

А.И. Григорьев, Д.М. Пожарицкий, А.В. Климов

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОПРАВКИ К ЧАСТОТАМ ВОЛН
НА ЗАРЯЖЕННОЙ ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ ИДЕАЛЬНЫХ
ЖИДКОСТЕЙ**

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

1. Введение. Волновое движение на заряженной свободной поверхности жидкости или на заряженной границе раздела несмешивающихся идеальных несжимаемых жидкостей неоднократно становилось предметом исследования, причем аналитические расчеты проводились как в линейной, так и в нелинейной постановках [1–7]. Тем не менее до сих пор не проведен детальный анализ влияния нелинейного взаимодействия волн на поправки к их частотам, появляющиеся в асимптотических расчетах третьего и более высоких порядков малости, хотя это один из наиболее легко проверяемых нелинейных эффектов, оказывающий существенное влияние на скорость распыливания волновых пакетов на критические условия реализации неустойчивости заряженной поверхности.

2. Формулировка задачи. Пусть идеальные, несжимаемые жидкости с плотностями ρ_1 и ρ_2 , где $\rho_1 < \rho_2$, заполняют в поле сил тяжести полупространства $z > 0$ и $z < 0$ соответственно в декартовой системе координат, орт \vec{e}_z которой направлен против направления ускорения силы тяжести $\vec{e}_z \parallel -\vec{g}$. Примем верхнюю жидкость за диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ_* , нижнюю за идеальный проводник, а на границе раздела сред, которая характеризуется коэффициентом поверхностного натяжения σ , однородно распределен электрический заряд так, что в верхней жидкости существует однородное электростатическое поле E_0 , параллельное орту \vec{e}_z .

Пусть плоская периодическая капиллярно-гравитационная волна с конечной, но малой по сравнению с ее длиной амплитудой бежит по границе раздела жидкостей в положительном направлении орта \vec{e}_x . В такой системе деформация поверхности раздела жидкостей, связанная с волной, поле скоростей волнового движения в обеих жидкостях, распределение давлений и электрического поля в окрестности искаженной волновым движением поверхности раздела жидкостей будут зависеть, кроме времени t , только от координат x и z . Уравнение искаженной волновым движением границы раздела сред запишем в наиболее общем виде как $z = \xi(x, t)$.

Математическая модель расчета нелинейного волнового движения в рассматриваемой системе имеет вид

$$\begin{aligned}
 z > \xi: \quad \Delta\Phi = 0; \quad \Delta\varphi_1 = 0; \quad z < \xi: \quad \Delta\varphi_2 = 0; \\
 z = \xi: \quad -\rho_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} - \rho_2 g \xi - \frac{\rho_2}{2} (\nabla\varphi_2)^2 + \\
 + \rho_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + \rho_1 g \xi + \frac{\rho_1}{2} (\nabla\varphi_1)^2 + \frac{\epsilon_* (\nabla\Phi)^2}{8\pi} = -\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2}; \\
 \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}; \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}; \\
 z = \xi: \quad \Phi = 0; \quad z \rightarrow \infty: \quad \nabla\Phi \rightarrow -E_0 \vec{e}_z;
 \end{aligned}$$

$$z \rightarrow \infty: \nabla \varphi_1 \rightarrow 0; \quad z \rightarrow -\infty: \nabla \varphi_2 \rightarrow 0;$$

$$t = 0: \xi(x, t) = a \cdot \cos(kx - \omega_0 t).$$

Второе начальное условие, необходимое для замыкания задачи, сформулируем в виде требования о том, чтобы амплитудные множители при возможных нелинейных поправках к профилю волны с исходным аргументом $\theta \equiv kx - \omega_0 t$ были равны нулю, как это делалось ранее [5–7] в задачах такого типа.

3. Решение задачи. Решение сформулированной задачи проводится асимптотическим аналитическим методом многих масштабов [5–9], предложенным А.Х. Найфе [8–9] специально для расчета нелинейного волнового движения. Опустив весьма громоздкие математические выкладки, приведем сразу окончательные выражения для профиля $\xi(x, t)$ нелинейной волны на однородно заряженной поверхности раздела жидкостей, для потенциалов полей скоростей в верхней $\varphi_1(\vec{r}, t)$ и нижней $\varphi_2(\vec{r}, t)$ средах и потенциала электрического поля $\Phi(\vec{r}, t)$, выписанные в безразмерных переменных, где $\rho_2 = g = \sigma = 1$:

$$\xi(x, t) = a \cdot \cos(\theta_*) + a^2 \cdot \Omega_{21} \cdot \cos(2\theta_*) + a^3 \cdot \Omega_{31} \cdot \cos(3\theta);$$

$$\theta_* \equiv \theta + (\delta \cdot \omega_0^{-1}) \cdot a^2 t \equiv kx - \omega_0 t + (\delta \cdot \omega_0^{-1}) \cdot a^2 t;$$

$$\varphi_1(\vec{r}, t) = -a \cdot (\omega_0/k) \cdot \sin(\theta_*) \cdot \exp(-kz) + a^2 \cdot \Omega_{22} \cdot \sin(2\theta_*) \cdot \exp(-2kz) -$$

$$-a^3 (\Omega_{32} \cdot \sin(\theta) \cdot \exp(-kz) + \Omega_{33} \cdot \sin(3\theta) \cdot \exp(-3kz));$$

$$\varphi_2(\vec{r}, t) = a \cdot (\omega_0/k) \cdot \sin(\theta_*) \cdot \exp(kz) + a^2 \cdot \Omega_{23} \cdot \sin(2\theta_*) \cdot \exp(2kz) -$$

$$-a^3 (\Omega_{34} \cdot \sin(\theta) \cdot \exp(kz) - \Omega_{35} \cdot \sin(3\theta) \cdot \exp(3kz));$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = E_0 \left\{ -z + a \cos(\theta_*) \exp(-kz) + \frac{a^2 k}{2} (1 - 2\Omega_{24} \cos(2\theta_*) \exp(-2kz)) + \right.$$

$$\left. + a^3 (-\Omega_{36} \cdot \cos(\theta) \cdot \exp(-kz) + \Omega_{37} \cdot \cos(3\theta) \cdot \exp(-3kz)) \right\};$$

$$\Omega_{21} = k \left((1 - \rho)(1 - \rho + k^2) - 2Wk \right) / \Xi_1;$$

$$\Omega_{22} = -\omega_0 \left((1 + 3\rho)k^2 + 2Wk - 2(1 - \rho) \right) / \Xi_1;$$

$$\Omega_{23} = -\omega_0 \left((3 + \rho)k^2 - 2Wk - 2\rho(1 - \rho) \right) / \Xi_1;$$

$$\Omega_{24} = - \left((1 + 3\rho)k^2 + 2Wk - 2(1 - \rho) \right) / \Xi_1;$$

$$\Omega_{31} = k^2 \left(2k^4(3\rho^2 - 10\rho + 3) + 32W^2k^2 + (1 - \rho)(21\rho^2 - 22\rho + 21)k^2 - \right.$$

$$\left. - 32Wk(1 - \rho)[(1 - \rho) + k^2] + (1 - \rho)^2[6\rho^2 - 20\rho + 6] \right) / \Xi_1 \cdot \Xi_2;$$

$$\Omega_{32} = \frac{k^2}{\omega_0} \left([22 + 4\rho - 2\rho^2](1 - \rho)^2 + k^2[8W^2(5 + 3\rho) + (1 - \rho)(23 - 34\rho - 25\rho^2)] - \right.$$

$$\left. - 2k^4(-5 + 10\rho + 7\rho^2) + 2Wk[(1 - \rho)(-27 - 6\rho + 5\rho^2) + \right.$$

$$\left. + 8k^2(3 - \rho)^2] \right) / 8(1 + \rho)^2 \cdot \Xi_1;$$

$$\Omega_{33} = \omega_0 k \left(32W^2k^2 + 8(3 - \rho)(1 - \rho)^2 + \right.$$

$$\left. + k^2(1 - \rho)(-33 - 82\rho + 15\rho^2) + 2k^4(3 + 26\rho + 39\rho^2) + \right.$$

$$\left. + 8Wk[(-7 + \rho)(1 - \rho) + k^2(5 + 13\rho)] \right) / \Xi_1 \cdot \Xi_2;$$

$$\Omega_{34} = \frac{k^2}{\omega_0} \left([2 - 4\rho - 22\rho^2](1 - \rho)^2 + 8W^2k^2(1 + 3\rho) + 2k^4(7 + 10\rho - 5\rho^2) + \right.$$

$$\left. + k^2(1 - \rho)(25 + 34\rho - 23\rho^2) + 2Wk[(-9 - 18\rho + 7\rho^2)(1 - \rho) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +4k^2(-3-6\rho+\rho^2)]/8(1+\rho)^2 \cdot \Xi_1; \\
\Omega_{35} & = -\omega_0 k \cdot (32W^2 k^2 + 8\rho(3\rho-1)(1-\rho)^2 + \\
& +k^2(1-\rho)(15-82\rho-33\rho^2) + 2k^4(39+26\rho+3\rho^2) - \\
& -8Wk[(1-7\rho)(1-\rho) + k^2(13+5\rho)])/\Xi_1 \cdot \Xi_2; \\
\Omega_{36} & = -k^2(4k^2(2\rho-1) + 12Wk + (5\rho-7)(1-\rho))/4\Xi_1; \\
\Omega_{37} & = k^2(32W^2 k^2 + 8(3-\rho)(1-\rho)^2 + 2k^4(3+26\rho+39\rho^2) + \\
& +k^2(1-\rho)(-33-82\rho+15\rho^2) + 8Wk[(-7+\rho)(1-\rho) + \\
& +k^2(5+13\rho)])/\Xi_1 \cdot \Xi_2; \\
\delta & \equiv -k^3(16W^2 k^2 - 16Wk(1-\rho)[(1-\rho) + k^2] + 8(1-\rho)^2(1+\rho^2) + \\
& +k^2(1-\rho)(1-30\rho+\rho^2) + 2k^4(1-6\rho+\rho^2))/8(1+\rho)^2 \cdot \Xi_1; \\
\omega_0^2 & \equiv \left[\frac{k}{(1+\rho)}(k^2 - W \cdot k + (1-\rho)) \right]; \quad W = \varepsilon_* E_0^2 / 4\pi; \quad \rho = \rho_1 / \rho_2 < 1; \\
\Xi_1 & \equiv 2(1+\rho)[(1-\rho) - 2k^2]; \quad \Xi_2 \equiv 8(1+\rho)[(1-\rho) - 3k^2]. \tag{1}
\end{aligned}$$

Отметим, что характерным линейным масштабом обезразмеривания волнового числа и амплитуды волны является капиллярная постоянная нижней жидкости: $\alpha = \sqrt{\sigma/g\rho_2}$.

4. Анализ полученных результатов. Нижеследующий анализ ограничим выражением для профиля нелинейной волны $\xi(x, t)$, поскольку все выводы, которые будут сделаны для него, в качественном отношении сохранят силу и для потенциалов полей скоростей в верхней $\varphi_1(\vec{r}, t)$ и нижней $\varphi_2(\vec{r}, t)$ средах и потенциала электрического поля, так как математические особенности полученных аналитических выражений связаны с множителями Ξ_1 и Ξ_2 , стоящими в знаменателях нелинейных поправок.

4а. Нелинейные поправки к профилю волны. Прежде всего видно, что полученное выражение для профиля нелинейной волны в асимптотике $\rho_1 \rightarrow 0$ совпадает с выражением для профиля нелинейной капиллярно-гравитационной волны на однородно заряженной свободной поверхности идеальной электропроводной жидкости [10–11], что косвенно свидетельствует о правильности проведенных выкладок.

Из (1) также видно, что все нелинейные поправки носят резонансный характер: при $k = k_1 = \sqrt{(1-\rho)}/\sqrt{2}$ обращается в нуль множитель Ξ_1 в знаменателе амплитудного коэффициента поправки второго порядка малости Ω_{21} , а при $k = k_1 = \sqrt{(1-\rho)}/\sqrt{2}$ и $k = k_2 = \sqrt{(1-\rho)}/\sqrt{3}$ обращаются в нуль оба множителя Ξ_1 и Ξ_2 в знаменателе амплитудного коэффициента поправки третьего порядка малости Ω_{31} . Это обстоятельство в теории нелинейных волн [12–14] трактуется как наличие резонансного взаимодействия для пары волн, например для Ω_{21} и первого из резонансов Ω_{31} взаимодействуют волны с волновыми числами k_1 и $k_{1r} = \sqrt{2(1-\rho)}$, для которых выполняются соотношения [15]:

$$2k_1 = k_{1r}; \quad 2 \cdot \omega(k_1) = \omega(k_{1r}),$$

определяющие наличие взаимодействия. При этом энергия переходит от длинных волн с волновыми числами $k = k_1$ к более коротким с волновыми числами $k_{1r} = 2k_1$. Из аналитического выражения для Ω_{31} видно, что аналогичным будет и направление перекачки энергии в окрестности резонанса $k = k_2$: энергия будет перекачиваться от длинных волн с волновыми числами $k = k_2$ к волнам с $k = 3k_2$, но сам эффект будет иметь более высокий порядок малости.

На рис. 1, где приведены графики зависимости амплитудных множителей нелинейных поправок Ω_{21} и Ω_{31} при фиксированных значениях волнового числа от отношения плотностей ρ и параметра Тонкса-Френкеля W , характеризующего устойчивость заряженной поверхности жидкости, положения резонансов обозначаются как разрывы непрерывности гладких поверхностей. Видно, что величина и знак амплитудных коэффициентов Ω_{21} и Ω_{31} в пространстве физических параметров ρ , W изменяются весьма своеобразно.

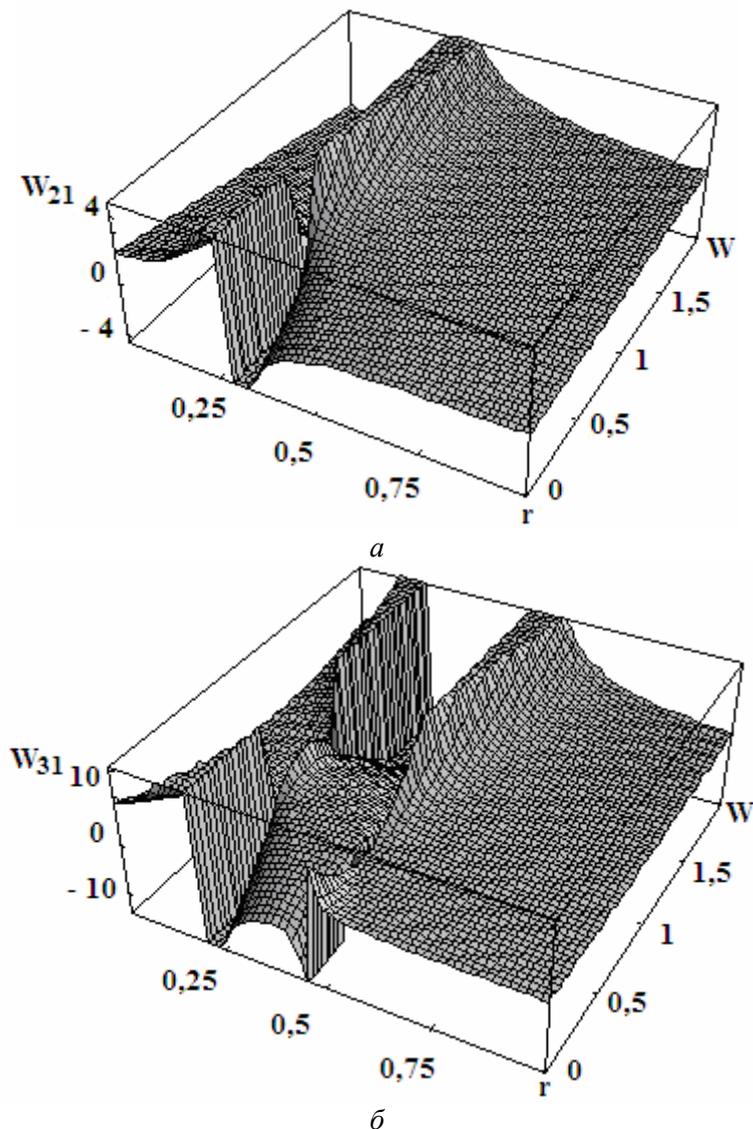


Рис. 1. Зависимость амплитудного множителя Ω_{21} от ρ и W : а) при $k = 0,6$, б) $k = 0,52$

Согласно сказанному, амплитудные множители Ω_{21} и Ω_{31} имеют резонансный вид: при $k = k_1$ и $k = k_2$ их знаменатели обращаются в нуль, а сами добавки стремятся к бесконечности. Однако при определенных соотношениях физических параметров Ω_{21} и Ω_{31} могут остаться конечными даже при равном нулю знаменателе. Например, знаменатель Ω_{21} обращается в нуль при $k = k_1$, но если одновременно совершить предельный переход $W \rightarrow W_{21}^* = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot (1-\rho)^{3/2}$, то числитель Ω_{21} также будет стремиться к нулю. В итоге в пределе $W \rightarrow W_{21}^*$ для величины Ω_{21} получается неопределенность типа $0/0$, которая после раскрытия дает $\Omega_{21}^* = (1-\rho)/8(1+\rho)$. Сама зависимость $\Omega_{21} = \Omega_{21}(k)$ становится непрерывной: она обозначена штриховой линией на рис. 2, где показаны зависимости безразмерного множителя $\Omega_{21} = \Omega_{21}(k)$ от волнового числа k при различных значениях

W . Видно, что физически достоверные части зависимостей $\Omega_{21} = \Omega_{21}(k)$ в пределе $W \rightarrow W_{21}^*$ стремятся к зависимости $\Omega_{21} = \Omega_{21}^*(k)$. Значение W^* необходимо принять за критерий разделения волновых движений. При переходе величины параметра Тонкса-Френкеля W через значение $W = W_{21}^*$ знак амплитудного множителя Ω_{21} меняется на противоположный.

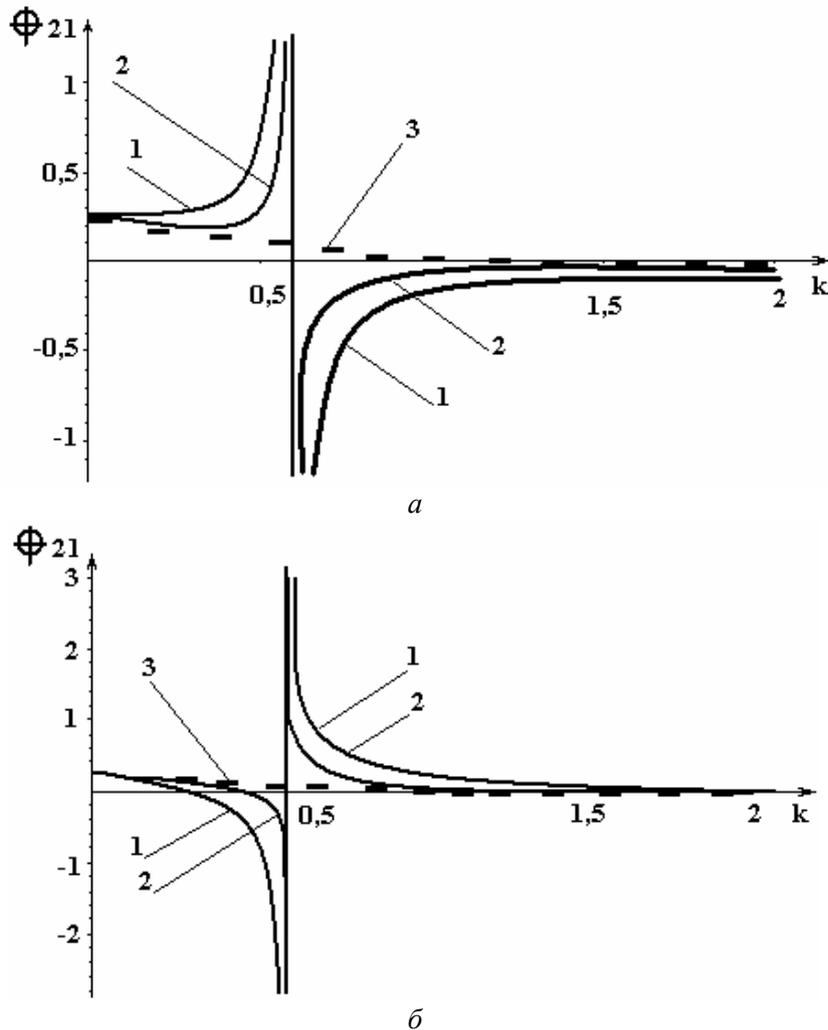


Рис. 2. Зависимость амплитудного множителя Ω_{21} от величины k при фиксированном значении $\rho = 0,3$ и различных W : а) 1 – при $W = 0,3$; 2 – при $W = 0,5$; 3 – при $W = W_{21}^* = 0,62$ (штрих). б) 1 – при $W = 1$; 2 – при $W = 0,8$; 3 – при $W = W_{21}^* = 0,62$ (штрих)

Из анализа аналитического выражения коэффициента Ω_{31} видно, что в окрестности обоих резонансов при определенных соотношениях физических параметров, так же как и Ω_{21} , коэффициент Ω_{31} может остаться конечным даже при равном нулю знаменателе. Согласно сказанному выше, в окрестности первого резонанса знаменатель Ω_{31} обращается в нуль при $k = k_1 = (\sqrt{2})^{-1} \cdot \sqrt{(1-\rho)}$, но если одновременно совершить предельный переход $W \rightarrow W_{311}^* \equiv W_{21}^* = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot (1-\rho)^{3/2}$, то числитель

Ω_{31} также будет стремиться к нулю. В итоге при $W \rightarrow W_{311}^*$ для величины Ω_{31} в положении резонанса получается неопределенность типа $0/0$, которая после раскрытия дает конечное значение $\Omega_{311} = 3(1-\rho)/32$, положительное при любых допустимых значениях ρ и не зависящее от k и W . В окрестности второго резонанса знаменатель Ω_{31} обращается в нуль при $k = k_2 = (\sqrt{3})^{-1} \cdot \sqrt{(1-\rho)}$, но если одновременно совершить предельный переход

$$W \rightarrow W_{312}^* = \sqrt{3(1-\rho)} \cdot \{16(1-\rho) + \sqrt{10} \cdot (1+\rho)\} / 24,$$

то числитель Ω_{31} также будет стремиться к нулю. В итоге при $W \rightarrow W_{312}^*$ для величины Ω_{31} в положении резонанса получается неопределенность типа 0/0, раскрыв которую найдем $\Omega_{312} = -(1-\rho)\{\sqrt{10} \cdot \frac{(1-\rho)}{(1+\rho)} + 4\}/36$, отрицательное при любых значениях ρ и не зависящее от k и W .

4б. Нелинейные поправки к частотам волн. В анализируемой нелинейной волне частота изначально возбужденной волны с учетом нелинейной поправки, возникающей за счет нелинейного взаимодействия волн, согласно (1) определяется соотношением

$$\begin{aligned} \omega(k, \rho, W, a) &\equiv \omega_0(k, \rho, W) - 2a^2 \cdot (\delta(k, \rho, W)/\omega_0(k, \rho, W)) \equiv \\ &\equiv \omega_0 - 2a^2 \left\{ -k^3 (16W^2k^2 - 16Wk(1-\rho)[(1-\rho) + k^2] + 8(1-\rho)^2(1+\rho^2) + \right. \\ &\quad \left. + k^2(1-\rho)(1-30\rho + \rho^2) + 2k^4(1-6\rho + \rho^2)) \right\} / 16\omega_0 \cdot (1+\rho)^3 [(1-\rho) - 2k^2]; \\ \omega_0(k, \rho, W) &\equiv \sqrt{\frac{k}{(1+\rho)}} (k^2 - W \cdot k + (1-\rho)). \end{aligned} \quad (2)$$

Видно, что амплитудный коэффициент δ нелинейной поправки к частоте волны, так же как и прочие нелинейные поправки, носит резонансный характер. Положение резонанса в амплитудном множителе δ нелинейной поправки к частоте при докритических в смысле реализации неустойчивости Тонкса-Френкеля значениях параметра W (где $\omega_0^2 \neq 0$) определяется условием обращения в нуль множителя Ξ_1 в знаменателе δ . Следовательно, резонанс реализуется при

$$k = k_1 = (\sqrt{2})^{-1} \cdot \sqrt{(1-\rho)}. \quad \text{Если} \quad W \rightarrow W_\delta^* \equiv W_{21}^* \equiv W_{311}^* = \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot (1-\rho)^{3/2}, \quad \text{для} \quad \text{величины}$$

амплитудного коэффициента δ при нелинейной поправке к частоте в положении резонанса получается неопределенность типа 0/0, которая по раскрытию дает конечное значение $\delta/\omega_0 = -9\sqrt{2} \cdot (1-\rho)^{5/2} / 128(1+\rho)$, отрицательное при любых значениях ρ и не зависящее от k и W .

На рис. 3 приведены зависимости амплитудного коэффициента δ при нелинейной поправке к частоте от волнового числа и отношения плотностей сред, рассчитанные при различных значениях параметра Тонкса-Френкеля W . Видно, что при малых значениях W коэффициент δ на большей части плоскости значений параметров k, ρ отрицателен, а положительные значения принимает в окрестности положений резонанса. С ростом W коэффициент δ становится положительным правее положения резонанса.

На рис. 4 приведена зависимость амплитудного коэффициента δ от волнового числа k , рассчитанная при $W = 0$. Несложно видеть, что левее положения резонанса (разрыва непрерывности приведенной кривой) коэффициент δ отрицателен, а правее – положителен.

На рис. 5 приведены зависимости амплитудного коэффициента δ от W и ρ при $k = 1,01$, то есть соответствующем положению минимума зависимости $\delta = \delta(k)$, приведенной на рис. 4, и при $k = 0,735$, то есть взятом немного правее разрыва на рис. 4. Нетрудно заметить, что в обоих случаях максимальное отрицательное значение амплитудный коэффициент δ принимает при $W \approx 1$.

Из рис. 3 и 5 также видно, что $\delta > 0$ при больших значениях ρ , а это указывает на стабилизирующую роль давления верхней жидкости на поверхность границы раздела сред.

4в. Нелинейная поправка к фазовой скорости волны. Как известно, фазовая скорость волны V_{ph} определяется как отношение частоты волны $\omega(k)$ к ее волновому числу k : $V_{ph} \equiv \omega(k)/k$.

Используя выражение (2), фазовую скорость волны с частотой $\omega(k)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} V_{ph} &\equiv \frac{\omega(k, \rho, W, a)}{k} \equiv \frac{\omega_0 - 2a^2 \cdot (\delta/\omega_0)}{k} \equiv \frac{\omega_0}{k} - 2a^2 \frac{\delta}{k\omega_0} \equiv \frac{\omega_0}{k} \left(1 - 2a^2 \frac{\delta}{\omega_0^2} \right) \equiv \\ &\equiv V_{ph}^{(0)} \left(1 - 2a^2 \frac{\delta}{\omega_0^2} \right) \equiv V_{ph}^{(0)} (1 - \chi); \\ V_{ph}^{(0)}(k, \rho, W) &\equiv \frac{\omega_0(k, \rho, W)}{k}; \quad \chi(k, \rho, W, a) \equiv 2a^2 \frac{\delta(k, \rho, W)}{\omega_0^2(k, \rho, W)}. \end{aligned}$$

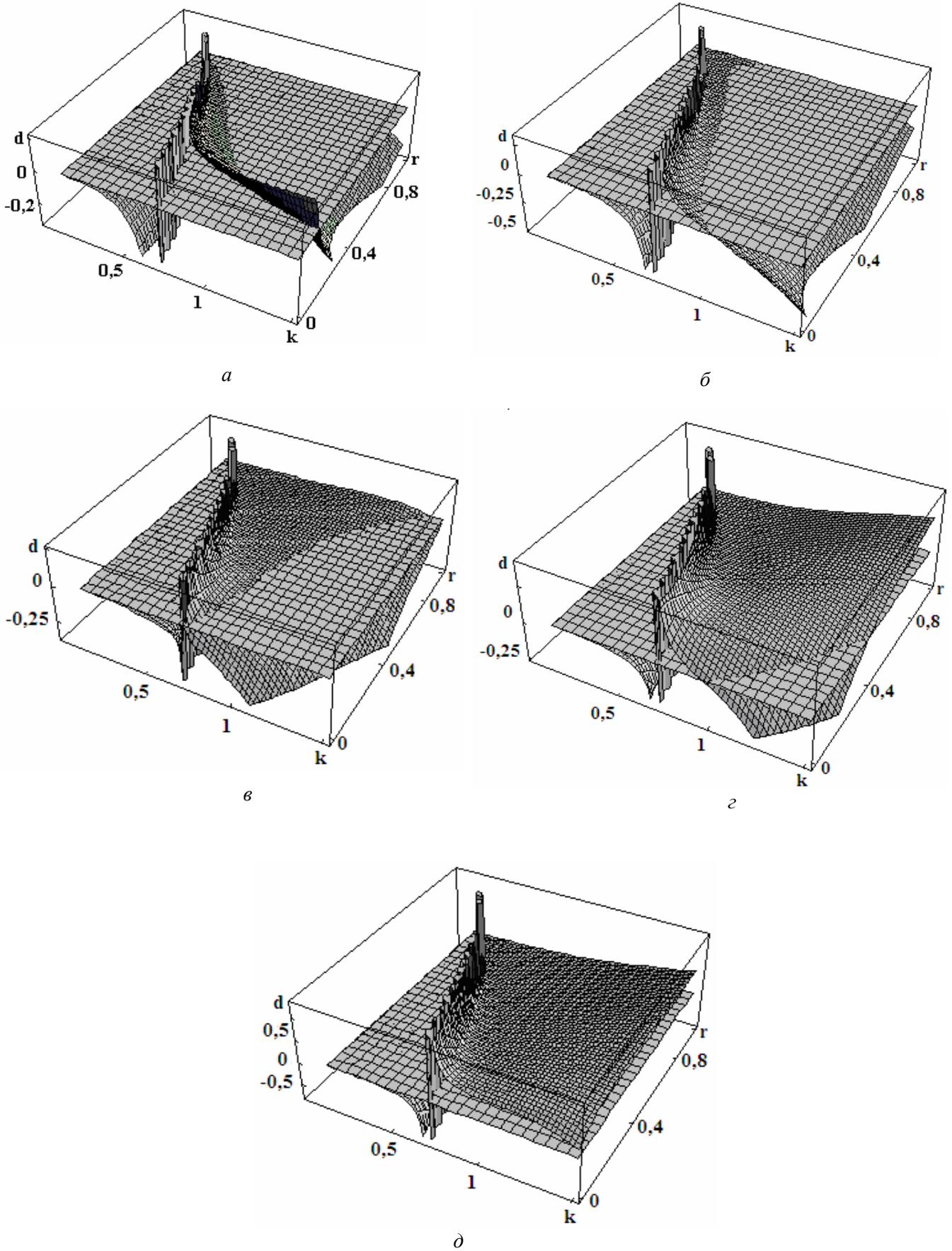


Рис. 3. Зависимость коэффициента δ от k и отношения ρ при фиксированных значениях параметра W : а) $W=0$; б) $W=0,4$; в) $W=1$; з) $W=1,5$; д) $W=1,9$

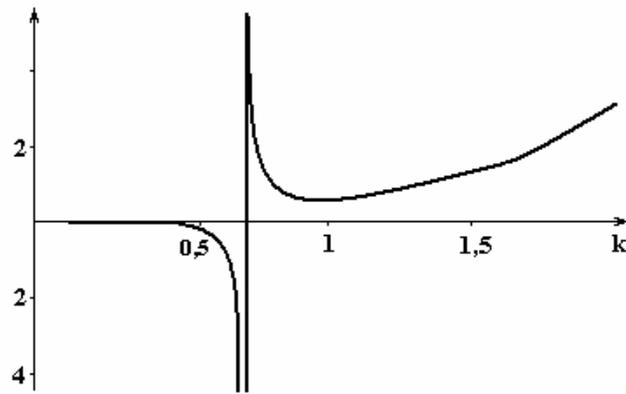


Рис. 4. Зависимость δ от k при фиксированном значении $W = 0$ и $\rho = 0$

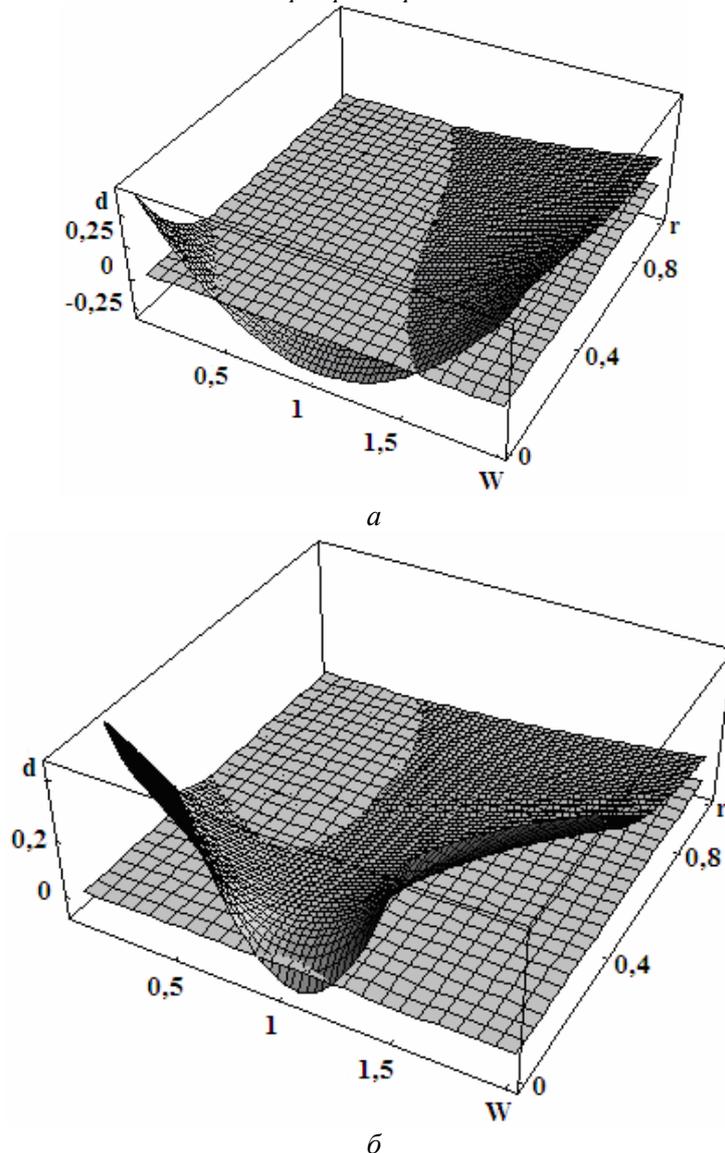


Рис. 5. Зависимость δ от параметра W и ρ при фиксированном значении безразмерного волнового числа: а) в положении минимума на рис. 4: $k = 1,01$; б) $k = 0,735$

Коэффициент $\chi(k, \rho, W, a) \ll 1$, величина и знак которого будут зависеть от физических параметров задачи, в том числе и от волнового числа k , различен для отдельных гармоник полной нелинейной волны (1) ($\chi(k) \neq \chi(2k) \neq \chi(3k)$) уже хотя бы потому, что согласно рис. 3 и 5 величина и знак δ довольно сложным образом изменяются при изменении k . Следовательно, форма волны, определенная (1), будет изменяться со временем – различные гармоники будут расходиться в пространстве с характерными относительными скоростями:

$$\chi(k) \pm \chi(2k); \quad \chi(k) \pm \chi(3k); \quad \chi(2k) \pm \chi(3k).$$

4г. Нелинейная поправка к критическому значению параметра Тонкса-Френкеля. Знак нелинейной поправки к частоте определяет влияние нелинейного взаимодействия на устойчивость границы раздела сред по отношению к распределенному на ней электрическому заряду. Устойчивость границы нарушается, когда квадрат частоты проходит через нуль в область отрицательных значений: $\omega^2 \leq 0$, где $\omega^2 \equiv [\omega_0 - (\delta \cdot \omega_0^{-1}) \cdot a^2]^2$.

В используемом четвертом по амплитуде волны порядке малости это условие запишется так:

$$\omega^2(k, \rho, W, a) = [\omega_0(k, \rho, W) - \frac{\delta(k, \rho, W)}{\omega_0(k, \rho, W)} \cdot a^2]^2 \cong \omega_0^2(k, \rho, W) - 2\delta(k, \rho, W) \cdot a^2 \leq 0. \quad (3)$$

Выписанное условие означает, что нелинейное взаимодействие волн при $\delta < 0$ приводит к снижению критических условий (критического значения W) реализации неустойчивости, пропорциональному квадрату амплитуды волны, а при $\delta > 0$ – к увеличению.

Чтобы разрешить соотношение (3) относительно параметра Тонкса-Френкеля W , который характеризует устойчивость плоской однородно заряженной поверхности электропроводной жидкости по отношению к поверхностному заряду, существуют два подхода. В первом подходе с учетом реальной зависимости нелинейной поправки δ от W приходим к сингулярному при $\varepsilon \rightarrow 0$ алгебраическому уравнению относительно W , содержащему малый параметр a^2 при старшей степени W , решение которого, хотя и не представляет особых трудностей, достаточно громоздко. На втором пути, чтобы избежать сингулярности, учтем, что в линейном приближении критическое значение W связано с волновым числом соотношением

$$W_0 = k + \frac{1}{k}, \quad (4)$$

которое легко получается из условия (3) при $a = 0$, то есть из уравнения $\omega_0^2 = 0$. Учтем также, что нелинейное по малой амплитуде a слагаемое в (3) дает лишь малую поправку, и перепишем (3) в виде

$$\omega_0^2(k, \rho, W) - 2\delta(k, \rho, W_0) \cdot a^2 \leq 0,$$

откуда с учетом (4) легко получается единственное имеющее физический смысл решение:

$$W_{cr} = W_0 - a^2 \cdot \frac{2\delta(k, \rho, W_0)}{k^2} \cong k + \frac{1}{k} - a^2 \cdot \frac{2\delta(k, \rho, (k + \frac{1}{k}))}{k^2}. \quad (5)$$

Из (5) видно, что знак коэффициента δ в нелинейной поправке определяет характер влияния нелинейного взаимодействия волн на критическое значение параметра Тонкса-Френкеля W : при $\delta > 0$ критическое значение параметра W уменьшается, а при $\delta < 0$ – увеличивается. Рассматривая (5) как функцию от волнового числа k , несложно найти значение $k = k_{cr}$, при котором W минимально. Несложные расчеты, легко выполняемые в любом пакете аналитических компьютерных вычислений, показывают, что $k_{cr} = 1 - \alpha(\rho) \cdot a^2$, где коэффициент $\alpha(\rho)$ зависит от ρ , по абсолютной величине ~ 1 (при $\rho = 0$ этот коэффициент равен $23/16$, а при $\rho = 0,5 \approx 0,74$).

Несложно также видеть, что при приближении W к своему критическому значению W_{cr} величина нелинейной поправки к фазовой скорости растет, поскольку $\omega_0^2 \rightarrow 2\delta(k, \rho, W_0) \cdot a^2$, а полная фазовая скорость волны стремится к нулю. Этот вывод подтверждается работой [16], в которой наблюдалось образование на сильно заряженной поверхности водяной пленки на поверхности ледяной подложки волнового пакета в виде солитонообразного выступа, который двигался в направлении усиления неоднородного электростатического поля, но останавливался в момент начала реализации неустойчивости (когда из его вершины начиналась эмиссия заряженных высокодисперсных капелек).

5. Заключение. Найденные в аналитических асимптотических расчетах четвертого порядка малости нелинейные поправки к частотам волн имеют резонансный вид и приводят к появлению различий в их фазовых скоростях различных порядков малости к профилю волны конечной

амплитуды и расплыванию формы нелинейной волны. Нелинейная поправка к частоте волны, зависящая от квадрата амплитуды, приводит к возникновению нелинейной поправки к критическим условиям реализации неустойчивости границы раздела сред по отношению к поверхностному заряду, величины и знак которой зависят от физических параметров задачи.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №05-08-01147-а и №06-01-00066-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Курочкина С.А., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Об устойчивости волновых течений в тонких слоях жидкости с заряженной свободной поверхностью. Часть 1. Волны малой амплитуды (Обзор) // Электронная обработка материалов. 2003. № 3. С. 26–36.
2. Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Нелинейные капиллярно-гравитационные волны на заряженной поверхности идеальной жидкости // Электронная обработка материалов. 2003. № 6. С. 55–59.
3. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Курочкина С.А., Санасарян С.А. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости // Электронная обработка материалов. 2004. № 2. С. 27–31.
4. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В. О форме «конуса Тэйлора» и характерном времени его роста // Электронная обработка материалов. 2004. № 4. С. 34–40.
5. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Климов А.В., Ширяева С.О., Курочкина С.А. Об устойчивости волновых течений в тонких слоях жидкости с заряженной свободной поверхностью. Часть 2. Периодические волны конечной амплитуды в вязкой жидкости (Обзор) // Электронная обработка материалов. 2004. № 4. С. 66–78.
6. Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Санасарян С.А. Нелинейные капиллярно-гравитационные волны на поверхности слоя вязкой жидкости // Электронная обработка материалов. 2005. № 5. С. 24–34.
7. Курочкина С.А., Григорьев А.И., Санасарян С.А. Нелинейные поправки к форме и частоте волн на заряженной поверхности слоя идеальной жидкости // Электронная обработка материалов. 2005. № 5. С. 34–42.
8. Найфе А.Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
9. Nayfeh A.H. The method of multiple scale and non-linear dispersive waves // J. Fluid Mech. 1971. V.48. Pt.3. P.463–475.
10. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. О нелинейных капиллярно-гравитационных волнах на заряженной поверхности идеальной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2003. № 6. С. 102–109.
11. Климов А. В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. Нелинейные периодические волны на заряженной свободной поверхности идеальной жидкости // ЖТФ. 2004. Т.74. Вып.1. С. 32–39.
12. Bretherton F.P. Resonant interaction between waves. The case of discrete oscillations // J. Fluid Mech. 1964. V.20. Pt.3. P. 457–479.
13. McGoldrick L.F. Resonant interactions among capillary-gravity waves // J. Fluid Mech. 1965. V. 21. Pt.2. P. 305–331.11.
14. Nayfeh A.H. Third-harmonic resonance in the interaction of capillary and gravity waves // J. Fluid Mech. 1971. V.48. Pt.2. P. 385–395.
15. Филлнс М.О. Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 197–220.
16. Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. Ball lightning and St. Elmo's fire as forms of thunderstorm activity // J. Sci. Expl. 1991. V. 5. № 2. P. 163–190.

Поступила 27.04.06

Summary

In analytical asymptotical calculations forth power of smallness are calculated the nonlinear corrections to wave frequencies which are causes to change in wave phase velocity values and critical condition of Tonks-Frenkel instability realizations.