n + 8a \text{Re } Z_1 \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t_1)\right),$$

где четное n соответствует точкам максимума, а нечетное n – минимума. Таким образом, относительное изменение кривизны профиля волны на вершине, вызванное нелинейной поправкой, определяется выражением

$$8a \text{Re } Z_1 \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t_1),$$

то есть пропорционально действительной части Z_1 . С увеличением $\text{Re } Z_1$ растет кривизна профиля волны на вершине, а значит, увеличивается заостренность гребня.

Таким же способом можно показать, что с увеличением по модулю мнимой части Z_1 увеличивается наклон гребней волн, причем гребни направлены в сторону движения волны, когда $\text{Im } Z_1 > 0$, и в обратную сторону, когда $\text{Im } Z_1 < 0$. Примем за угол наклона гребня угол между вертикалью и прямой, соединяющей основание гребня с его вершиной. Основанием гребня будем считать точку с ординатой $z = 0$ и абсциссой, удовлетворяющей равенству

$$\text{Im } S \cdot t_0 - k \cdot x_0 = \pi n. \quad (54)$$

Нетрудно убедиться в том, что последнее выражение будет точкой экстремума по амплитуде профиля линейной волны. А так как гребни линейной волны не имеют наклона, то введенная точка основания гребня нелинейной волны будет являться и основанием гребня линейной. Искомый угол наклона определяется формулой

$$\varphi = \text{Arctg}((x_1 - x_0)/a),$$

где x_0 и x_1 находятся из (53), (54). Полагая, что n должно быть четным в (53) и (54), найдем искомый угол:

$$\varphi = \text{Arctg}\left(\frac{4 \text{Im } Z_1}{k} \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t)\right).$$

Данное соотношение наглядно демонстрирует зависимость угла наклона гребня волны от мнимой части амплитудного множителя Z_1 .

На рис. 1–6 показаны зависимости вещественной и мнимой частей Z_1 от динамической вязкости при различных значениях глубины слоя жидкости, в качестве которой берется вода ($\rho = 0,998 \text{ г/см}^3$, $\gamma = 72,8 \text{ дин/см}$, $g = 981 \text{ см/с}^2$). Здесь предполагается отсутствие электрического поля ($E_0 = 0$). Ранее известно, что короткие капиллярные волны на поверхности глубокой идеальной жидкости имеют притупленные гребни. На рис. 1 нетрудно видеть, что с ростом вязкости жидкости вершины таких волн заостряются, появляется также наклон в сторону, обратную движению волны, который увеличивается. Уменьшение толщины слоя в этом случае дает обратный эффект: гребни волн притупляются, а их наклон в сторону, обратную движению волны, исчезает. Дальнейшее снижение толщины слоя жидкости (до $\approx 1/10 \lambda$, λ – длина волны) еще более притупляет гребни волн (см. рис. 2), однако изменяется характер зависимости от вязкости. Здесь рост вязкости более притупляет вершины волн. Зависимость наклона гребней от вязкости при столь малой глубине слоя жидкости имеет сложный характер. Во-первых, в отличие от глубокой жидкости имеет место наклон в сторону движения волны, и, во-вторых, с ростом вязкости этот наклон увеличивается до определенного значения, а затем сходит на нет и меняется в противоположную сторону.

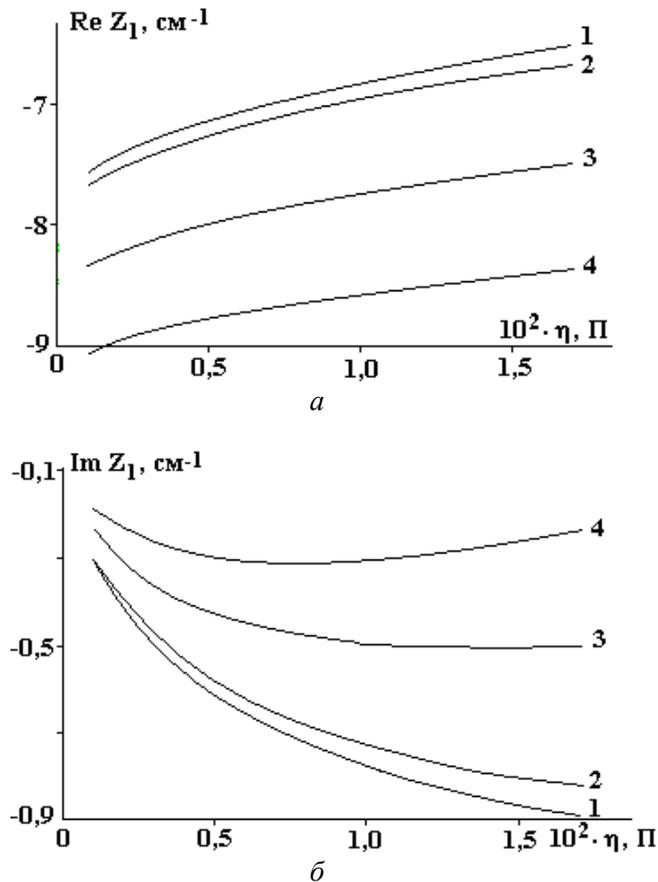


Рис. 1. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей Z_1 от вязкости для коротких волн $\lambda = 0,1 \text{ см}$ при больших значениях толщины слоя. d, λ : 1 – 4; 2 – 0,4; 3 – 0,25; 4 – 0,2

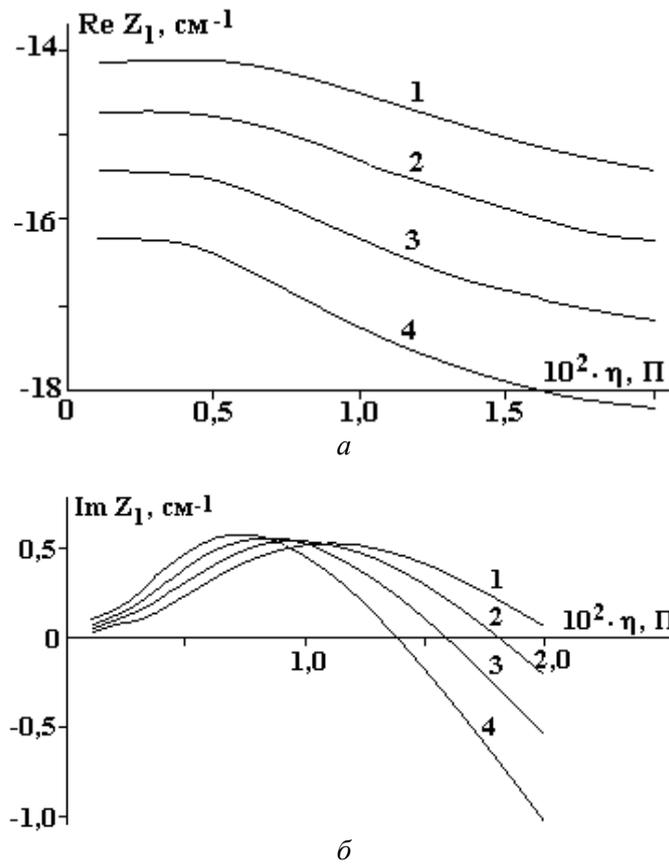


Рис. 2. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей Z_1 от вязкости для коротких волн $\lambda = 0,1$ см при малых значениях толщины слоя. d , λ : 1 – 0,1; 2 – 0,095; 3 – 0,09; 4 – 0,085

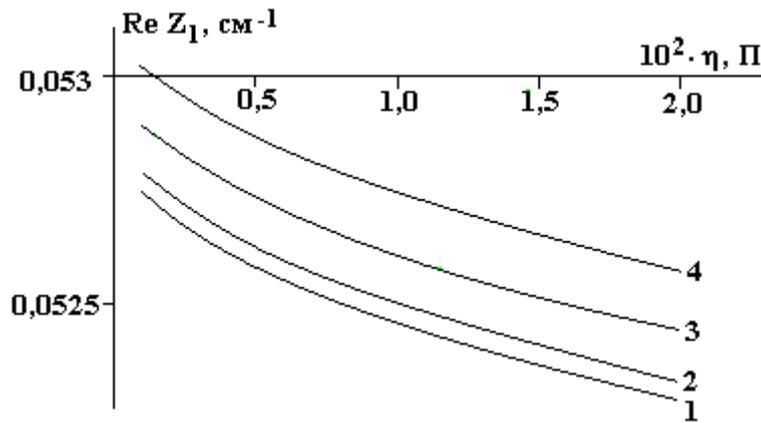


Рис. 3. Зависимости действительной части Z_1 от вязкости для длинных волн $\lambda = 30$ см при больших значениях толщины слоя. d , λ : 1 – 4; 2 – 0,73; 3 – 0,63; 4 – 0,58

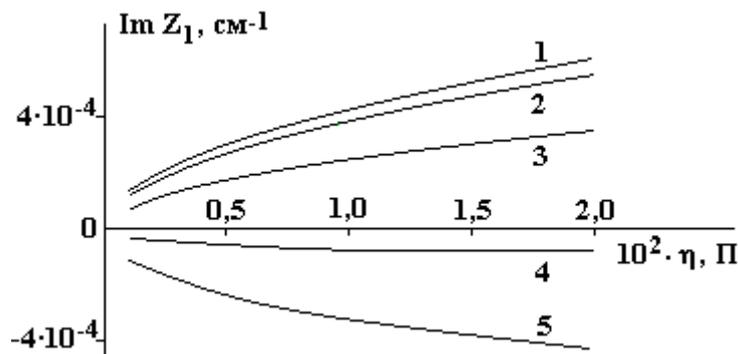


Рис. 4. Зависимости мнимой части Z_1 от вязкости для длинных волн $\lambda = 30$ см при больших значениях толщины слоя. d , λ : 1 – 4; 2 – 0,33; 3 – 0,23; 4 – 0,19; 5 – 0,17

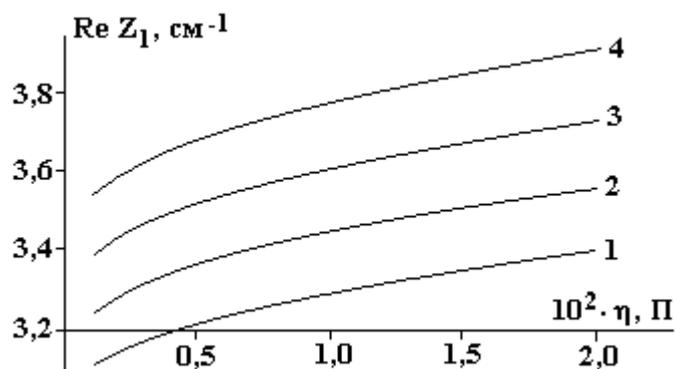


Рис.5. Зависимости действительной части Z_1 от вязкости для длинных волн $\lambda = 30$ см при малых значениях толщины слоя. d , λ : 1 – $5 \cdot 10^{-2}$; 2 – $4,93 \cdot 10^{-2}$; 3 – $4,87 \cdot 10^{-2}$; 4 – $4,8 \cdot 10^{-2}$

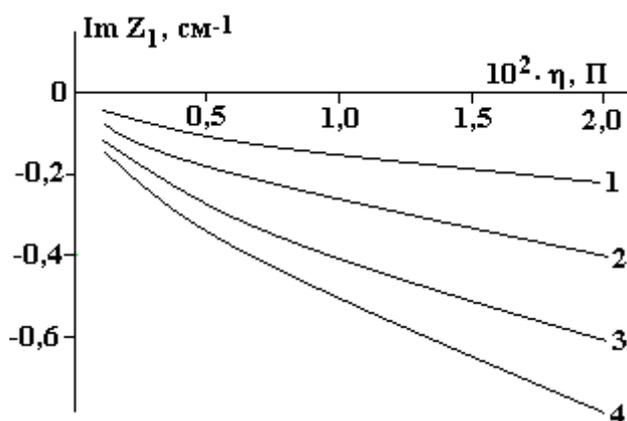


Рис. 6. Зависимости мнимой части Z_1 от вязкости для длинных волн $\lambda = 30$ см при малых значениях толщины слоя. d , λ : 1 – $5,67 \cdot 10^{-2}$; 2 – $5,17 \cdot 10^{-2}$; 3 – $4,83 \cdot 10^{-2}$; 4 – $4,67 \cdot 10^{-2}$

Несколько иной характер имеют аналогичные зависимости для длинных гравитационных волн. На рис. 3–4 нетрудно видеть, что в случаях толщины слоя порядка длины волны и более сила нелинейного взаимодействия, определяемая величинами $\text{Re } Z_1$ и $\text{Im } Z_1$, на два-три порядка меньше, чем для коротких капиллярных волн. Однако для очень малых глубин ($\approx 1/20 \lambda$ – см. рис. 5–6) столь существенного различия в силе проявления нелинейных эффектов для длинных и коротких волн нет. Из рис. 3 и 4 видно, что гребни гравитационных волн на поверхности слоя жидкости глубины порядка длины волны заострены и имеют слабый наклон в сторону движения волны. С уменьшением глубины заостренность вершин волн увеличивается, а наклон уменьшается и при значениях $\approx 1/5 \lambda$ изменяется в противоположную сторону. Зависимость от вязкости такова, что заостренность гребней уменьшается с ростом первой, а их наклон увеличивается. Похожие зависимости имеют место и при очень малой толщине слоя жидкости ($\approx 1/20 \lambda$ – см. рис. 5–6) – с той разницей, что вязкость жидкости не уменьшает, а увеличивает заостренность гребней волн.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 03-01-00760.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габович М.Д. Жидкометаллические источники ионов (обзор) // УФН. 1983. Т.140. № 1. С. 137–151.
2. Григорьев А.И. Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.
3. Григорьев А.И., Голованов А.С., Григорьева И.Д. О критических условиях возникновения Огней св. Эльма // Электронная обработка материалов. 2001. № 1. С. 21–29.
4. Алиев И.Н., Филиппов А.В. О волнах, распространяющихся по плоской поверхности вязкой проводящей жидкости в электрическом поле // Магнитная гидродинамика. 1989. № 4. С. 94–98.
5. Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. Механизм развития неустойчивости заряженной поверхности жидкости // ЖТФ. 1992. Т. 62. № 9. С. 12–21.
6. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф. Капиллярные колебания и неустойчивость Тонкса-Френкеля слоя жидкости конечной толщины // ЖТФ. 1997. Т.67. № 9. С. 12–21.

7. Курочкина С.А., Белоножко Д.Ф. Об устойчивости тонкой пленки вязкой жидкости по отношению к поверхностному заряду // Электронная обработка материалов. 2003. № 5. С. 34–38.
8. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Белоножко Д.Ф. Электростатическая неустойчивость заряженной поверхности слоя жидкости конечной толщины // Электронная обработка материалов. 1996. № 3–4. С. 71–73.
9. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Муничев М.И., Ширяева С.О. Эффект влияния заряда на структуру спектра капиллярных волн в тонком слое вязкой жидкости // Письма в ЖТФ. 1996. Т.22. № 10. С. 84–89.
10. Ильичев А.Т. Уединенные волны в средах с дисперсией и диссипацией (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 3–27.
11. Gonzalez A., Castellanos A. Kortweg-de-Vries-Burgers equation for surface waves in nonideal conducting liquids // Phys. Rev. E. 1994. V. 49. № 4. P. 2935–2940.
12. Gonzalez A., Castellanos A. Nonlinear electrohydrodynamic waves on films falling down an inclined plane // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. № 4. P. 3573–3578.
13. Жакин А.И. Нелинейные волны на поверхности заряженной жидкости. Неустойчивость, ветвление и нелинейные равновесные формы заряженной поверхности // Изв. АН СССР. 1984. № 3. С. 94–102.
14. Крылов В.С., Воротилин В.П., Левич В.Г. К теории волнового движения тонких пленок жидкости // ТОХТ. 1969. Т. 3. № 4. С. 499–507.
15. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Климов А.В., Ширяева С.О., Курочкина С.А. Об устойчивости волновых течений в тонких слоях жидкости с заряженной свободной поверхностью. Часть 2. Периодические волны конечной амплитуды в вязкой жидкости // Электронная обработка материалов. 2004. № 4. С. 66–78.
16. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Ширяева С.О. Асимптотическое решение задачи о нелинейных волнах в вязкой жидкости // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 19. С. 1–9.
17. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Волны конечной амплитуды на поверхности вязкой глубокой жидкости // ЖТФ. 2003. Т.73. Вып.4. С. 28–37.
18. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Нелинейные движения вязкой жидкости со свободной поверхностью // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 2. С. 184–192.
19. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Курочкина С.А., Санасарян С.А. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости // Электронная обработка материалов. 2004. № 2. С. 27–31.

Поступила 04.02.05

Summary

The asymptotic analytical solution of a problem of nonlinear capillary-gravity waves in a layer of finite depth of viscous fluid in second approximation on wave amplitude is found. It is shown that the dependence of nonlinear correction to the linear solution from liquids viscosity is qualitatively changed at the transition from thick to thin layers.
