

А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Н.В. Воронина, Е.В. Егорова

ОБ ОСЦИЛЛЯЦИЯХ И СПОНТАННОМ РАСПАДЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЖИДКИХ СТРУЙ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

1. Диспергирование жидкости. Явлению неустойчивости заряженной поверхности жидкости и ее электродиспергированию посвящено большое количество публикаций в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями, например обзоры [1–12], в которых проанализировано состояние исследований в различных сферах использования обсуждаемого явления. Следует обратить внимание на широкое практическое использование феномена при получении порошков тугоплавких металлов, в химической технологии при распылении ядохимикатов и лакокрасочных материалов, горючего в реактивных двигателях в реактивной космической технике, электрокапельструйной печати, также связано с разработкой новых средств масс-спектрометрического анализа нелетучих и термически нестабильных жидкостей.

Несмотря на обилие теоретических и экспериментальных работ по изучению неустойчивости движущейся струи жидкости и дробления ее на отдельные капли, многое в физике происходящих процессов остается до сих пор невыясненным и по-прежнему привлекает внимание исследователей. Сказанное, в частности, относится к анализу устойчивости неосесимметричных мод осцилляций струи, и связано это с тем, что большая часть проведенных к настоящему времени исследований была направлена на получение потоков монодисперсных капель [9, 13–16]. Тем не менее феномен распада на капли неосесимметричных струй, выбрасываемых с вершин свободно падающих капель [17] и менисков жидкости на торцах капилляров [18–22], при реализации их неустойчивости по отношению к поверхностному заряду, давно известен. И только в последние годы было выполнено несколько работ по исследованию в линейном приближении устойчивости заряженных струй относительно произвольных неосесимметричных возмущений [23–25].

Наиболее интересные работы, выполненные в последнее время, ориентированы на исследование нелинейных эффектов, связанных с осцилляциями струй и дроблением их на капли (см., например, [26–41] и указанную там литературу). Однако лишь пять последних из перечисленных работ относятся к нелинейным осцилляциям заряженной струи, остальные рассматривают нелинейные проблемы осцилляций и дробления незаряженных струй, что тем не менее важно, поскольку многие проблемы нелинейной устойчивости заряженных и незаряженных струй одинаковы, и пока в этом вопросе исследователи находятся на стадии накопления экспериментальных и теоретических данных.

2. Линейная устойчивость цилиндрической струи. Впервые задача теоретического аналитического исследования устойчивости бесконечного цилиндрического столба жидкости под действием капиллярных сил была решена Рэлеем [42–43]. В своих работах он опирался на экспериментальные исследования Савара [44], в которых подробно изучена феноменология распадающейся струи, в частности показано, что длина не распадающейся части струи зависит от вида начального возмущения. Было установлено, что струя жидкости, подверженная синусоидальному осесимметричному возмущению с длиной волны, превышающей длину окружности, ограничивающей сечение струи, неустойчива по отношению к этому возмущению, сама же неустойчивость возникает в результате действия капиллярных сил, а виртуально возникшее возмущение нарастает с течением времени. Рэлей получил соотношение, связывающее скорость роста амплитуды волнового возмущения и его длину волны. Как оказалось, время от момента возникновения возмущения до момента распада

струи на капли, вычисленное при помощи линейной теории, неплохо согласовывалось с результатами опытов [42–46]. В рамках линейного по амплитуде возмущения теоретического анализа удалось выяснить, что коротковолновые возмущения ($kR \gg 1$) на струе жидкости устойчивы и могут распространяться вдоль струи в виде капиллярных волн. Однако они быстро затухают под действием имеющейся в реальных условиях вязкости жидкости [45]. Длинноволновые же возмущения ($kR < 1$) неустойчивы, и при всех длинах волн, удовлетворяющих условию $kR < 1$, реализуется капиллярная неустойчивость струи, сопровождающаяся разбиением последней на капли. Максимальным инкрементом обладают волны с длиной $\lambda_{\max} \approx 9R$ ($k_{\max} \approx 0,7/R$). Величина инкремента неустойчивости при этом равна $\alpha_{\max} = 0,97(\sigma/8\rho R^3)^{1/2}$. В итоге характерный размер капель, на которые распадается струя, определяется соотношением $D_* = 1,145D^{2/3}\lambda_{\max}^{1/3}$. Подход Рэлея был распространен на случай вязкой жидкости в работах [45]. Выяснилось, что вязкость оказывает стабилизирующее действие на распад струи, а вязкая диссипация внутри струи и вязкое трение на ее поверхности при истечении из насадка генератора приводят к изменению профиля скорости и возрастанию времени релаксации. Указанные явления совместно с более низким значением коэффициента поверхностного натяжения существенно увеличивают длину нераспавшейся части.

Рассмотренная картина развития капиллярной неустойчивости, основанная на линейной теории осцилляций и распада струи, несмотря на успешное объяснение многих экспериментальных фактов, не является исчерпывающей и должна быть обобщена с учетом внутренних течений в струе, эффектов релаксации вязкости, заряда и коэффициента поверхностного натяжения, а также с учетом реальной нелинейности феномена. Кроме того, среди необходимых обобщений следует указать и на полуограниченность реальных струй [37, 47–52]. Для истолкования расхождений теории и экспериментальных данных было предложено несколько гипотез: динамическое воздействие окружающего воздуха на осесимметричные возмущения струи, увеличивающие давление в сужениях и уменьшение – на выпуклостях струи, что приводит к более быстрому росту возмущений [45–46, 53]; влияние вязкости окружающего воздуха [54]; изменение механизма распада струи – переход от осесимметричных возмущений к изгибным (изгибается ось струи) [55–56]; переход к турбулентному режиму течения в струе [57–58]; влияние релаксации начального профиля скорости в струе [5].

Но наиболее важным в контексте данного обзора является исследование устойчивости струй по отношению к собственному или индуцированному электрическим зарядам, проведенное экспериментальными и теоретическими средствами в [18–19, 59–72].

3. Заряженные струи. Еще на заре исследования электрических явлений Вильям Гилберт заметил, что капля воды на сухой подложке приобретает коническую (вершиной вверх) форму, если над ней на небольшом расстоянии поместить наэлектризованный кусок янтаря [72]. Как было показано уже в наше время [73], при этом на свободной поверхности капельки появляется индуцированный электрический заряд и капля претерпевает неустойчивость: она деформируется к вытянутому сфероиду, на ее вершине формируется эмитирующий выступ, названный «конусом Тейлора», с вершины которого выбрасывается тоненькая струйка воды, распадающаяся на отдельные капельки. По видимому, первые наблюдения эмиссии струек жидкости, распадающихся на отдельные капельки, при электризации свободной поверхности жидкости связаны с работами одного из первых исследователей электрических явлений аббата Ж. Нолле в середине восемнадцатого века [74]: он заметил, что если человека поместить на изолирующую подставку и подвергнуть электризации (с помощью созданного О. Герике прообраза электрофорной машины), то из ранок и порезов на коже человека начинают бить очень тонкие струйки крови, распадающиеся на отдельные капли.

Систематические исследования феномена электризации менисков жидкости на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему, сопровождающегося выбросом заряженных струй, распадающихся на отдельные капли, начались лишь в начале двадцатого века и связаны с именем Дж. Зелени [75–77], который детально исследовал закономерности эмиссии капель и струй жидкости при электризации ее свободной поверхности. В связи с многообразием академических, технических и технологических приложений феномена электродиспергирования жидкости эксперименты с ним были продолжены [3, 17, 19, 21–22, 78–102]. При этом было обнаружено около десятка различных режимов электродиспергирования жидкости, приведенных в систему в работах [103–104]. Но для проводимого рассмотрения важно, что во всех этих работах имел место выброс с заряженной поверхности жидкости заряженных же струй последней, распадающихся на отдельные капли. Следует отметить, что в последние двадцать лет регулярно проводятся международные симпозиумы по электродиспергированию жидкости, собирающие сотни докладов, посвященных этому феномену. И

хотя подавляющее большинство докладываемых работ носят экспериментальный характер и посвящены в основном особенностям электродиспергирования конкретных жидкостей в конкретных установках и устройствах, тем не менее общее количество публикаций по обсуждаемой теме исчисляется тысячами, и насущной проблемой является построение общей теории электродиспергирования (дробления заряженной струи на капли) с учетом реальных физико-химических характеристик жидкостей и многообразия релаксационных эффектов.

В проведенных экспериментах выяснилось, что форма струй, выбрасываемых со свободной поверхности заряженных капель или наэлектризованных менисков жидкости на вершинах капилляров (по ним жидкость подается в разрядную систему), отличается от цилиндрической, для которой на сегодняшний день выполнены все известные теоретические исследования устойчивости и осцилляций струй как линейного, так и нелинейного приближения. Форма струй, выбрасываемых неустойчивыми каплями и менисками жидкости, неоднократно исследовалась теоретически с различной степенью строгости (см., например, [105–113] и указанную там литературу). Так, в частности, для объемно заряженной осесимметричной струи диэлектрической жидкости в [109] получена следующая зависимость радиуса струи от продольной координаты x :

$$r(x) = \sqrt{w} \sqrt{x} \cdot \sqrt{\sqrt{1 + \frac{1}{w^2 x}} - 1}; \quad w = \sqrt{\frac{1}{4q} + \frac{4}{Re}}; \quad q = \frac{\rho M^2}{2\pi^2 \gamma E a^5},$$

где Re – число Рейнольдса; ρ – массовая плотность жидкости; γ – объемная плотность электрического заряда; M – объемный расход жидкости; E – напряженность внешнего электростатического поля, параллельного оси симметрии струи; a – начальный радиус. Качественно сходные закономерности изменения радиуса струи по мере удаления ее от места образования наблюдаются и для электропроводных жидкостей. В [114] для объемно заряженной струи диэлектрической жидкости (жидкого водорода) исследовалось влияние объемного заряда струи конечной длины на скорость движения ее торца.

Кроме сказанного выше, в перечисленных экспериментах выяснилось, что: длина утоньшающейся с удалением от торца капилляра нераспавшейся части струи является функцией величины заряда, приходящегося на единицу длины струи. Свободный же (незакрепленный) конец струи, вытекающей из сопла, с ростом величины заряда на единицу длины струи начинает совершать хлыстообразное движение, а с его торца отрываются дочерние капельки. Хлыстообразное движение свободного конца струи указывает как на реализацию изгибной неустойчивости струи, так и на ее неустойчивость по отношению к вращению относительно исходной оси симметрии. Вращение относительно оси симметрии струи, эмитированной неустойчивой заряженной поверхностью жидкости, проще всего объясняется одновременным возбуждением двух или нескольких одинаковых мод при наличии между ними сдвига по фазе. Отметим, что в отличие от прагматически обусловленного вынужденного капиллярного распада струй [9] с контролируемыми граничными и начальными условиями обсуждаемая в контексте проводимого исследования спонтанная неустойчивость струй (с последующим распадом на капли) характеризуется полной свободой в задании начальных и граничных условий и ничто не препятствует возбуждению на торце капилляра нескольких одинаковых мод с различными начальными фазами. Изгибная же неустойчивость струй нуждается в отдельном исследовании.

В связи со сказанным теоретическое и экспериментальное исследования закономерностей распада заряженных струй на капли представляют значительный интерес (особенно если принять во внимание многообразные приложения феномена в практике) и неоднократно проводились на разном уровне строгости и общности [115–136].

Первым устойчивою поверхностью однородно заряженного столба идеальной жидкости по отношению к осесимметричным осцилляциям исследовал Рэлей [42], получивший дисперсионное уравнение для случая длинных волн (когда длина волны много больше радиуса столба жидкости) в виде

$$\omega^2 = \frac{n(n-1)\sigma}{\rho a^3} \left\{ (n+1) - \frac{2Q^2}{\pi\sigma a} \right\},$$

где Q – заряд столба, приходящийся на единицу длины; σ – коэффициент поверхностного натяжения; a – радиус; ω – частота осцилляций; ρ – плотность жидкости; n – номер моды.

Через несколько лет А.В. Бассетт, исследуя варикозную неустойчивость заряженной струи, имеющей форму $r = a + \zeta \cdot \cos(kx) \cdot \exp(i\omega t)$, вывел дисперсионное уравнение для осцилляций основной моды поверхностью заряженной струи маловязкой жидкости с произвольной длиной волны (с волновым числом k) в виде

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho a^3} \frac{ka \cdot I_1(ka)}{I_0(ka)} \{(1 - k^2 a^2) - \frac{Q^2}{4\pi\sigma a} [1 + \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)}]\}.$$

Бассет указал, что наличие заряда на струе приводит к ее стабилизации. В соответствии с анализом Рэля на незаряженной струе неустойчивы волны с волновыми числами $k > a^{-1}$. Согласно же результатам Бассета на заряженной струе неустойчивы волны с меньшими волновыми числами $k^2 a^2 \geq \{1 - \frac{Q^2}{4\pi\sigma a} [1 + \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)}]\}$ или с большими длинами волн. Выяснилось, что длина нераспадающейся части струи за срезом сопла, из которого она вытекает, с ростом поверхностной плотности заряда увеличивается.

Тейлор [72] исправил численный коэффициент в выражении, полученном Бассетом, записав дисперсионное уравнение в виде:

$$\omega^2 = \frac{\sigma}{\rho a^3} \frac{ka \cdot I_1(ka)}{I_0(ka)} \{(1 - k^2 a^2) - \frac{Q^2}{\pi\sigma a} [1 + \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)}]\}.$$

Тейлор же в [72] исследовал изгибную неустойчивость струи, отталкиваясь от известного по экспериментальным исследованиям факта, что при достаточно большой плотности заряда на струе ее конец начинает совершать хлыстообразное движение, распадаясь при этом на отдельные капельки. Тейлор выписал форму струи в виде $r = a + \zeta \cdot \cos(kx) \cdot \cos(\varphi) \cdot \exp(i\omega t)$, где φ – азимутальный угол, и получил дисперсионное уравнение для изгибной неустойчивости струи:

$$\omega^2 = -\frac{\sigma}{\rho a^3} \frac{I_1'(ka)}{I_1(ka)} \{k^2 a^2 + \frac{Q^2}{\pi\sigma a} [1 + \frac{K_1'(ka)}{K_1(ka)}]\}.$$

Условие нейтрального равновесия струи по отношению к изгибной неустойчивости отсюда получается в виде

$$\frac{Q^2}{\pi\sigma a} = \frac{ka \cdot K_1(ka)}{K_0(ka)}.$$

В работе [69] исследовано влияние вязкости и электрического поля на характер устойчивости капиллярных струй, рассмотрены неосесимметричные возмущения струи, сделана попытка прояснить непонятные моменты (в которых имеет место рассогласование теории и эксперимента) линейной теории. Описаны два вида неустойчивостей, вызываемых поверхностным натяжением и силой Кулона. Полученное дисперсионное уравнение и выражение для скорости распада струи проанализированы в предельных случаях малой и большой вязкости и численно изучены в промежуточной области. Кроме того, в [69] описаны новые типы мод, которые приводят к вращательному движению струи.

Экспериментальные исследования электродиспергирования жидкости с заряженной поверхности последней (см., например, [59, 60–62, 66–71, 114, 134–136]) свидетельствуют о возможности возбуждения неосесимметричных мод заряженных струй, но в теоретическом отношении этот вопрос исследован пока недостаточно полно, хотя из феноменологии [72, 74–102] с очевидностью следует, что реализация неустойчивости именно этих мод в существенной степени ответственна как за хлыстообразное движение струй, так и за полидисперсный характер их распада на капли. В [70] было приведено дисперсионное уравнение для неосесимметричных волн на заряженной поверхности струи, но без вывода и с ошибкой, поскольку слагаемое, содержащее поверхностный заряд, обращается в ноль для длинных осесимметричных волн, и получается, что наличие на струе электрического заряда не влияет на их устойчивость. В [118–120, 125] говорится о теоретическом исследовании устойчивости мод с $m=1$ и $m=2$. Мода с $m=2$ называется «Боровской» и согласно утверждению [118–120, 125] ее возбуждение приводит к продольному расщеплению струи на две дочерние струи, как это зафиксировано в экспериментах [128]. Такое утверждение повторяется в [111–113] и вызывает недоумение, поскольку продольное расщепление неосесимметричной струи, периодически изменяющей свою форму по азимутальному углу, должно проходить с нарушением начальной винтовой симметрии, и, следовательно, возможность ее реализации сомнительна.

Дисперсионные уравнения для различным образом заряженных струй электропроводных и диэлектрических жидкостей получались с различным успехом и с различными погрешностями в теоретических работах, выполненных в линейном приближении по амплитуде осцилляций [23–25, 42–46, 59–63, 115–127]. В теоретических работах [130–133] рассмотрены конкретные вопросы расчета характеристик струй, эмитируемых с конуса Тейлора.

Детальный теоретический анализ закономерностей осцилляций и величин инкрементов неустойчивости неосесимметричных мод заряженных электропроводных и диэлектрических струй проведен в [23–25] в связи с возможностью приложения результатов к истолкованию закономерностей спонтанного распада струй. Выяснилось, что инкременты неустойчивости неосесимметричных волн в маловязких струях электропроводных жидкостей при больших плотностях поверхностного заряда сравниваются с инкрементами неустойчивости осесимметричных волн, а в сильновязких струях существенно их превышают [23–24]. Это обстоятельство вместе с фактом утоньшения формы струи по мере удаления ее от места формирования позволяет предположить, что при спонтанном капиллярном распаде заряженных струй на капли важную роль в формировании спектра распределения последних по размерам должна играть неустойчивость неосесимметричных мод капиллярных осцилляций струи.

Для объемно заряженных струй диэлектрических жидкостей [25] величины инкрементов неустойчивости неосесимметричных мод снижаются при уменьшении диэлектрической проницаемости жидкости, причем этот эффект сказывается тем сильнее, чем меньше азимутальное число m (чем меньше степень несимметричности), и достигают минимума для осесимметричных мод. Это обстоятельство приводит к тому, что для диэлектрических жидкостей с малыми диэлектрическими проницаемостями инкременты неустойчивости неосесимметричных мод могут при прочих равных условиях превышать инкременты неустойчивости осесимметричных мод, что существенно скажется на закономерностях дробления струи на капли.

В работах [62, 114–120] предполагалось исследовать влияние эффекта релаксации электрического заряда (влияние конечности скорости выравнивания электрического потенциала струи или, иначе говоря, влияние конечности скорости переноса заряда в реальной жидкости) на струе на ее устойчивость, но во всех перечисленных работах неверно выписано уравнение баланса поверхностного заряда (отсутствует слагаемое, связанное с кривизной поверхности струи), и, следовательно, неверны и полученные результаты, на что и было указано в [129]. Только в последнее время авторами настоящей работы было получено корректное дисперсионное уравнение, учитывающее эффект релаксации заряда:

$$\begin{aligned}
& -2k^2 \cdot \left\{ \nu G_m(k) \left[w(1 + sM_{mk} - \alpha)(m^4 - l^4) + \nu 2s\alpha(m^4 + l^4) \right] + \right. \\
& + m^2 \left[\nu (fG_m(k) + 2w(k^2 - l^2)(1 - \alpha)) + s^2(wM_{mk} - \alpha\nu) + \right. \\
& + sw(1 - \alpha + 2\nu(k^2 - l^2)M_{mk}) + \nu s[(f - \alpha\beta)G_m(k)M_{mk} - \\
& \quad \left. \left. - \nu 2\alpha(G_m(k)(1 - 2l^2) + k^2 - l^2)] \right] \right\} + \\
& + l^2 G_m(l) \cdot \left\{ 2\nu \left[w(1 + sM_{mk} - \alpha)(m^4 - k^4) + 2\nu s\alpha(m^4 + k^4) \right] + \right. \\
& + \nu l^2 \left[fG_m(k)(1 + sM_{mk}) + s\alpha(s - G_m(k)(2\nu + \beta M_{mk})) \right] + \\
& + m^2 \left[-s\alpha w + (2\nu f + sw)(1 + sM_{mk}) + 2\nu s\alpha(s - \beta M_{mk} + \nu(l^2 - 2)) \right] + \\
& + k^2 \left[-\nu fG_m(k)(1 + sM_{mk}) - 4\nu wG_m(k)(1 - \alpha) + s^2(\nu\alpha - wM_{mk}) - \right. \\
& \left. - sw(1 - \alpha + 4\nu G_m(k)M_{mk}) + \nu s\alpha(\beta G_m(k)M_{mk} + 2\nu(l^2 + 3m^2 + 5G_m(k))) \right] \left. \right\} + \\
& + 2G_m^2(l) \cdot \left\{ 2\nu k^4 \left[w(1 + sM_{mk} - \alpha) - \nu s\alpha \right] - \nu l^2 \left[fG_m(k)(1 + sM_{mk}) + \right. \right. \\
& + s\alpha(s - G_m(k)(2\nu + \beta M_{mk})) + m^2(2\nu s\alpha + w(1 + sM_{mk} - \alpha)) \left. \right] + \\
& + k^2 \left[\nu fG_m(k)(1 + sM_{mk}) - \nu w m^2 G_m(k)(1 - \alpha) + s^2(\nu\alpha - wM_{mk}) + \right. \\
& \quad \left. + sw(1 - \alpha + \nu m^2 G_m(k)M_{mk}) - \right. \\
& \quad \left. \left. - \nu s\alpha(\beta G_m(k)M_{mk} + 2\nu[l^2 + (1 - m^2)G_m(k)] \right] \right\} = 0; \\
& \alpha = \alpha(s, \sigma, \varepsilon_d, w, m, k) \equiv \Lambda_{mk} M_{mk}; \quad \beta = \beta(w, m, k) \equiv k^2 + m^2 - 1 + w; \\
& f_{mk} = f_{mk}(s, \sigma, \varepsilon_d, w) = wH_m(k) + \alpha\beta; \quad l^2 \equiv k^2 + s/\nu; \\
& M_{mk} = M_{mk}(s, \sigma, \varepsilon_d, w) \equiv 2\sqrt{\pi w} \left[s - 2\sqrt{\pi w} G_m(k) (4\pi\sigma + \varepsilon_d s) \right]^{-1};
\end{aligned}$$

$$\Lambda_{mk} = \Lambda_{mk}(s, \sigma, \varepsilon_d, w) \equiv sH_m(k) - G_m(k)(4\pi\sigma + \varepsilon_d s); \quad w \equiv 4\pi\alpha_0^2;$$

$$G_m(x) \equiv xI_m'(x)/I_m(x); \quad H_m(x) \equiv xK_m'(x)/K_m(x).$$

k и m – волновое и азимутальное числа; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; R – радиус струи; ρ – массовая плотность; ν – коэффициент кинематической вязкости; γ – коэффициент поверхностного натяжения; σ – удельная электропроводность; ε_d – диэлектрическая проницаемость; α_0 – поверхностная плотность электрического заряда на струе.

Анализ дисперсионного уравнения показал, что влияние эффекта релаксации заряда заметно только в случае больших вязкостей жидкости. Движения жидкости, связанные с перераспределением заряда по поверхности струи при ее осцилляциях, имеют аperiодический (затухающий) характер и приводят к более быстрому рассеиванию механической энергии осцилляций или, иначе говоря, к более быстрому затуханию волн на струе. Обсуждаемый эффект зависит от волнового и азимутального чисел и по-разному проявляется для волн с различной степенью асимметрии и для жидкостей с различными физико-химическими свойствами и может способствовать умножению количества наблюдаемых режимов электродиспергирования.

3. Нелинейные осцилляции струй. Как отмечалось выше, большая часть теоретических нелинейных исследований осцилляций и устойчивости струй проведена для незаряженных струй. Кроме вышеупомянутой работы [37], выполненной численными методами, лишь в [71, 137] рассматривается неустойчивость заряженных струй идеальной жидкости, также выполненных численными методами.

Не будем останавливаться на обсуждении теоретических работ по нелинейным осцилляциям и дроблению струй, выполненных численными методами, обладающими стандартными ограничениями общности проведенных рассмотрений [33–37, 50–51, 71, 137]. Познакомиться с используемой регулярной процедурой аналитического асимптотического нелинейного анализа устойчивости заряженной струи можно на конкретном примере – на вполне корректных (содержащих детальный разбор процедуры аналитического счета) работах [38–39, 41], выполненных во втором порядке малости по отношению амплитуды осцилляций к радиусу струи. В этих работах выяснилось, что решение задачи о расчете нелинейных осцилляций заряженной струи уже во втором порядке малости по амплитуде деформации невозмущенной цилиндрической струи позволяет обнаружить вырожденное резонансное взаимодействие волны, определяющей начальную виртуальную одномодовую деформацию, с волной, появляющейся вследствие нелинейности уравнений гидродинамики и имеющей вдвое большее волновое число. Положение резонансных ситуаций зависит от величины волнового числа и поверхностной плотности электрического заряда на струе. В частности, осесимметричная мода может взаимодействовать с модой, ответственной за закручивание струи ($m=1$). При нелинейном резонансном взаимодействии волн на заряженной струе энергия всегда перекачивается от более длинных волн к более коротким, независимо от симметрии взаимодействующих волн. Из начально возбужденной моды с $m=1$ энергия может перекачиваться как в осесимметричную моду с вдвое большим волновым числом, так и в неосесимметричную с $m=2$ также с вдвое большим волновым числом. Вовлечение в нелинейное резонансное взаимодействие мод с $m \geq 2$ возможно лишь при значительных плотностях поверхностного заряда на струе. Последнее условие может выполняться для тонкого конца электропроводной струи, выброшенной заряженной поверхностью жидкости, имеющей постоянный потенциал поверхности и, следовательно, неоднородное распределение поверхностного заряда, плотность которого будет увеличиваться с утоньшением струи. В итоге закономерности перераспределения энергии нелинейной волны за счет нелинейного резонансного взаимодействия будут различны для начального и конечного участков струи, что в свою очередь приведет к различию условий дробления струи на разных ее участках. При многомодовой начальной деформации общие закономерности реализации нелинейного волнового движения на струе остаются прежними, но кроме вырожденных резонансов появляются и вторичные комбинационные. Энергия теперь переносится и от высоких мод к низким, и появляются условия для реализации распадной неустойчивости.

Отличительной особенностью аналитических асимптотических расчетов нелинейных осцилляций струи является их математическая громоздкость, примером чего может служить результат расчета формы образующей нелинейно-осциллирующей струи (когда начальная деформация равновесной цилиндрической формы задается в виде неосесимметричной моды), проведенного авторами настоящей статьи в третьем порядке малости:

$$r(\varphi, z, t) = 1 + \varepsilon \cdot \cos(m\varphi) \cos(\theta - \varepsilon^2 gt) -$$

$$\begin{aligned}
& -0,25 \cdot \varepsilon^2 [0,5 - (a_1 \cos(2m\varphi) + a_2) \cos(2\theta) - a_3 \cos(2m\varphi)] + \\
& + (\varepsilon^3/16) \{ [\alpha_1 \cos(3m\varphi) + \alpha_2 \cos(m\varphi)] \cos(3\theta) + \alpha_3 \cos(3m\varphi) \cos(\theta) \}; \\
& g \equiv \frac{G_m}{2\omega_m} \left\{ \left(\frac{\omega_m}{G_m} \Gamma + \Upsilon + \chi \cdot H_m \cdot \Lambda \right) + \left(\frac{\omega_m}{G_m} \Gamma_0 + \Upsilon_0 + \chi \cdot H_m \cdot \Lambda_0 \right) \right\}; \\
\Gamma &= b_1 \cdot I_{2m}(2k) (2k^2 + 2m^2 - G_{2m}(2k)) + a_1 \cdot \omega (k^2 + m^2 + G_m(k)) / G_m(k) + \\
& + \omega [k^2 + 7m^2 - (3k^2 + 3m^2 + 2)G_m(k)] / 2G_m(k); \\
\Gamma_0 &= 2b_2 \cdot I_0(2k) (2k^2 - G_0(2k)) + 2a_2 \cdot \omega (k^2 - m^2 + G_m(k)) / G_m(k) + \\
& + \omega [k^2 - m^2 - (3k^2 - m^2 + 2)G_m(k)] / G_m(k); \\
\Upsilon &= a_1 \cdot [-\omega^2 - 2k^2 - 8m^2 + 2 + w(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k))] + 1,5\omega^2 + \\
& + b_1 \cdot \omega I_{2m}(2k) [2(k^2 + m^2) / G_m(k) - G_{2m}(2k)] + d_1 \cdot \chi K_{2m}(2k) [2k^2 + \\
& + 2m^2 - (2 + H_m(k)) \cdot H_{2m}(2k)] + \omega_m^2(k) [5(k^2 + m^2)G_m(k) - 6m^2] / 2G_m^2(k) + \\
& + 0,5w [18 - 7k^2 - 11m^2 + (-3k^2 - 3m^2 + 22 + 6H_m(k)) \cdot H_m(k)] - \\
& - 5 + 0,5k^2 + 9,5m^2 - 3k^2m^2 - 1,5(k^4 + m^4); \quad w \equiv 4\pi\chi^2; \\
\Upsilon_0 &= 2(a_2 + a_3) [-\omega^2 + 2 + w(k^2 + m^2 - 3 - 2H_m(k))] - 4a_2(k^2 + m^2) - \\
& - a_3 16m^2 + 2\omega^2 + 2b_2 \cdot \omega I_0(2k) [2k^2 / G_m(k) - G_0(2k)] + \\
& + d_2 \cdot 2\chi K_0(2k) [2k^2 - (2 + H_m(k))H_0(2k)] + d_3 \cdot 4\chi m(m + 2 + H_m(k)) + \\
& + \omega_m^2(k) [(5k^2 - 3m^2)G_m(k) + 2m^2] / G_m^2(k) - 8 + k^2 - 17m^2 + 2k^2m^2 + \\
& + w [15 - 8k^2 - 12m^2 - (4k^2 + 4m^2 - 20 - 6H_m(k)) \cdot H_m(k)] - 3(k^4 + m^4); \\
& \omega_m^2(k) = G_m(k) \cdot [k^2 + m^2 - 1 + 4\pi\chi^2(1 + H_m(k))]; \\
\Lambda &= -4\pi\chi a_1(1 + H_m(k)) + 2\pi\chi [4 - k^2 - m^2 + 5H_m(k)] - d_1 2k \cdot K'_{2m}(2k); \\
\Lambda_0 &= -8\pi\chi(a_2 + a_3)(1 + H_m(k)) + 4\pi\chi [3 - 2k^2 - 2m^2 + 4H_m(k)] - \\
& - d_2 4k \cdot K'_0(2k) + d_3 \cdot 4m; \quad a_1 \equiv M_1/N_1; \quad a_2 \equiv M_2/N_2; \\
& a_3 \equiv (Y_3 - 2m\chi L) / [(1 - 2m)(1 + 2m - w)]; \\
M_1 &= G_{2m}(2k) \cdot [Y_1 + \chi L \cdot H_{2m}(2k)] + 2\omega_m(k) \cdot X_1; \\
N_1 &= 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k); \quad M_2 = G_0(2k) \cdot [Y_2 + \chi L \cdot H_0(2k)] + 2\omega_m(k) \cdot X_2; \\
N_2 &= 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k); \quad X_1 = \omega_m(k) [2(k^2 + m^2) - G_m(k)] / G_m(k); \\
X_2 &= \omega_m(k) [2k^2 - G_m(k)] / G_m(k); \quad L = -2\pi\chi [1 + 2H_m(k)]; \\
Y_1 &= 1 + 0,5(k^2 - 5m^2) + \omega_m^2(k) [k^2 + m^2 - 3G_m^2(k)] / 2G_m^2(k) + \\
& + 0,5w [3k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - H_m^2(k)]; \\
Y_2 &= 1 + 0,5(k^2 - 3m^2) + \omega_m^2(k) [k^2 - m^2 - 3G_m^2(k)] / 2G_m^2(k) + \\
& + 0,5w [3k^2 + m^2 - 3 - 4H_m(k) - H_m^2(k)]; \\
Y_3 &= 1 - 0,5(k^2 + 5m^2) + \omega_m^2(k) [k^2 - m^2 - G_m^2(k)] / 2G_m^2(k) + \\
& + 0,5w [k^2 + 3m^2 - 3 - 4H_m(k) - H_m^2(k)];
\end{aligned}$$

$$\alpha_i = \left[\omega_i \Gamma_i + G_{m_i}(k_i) \cdot (\Upsilon_i + \chi \cdot \Lambda_i H_{m_i}(k_i)) \right] / \left[\omega_i^2 - (\omega_{m_i}(k_i))^2 \right];$$

$$b_1 \equiv \frac{1}{2k \cdot I'_{2m}(2k)} (2\omega \cdot a_1 - X_1); \quad b_2 \equiv \frac{1}{4k \cdot I'_0(2k)} \cdot (4\omega \cdot a_2 - X_2);$$

$$d_1 \equiv (4\pi\chi \cdot a_1 + L) / K_{2m}(2k); \quad d_2 \equiv (4\pi\chi \cdot a_2 + 0,5 \cdot L) / K_0(2k);$$

$$d_3 \equiv 4\pi\chi \cdot a_3 + 0,5 \cdot L.$$

Кроме появления слагаемых третьего порядка малости, мало сказывающихся на рельефе струи, наиболее интересным результатом проведенного расчета по сравнению с ранее проведенными в [38–41] расчетами второго порядка малости, является появление нелинейной поправки к частоте волны $\varepsilon^2 g$, наличие которой приводит к изменению критических условий (критической длины волны и величины поверхностной плотности электрического заряда) реализации неустойчивости струи. Коэффициент g в зависимости от волнового числа, поверхностной плотности электрического заряда и азимутального числа m может быть как отрицательным, так и положительным, что означает возможность смещения критических условий реализации неустойчивости для волн с различной асимметрией в различных направлениях: в сторону либо их увеличения, либо уменьшения.

Следует также отметить, что все аналитические исследования нелинейных осцилляций струй как незаряженных, так и заряженных, проведены для модели идеальной жидкости, что существенно ограничивает возможность практического использования полученных результатов. Поэтому представляется необходимым проанализировать нелинейные осцилляции струи вязкой жидкости, для нелинейных волн на поверхности жидкости и для нелинейных осцилляций капли такие обобщения в последние годы проведены [138–140].

4. Заключение. Подводя итог вышесказанному, отметим, что, несмотря на обилие исследований по устойчивости и дроблению незаряженных струй, устойчивость и распад заряженных струй жидкости, спонтанно формирующихся при реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости, до сих пор слабо изучены, но тем не менее в связи с многообразием практических приложений им посвящено множество экспериментальных работ. Представляется необходимым провести теоретическое аналитическое исследование нелинейных неосесимметричных осцилляций заряженных струй вязких жидкостей, что позволит приблизиться к построению теоретической классификации наблюдаемых в экспериментах режимов электродиспергирования жидкости.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №05-08-01147-а и №06-01-00066-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baily A.G.* Electrostatic atomization of liquids (review) // *Sci. Prog., Oxf.* 1974. V.61. P. 555–581.
2. *Коженков В.И., Фукс Н.А.* Электродинамическое распыление жидкости (обзор) // *Успехи химии.* 1976. Т. 45. № 12. С. 2274–2284.
3. *Бураев Т.К., Верещагин И.П., Пашин Н.М.* Исследование процесса распыления жидкостей в электрическом поле // *Сб. Сильные электрические поля в технологических процессах.* М.: Энергия. 1979. № 3. С. 87–105.
4. *Габович М. Д.* Жидкометаллические источники ионов (обзор) // *УФН.* 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
5. *Ентов В.М., Ярин А.Л.* Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей // *ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Сер. "Механика жидкости и газа".* 1984. Т. 17. С. 112–197.
6. *Дудников В.Г., Шабалин А.Л.* Электродинамические источники ионных пучков (обзор) // *Препринт 87-63 ИЯФ СО АН СССР.* Новосибирск, 1987. 66 с.
7. *Fenn J.B., Mann M., Meng C.K. et al.* Electrospray ionization for mass spectrometry of large biomolecules (review) // *Science.* 1989. V. 246. № 4926. P. 64–71.
8. *Григорьев А.И.* Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // *Электронная обработка материалов.* 1990. № 6. С. 23–32.
9. *Монодиспергирование вещества: принципы и применение* // *Е.В. Аметистов, В.В. Блаженков, А.К. Городков и др.: Под ред. В.А. Григорьева.* М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
10. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А.* Классификация режимов работы электродинамических источников жидко-капельных пучков (обзор) // *Препринт ИМРАН № 25.* Ярославль, 1993. 118 с.

11. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
12. Белоношко Д.Ф., Григорьев А.И. Деление заряженных капель во внешнем электрическом поле на части сравнимых размеров (обзор) // Электронная обработка материалов. 2000. № 4. С. 17–27.
13. Chen C.H., Saville D.A., Aksay I.A. Electrohydrodynamic “drop-and-place” particle deployment // Appl. Phys. Letters. 2006. Vol.88. № 3154104. P. 1–3.
14. Фукс Н. А., Сутугин А. Г. Монодисперсные аэрозоли// Успехи химии. 1965. Т. 34. № 2. С. 276–299.
15. Безруков В.И. Основы электрокаплеструйных технологий. Спб: Судостроение, 2001. 237 с.
16. Тимохин А.Д. Получение потоков монодисперсных нейтральных и заряженных макрочастиц // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1981. Вып. 545. С. 3–24.
17. Macky W.A. Some investigations on the deformation and breaking of water drops in strong electric fields // Proc. Roy. Soc. London, 1931. V.133. №A822. P. 565–587.
18. Magarvey R., Outhouse L. Note on the break up of charged liquid jet // J. Fluid Mech. 1962. Vol. 13. № 1. P. 151–157.
19. Huebner A., Chu H. Instability and breakup of charged liquid jets // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 49. № 2. P. 361–372.
20. Hoburg J.F., Melcher J.R. Current-driven, corona terminated water jets as sources of charged droplets and audible noise // IEEE Transaction on Power Apparatus System. 1975. V. 94. № 1. P. 128–136.
21. Kim K., Turnbull R. Generation of charged drops of insulating liquids by electrostatic spraying // J. Appl. Phys. 1976. V.47. № 5. P. 1964–1969.
22. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes // J. Electrostatics. 1990. V. 25. P. 165–184.
23. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. О спонтанном распаде заряженной струи вязкой электропроводной жидкости // Электронная обработка материалов. 2003. № 1. С. 38–43.
24. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. Об устойчивости неосесимметричной заряженной струи вязкой электропроводной жидкости // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 4. С. 5–12.
25. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. Об устойчивости неосесимметричных мод объемно заряженной струи вязкой диэлектрической жидкости // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 22–30.
26. Nayfeh F.H. Nonlinear stability of a liquid jet // Phys. Fluids. 1970. № 4. P. 841–847.
27. Rutland D., Jamerson G. A nonlinear effect in the capillary instability of liquid jets // J. Fluid Mech. 1971. V. 46. № 2. P. 267–271.
28. Lafrance P. Nonlinear breakup of a liquid jet // Phys. Fluids. 1974. V. 17. № 10. P. 1913–1914.
29. Новиков А.А. Нелинейные капиллярные волны на поверхности струи вязкой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 2. С. 179–182.
30. Chaudhary K., Redekopp L. The nonlinear capillary instability of a liquid jet. Pt.1. Theory // J. Fluid Mech. 1980. V. 96. P. 257–274.
31. Chaudhary K., Maxworthy T. The nonlinear capillary instability of a liquid jet. Pt.2. Experiments on jet behavior before droplet formation // J. Fluid. Mech. 1980. Vol. 96. P. 275–286.
32. Chaudhary K., Maxworthy T. The nonlinear capillary instability of a liquid jet. Pt.3. Experiments on satellite drop formation and control // J. Fluid. Mech. 1980. V. 96. № 2. P. 287–298.
33. Блаженков В.В., Гиневский А.Ф., Гунбин В.Ф., Дмитриев А.С., Щеглов С.И. Нелинейная эволюция волн при вынужденном капиллярном распаде струй // Изв. АН СССР. МЖГ. 1993. № 3. С. 54–60.
34. Huynh N., Ashgriz N., Mashayek F. Instability of a liquid jet subject to disturbances composed of two wave numbers // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 320. P. 185–210.
35. Чесноков Ю.Г. Нелинейное развитие капиллярных волн в струе вязкой жидкости // ЖТФ. 2000. Т.70. Вып.8. С.31-38.
36. Асланов С.К. К теории распада жидкой струи на капли // ЖТФ. 1999. Т.69. Вып.11. С.132–133.
37. Горшков В.Н., Чабан М.Г. Нелинейные электрогидродинамические явления и генерация капель в заряженных проводящих струях // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 11. С. 1–9.
38. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. Нелинейный асимптотический анализ осциллирующих неосесимметричных мод заряженной струи идеальной жидкости // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 8. С. 6–14.
39. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Егорова Е.В. О некоторых особенностях нелинейного резонансного взаимодействия мод заряженной струи // Электронная обработка материалов. 2005. № 1. С. 42–50.

40. Волкова М.В., Воронина Н.В. Нелинейные неосесимметричные волны на заряженной поверхности электропроводной струи // Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Актуальные проблемы физики. №5. Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова. 2005. С. 73–80.
41. Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. Нелинейные осцилляции заряженной струи электропроводной жидкости при многомодовой начальной деформации ее поверхности // ЖТФ. 2006. Т.76. Вып. 9. С. 31–41.
42. Rayleigh, Lord. On the capillary phenomena of jets // Proc. Roy. Soc., London. 1879. V. 29. № 196. P. 71–97.
43. Рэлей Дж. Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
44. Savart F. Memare sur la contitution veines liquides lancus par des orifices circulaires en mince paroi // Annal. chimic. 1833. Ser. 2. Vol. 53. N 3. P. 337–386.
45. Weber C. Zum den Zerfall eines Flussigkeitstrahles // Z. Angew. Math. Mech. 1931. Bd 11. H. 3. S. 136–154.
46. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
47. Keller J.B., Rubinow S.I., Tee Y.O. Spatial instability of a jet // Phys. Fluids. 1973. Vol. 16. № 12. P. 2052–2055.
48. Vogy D.B. Wave propagation and instability in a circular semi-infinite liquid jet harmonically forced at the nozzle // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1978. Vol. 45. № 3. P. 469–474.
49. Vogy D.B. Breakup of a liquid jet: third perturbation Cosserat solution // Phys. Fluids. 1979. V. 22. № 2. P. 224–230.
50. Владимиров В.В., Горшков В.Н. Особенности образования капель при развитии неустойчивости Рэля в цилиндрических нитях жидкости // ЖТФ. 1990. Т. 60. № 11. С. 197–200.
51. Горшков В.Н., Мозырский Д.В. Самовозбуждение коротковолновых структур и распад на капли в ограниченных нитях жидкости // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 15–25.
52. Колпаков А.В. Слияние и дробление капель в атмосфере. Одесса: Изд. ОНУ им И.И. Мечникова. 2003. 164 с.
53. Петров Г.И., Калинин Т.Д. Применение метода малых колебаний к исследованию распада струй топлива в воздухе // Тех. записки МАП. 1947. № 4. С. 15–23.
54. Fenn R.W., Middleman S. Newtonian jet stability: the role of air resistance // AIChE Journal. 1969. V.12. № 3. P. 379–383.
55. Grant R.P., Middleman S. Newtonian jet stability // AIChE Journal. 1966. V. 12. № 4. P. 669–678.
56. Haenlein A. Uber den Zerfall eines Flussigkeitstrahles // Forschung. Ing. Wes. 1931. Bd 2. H. 4. S. 139–149.
57. Iciek J. The hydrodynamics of a free, liquid jet and their influence on direct contact heat transfer. 1. Hydrodynamics of a free, cylindrical liquid jet // Int. J. Multiphase Flow. 1982. Vol. 8. NT/ P. 239–249.
58. Iciek J. The hydrodynamics of a free, liquid jet and their influence on direct contact heat transfer I: Conditions of change of liquid outflow type through sharp inlet edged orifice // Int. J Multiphase Flow, 1983, 9, № 2 P. 167–179.
59. Глонти Г.А. К теории устойчивости жидких струй в электрическом поле // ЖЭТФ. 1958. Т. 34. № 5. С. 1328–1330.
60. Schneider J., Lindbland C., Hendrick Jr. Stability of an electrified liquid jet // J. Appl. Phys. 1967. V.38. № 6. P. 2599–2606.
61. Michael D., O'Neil M. Electrohydrodynamic instability of a cylindrical viscous jet // Can. J. Phys. 1969. V.47. P. 1215–1220.
62. Saville D. Electrohydrodynamic stability: effect of charge relaxation at the interface of a liquid jet // J. Fluid Mech. 1971. V.48. № 4. P. 815–827.
63. Saville D. Stability of electrically charged viscous cylinders // Phys. of Fluids. 1971. V.14. № 6. P. 1095–1099.
64. Huebner A.L. Disintegration of charged liquid jets // J. Fluid Mech. 1969. V. 38. Part. 4. P. 679–688.
65. Френкель Я.И. Действие электрического поля на струю жидкости // На заре новой физики. Л.: Наука, 1970. С. 238–243.
66. Garmendia L., Smith I. The effects of an electrostatic field and air stream on water jet break-up length // Can. J. Chem. Eng. 1975. V. 53. P. 606–610.
67. Toraita Y., Sudou K., Tshibashi Y. Effect of a magnetic and an electrical field on the behavior of liquid jets // Bull. JSME. 1979. V. 22. № 172. P. 1390–1398.

68. *Кожевников В.И., Чеканов В.В., Литовский Е.И.* Свободные вертикальные струи над деформированной поверхностью магнитной жидкости в электрическом поле // *Магнитная гидродинамика*. 1982. № 4. С. 118–120.
69. *Grossmann S., Muller A.* Instabilities and decay rates of charged viscous liquid jets // *Z. Phys. B: Condensed Matter*. 1984. V.57. P.161-174.
70. *Назин С.С., Изотов А.Н., Шикин В.Б.* Об устойчивости заряженной струи // *ДАН СССР*. 1985. Т. 283. № 1. С. 121–125.
71. *Герценштейн С.Я., Мусабеков П.М., Рудницкий А.Я., Уразов Ш.Н.* Неустойчивость и распад наэлектризованных капиллярных струй // *ДАН СССР*. 1989. Т. 306. № 5. С. 1073–1077.
72. *Taylor G.* Electrically driven jet // *Proc. Roy. Soc., London*. 1969. V.A313. P. 453–470.
73. *Taylor G.* Disintegration of water drop in an electric field // *Proc. Roy. Soc., London*. 1964. V.A280. P. 383–397.
74. *Baily A.G.* Electrostatic spraying of liquids // *Phys. Bull.* 1084. V.35. № 4. P. 146–148.
75. *Zeleny J.* The electrical discharge from liquid points and a hydrostatic method of measuring the electric intensity at their surfaces // *Phys. Rev.* 1914. V. 3. № 2. P. 69–91.
76. *Zeleny J.* On the condition of instability of electrified drops with application to the electrical discharge from liquid points // *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 1914. V. 18. Part 1. P. 71–83.
77. *Zeleny J.* Instability of electrified liquid surfaces // *Phys. Rev.* 1917. V. 10. № 1. P. 1–6.
78. *English W.N.* Corona from water drop // *Phys. Rev.* 1948. V.74. № 2. P. 179–189.
79. *Drozin V.G.* The electrical dispersion of liquids as aerosols // *J. Coll. Sci.* 1955. V. 10. № 2. P. 168–164.
80. *Vonnegut B., Neubauer R.L.* Production of monodispers liquid particles by electrical atomization // *J. Coll. Sci.* 1952. V. 7. № 6. P. 616–622.
81. *Navab M.A., Mason S.G.* The preparation of uniform emulsions by electrical dispersion // *J. Coll. Sci.* 1958. V. 13. P. 179–187.
82. *Schjultze K.* Das Verhalten verschiedener Flüssigkeiten bei red Electrostatiscen Zerstaubung // *Zeitschrift fur angewandte Physik*. 1961. B.13. № 1. S. 11–16.
83. *Kleber W.* Der Mechanismus der Electrostatiscen Lackzerstabung // *Plaste und Kautschuk*. 1963. № 8. S. 502–508.
84. *Carson R.S., Hendrics C.D.* Natural pulsations in electrical spraying of liquids // *AIAA Journal*. 1965. V.3. № 6. P. 1072–1075.
85. *Hines R.L.* Electrostatic atomization and spray painting // *J. Appl. Phys.* 1966. V. 37. № 7. P. 2730–2736.
86. *Jones A.R., Thong K.C.* The production of charged monodispers fuel droplets by electrical dispersion // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 1971. V. 4. P. 1159–1165.
87. *Коженков В.И., Кириш А.А., Фукс Н.А.* О механизме образования монодисперсных туманов при электрическом распылении жидкости // *ДАН СССР*. 1973. Т. 213. № 4. С. 879–880.
88. *Коженков В.И., Кириш А.А., Фукс Н.А.* Исследование процесса образования монодисперсных аэрозолей при электрическом распылении жидкости // *КЖ*. 1974. Т. 36. № 6. С. 1168–1171.
89. *Буряев Т.К., Верецагин И.П.* Физические процессы при распылении жидкости в электрическом поле // *Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт*. 1971. № 5. С. 70–79.
90. *Буряев Т.К., Паушин М.М.* Качественная картина распыления жидкости в электрическом поле // *Электричество*. 1971. № 4. С. 78–79.
91. *Robinson K.S., Turnbull R.J., Kim K.* Electrostatic spraying of liquid insulators // *IEEE Trans. on IA*. 1980. V.IA-16. № 2. P. 308–316.
92. *Wilson J.M.* A linear source of electrostatically charged spray // *J. Agric. Engng. Res.* 1982. V.27. P. 355–362.
93. *Smith D.P.H.* The electrohydrodynamic atomization of liquids // *IEEE Trans. on IA*. 1986 V.IA-22. № 3. P. 527–535.
94. *Hayati I., Bailey A.J., Tadros Th.F.* Mechanism of stable jet formation in electrohydrodynamic atomisation // *Nature*. 1986. V. 319. № 1. P. 41–43.
95. *Hayati I., Bailey A.J., Tadros Th.F.* Investigations into the mechanism electrohydrodynamic spraying of liquids. Part 1 // *J. Coll. Int. Sci.*. 1987. V.117. № 1. P. 205–221.
96. *Hayati I., Bailey A.J., Tadros Th.F.* Investigations into the mechanism electrohydrodynamic spraying of liquids. Part 2 // *J. Coll. Int. Sci.*. 1987. V.117. №1. P.222-230.
97. *Попов С.И., Петрянов И. В.* К механизму электростатического распыливания жидкостей // *ДАН СССР*. 1970. Т. 195. № 4. С. 893–895.

98. Кириченко В.Н., Полево В.Н., Супрун Н.Н., Петрянов-Соколов И.В. Перенос заряда при электрогидродинамическом распылении жидкости // ДАН СССР. 1988. Т. 301. № 3. С. 814–817.
99. Кириченко В.Н., Михайлова А.Д., Полево В.Н. Удельный заряд жидкости в процессах ЭГД-распыления и формирования микроволокон // ДАН СССР. 1990. Т. 315. № 4. С. 819–823.
100. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrostatic spraying of liquids in cone-jet modes // J. Electrostatics. 1989. V. 22. P. 135–159.
101. Fernandes De La More J., Loscertales I.G. The current emitted by highly conducting Taylor cones // J. Fluid Mech. 1994. V. 260. P. 155–184.
102. Gomez A., Tang K. Charge and fission of droplets in electrostatic sprays // Phys. Fluids. 1994. V. 6. № 1. P. 404–413.
103. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А. Классификация режимов работы электрогидродинамических источников ионов. Препринт ИМ РАН №25. Ярославль. 1993. 118 с.
104. Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. The semifenomenological classification of the modes of electrostatic dispersion of liquids // J. Electrostatics. 1995. V. 34. P. 51–59.
105. Кириченко В.Н., Петрянов-Соколов И.В., Супрун Н.Н., Шутков А.А. Асимптотический радиус слабопроводящей жидкой струи в электрическом поле // ДАН СССР. 1986. Т. 289. № 4. С. 817–820.
106. Кириченко В.Н., Супрун Н.Н., Петрянов-Соколов И.В. Области существования свободных стационарных жидких струй в сильном внешнем электрическом поле // ДАН СССР. 1987. Т. 295. № 2. С. 308–311.
107. Кириченко В.Н., Супрун Н.Н., Петрянов-Соколов И.В. Форма свободной стационарной жидкой струи в сильном однородном электрическом поле // ДАН СССР. 1987. Т. 295. № 4. С. 553–555.
108. Canan-Calvo A.M. On the theory of electrohydrodynamically driven capillary jets // J. Fluid Mechanics. 1997. V. 335. P. 165–188.
109. Шутков А.А., Захарьян А.А. Заряженная струя несжимаемой жидкости в электрическом поле // ПМТФ. 1998. Т. 39. № 4. С. 12–15.
110. Шутков А.А. Форма слабопроводящей струи в сильном электрическом поле // ПМТФ. 1991. Т.32. № 2. С. 20–25.
111. Зубарев Н.М. Точное решение задачи о равновесной конфигурации двумерной заряженной жидкометаллической капли // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 23. С. 55–60.
112. Зубарев Н.М., Зубарева О.В. Анализ равновесных конфигураций заряженных цилиндрических струй проводящей жидкости // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 1. С. 51–55.
113. Feng J.J. Stretching of a straight electrically charged viscoelastic jet // J. Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2003. V.116. P. 55–70.
114. Turnbull R. Self-acceleration of a charged jet // IEEE Trans. Ind. Appl. 1989. V. 25. N 4. P. 699–704.
115. Гиневский А.Ф., Мотин А.И. Особенности капиллярного распада струй диэлектрической вязкой жидкости с поверхностным зарядом // ИФЖ. 1991. Т.60. № 4. С. 576–581.
116. Mestel A.J. Electrohydrodynamic stability of a slightly viscous jet // J. Fluid Mech. 1994. Vol. 274. P. 93–113.
117. Mestel A.J. Electrohydrodynamic stability of a highly viscous jet // J. Fluid Mech. 1996. Vol. 312. № 2. P. 311–326.
118. Шкадов В.Я., Шутков А.А. Устойчивость поверхностно заряженной вязкой струи в электрическом поле // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 2. С. 29–40.
119. Шутков А.А., Шкадов В.Я. Теоретическое и экспериментальное исследование электрогидродинамических струйных течений, их устойчивости и моделирование процесса диспергирования жидкости // Труды регионального конкурса научных проектов в области естественных наук. Вып.1. Калуга, 2000. С. 67–88.
120. Shkadov V.Ya., Shutov A.A. Disintegration of a charged viscous jet in a high electric field // Fluid Dynamic Res. 2001. V. 28. P. 23–39.
121. Бухаров А.В., Гиневский А.Ф., Коновалов Н.А. Влияние электрического поля на капиллярный распад струи электролита // ИФЖ. 1991. Т. 60. № 4. С. 582–586.
122. Гиневский А.Ф. Особенности капиллярного распада струй заряженных диэлектриков // Исследование процессов и систем монодисперсного распада жидкости // Сб. н. тр. МЭИ. №119. М: Изд. МЭИ. 1986. С. 18–26.

123. Гиневский А.Ф. Особенности капиллярного распада струй вязких заряженных диэлектрических жидкостей // Физико-технические проблемы монодисперсных систем // Сб. н. тр. МЭИ, №185. М: Изд. МЭИ. 1988. С. 54–58.
124. Jaworek A., Krupa A. Classification of the modes of EHD spraying // J. Aerosol Sci. 1999. V.30. № 7. P. 873–893.
125. Шкадов В.Я., Шутов А.А. Устойчивость поверхностно заряженной вязкой струи в электрическом поле // Итоги науки и техники. Сер. "Механика жидкости и газа". 1984. Т. 1. С. 27–35.
126. Fang Li, Xie-Yuan, Xie-Zhen Yin. Linear instability analysis of a coaxial jet // Phys. Fluids. 2005. V.17. №077104. P. 1–12.
127. Raco R.J. Stability of a liquid jet in a longitudinal time-varying electric field // AIAA Journal. 1968. V.6. № 5. P. 979–980.
128. Кириченко В.Н., Шепелев А.Д., Полезов В.Н., Петрянов-Соколов И.В. Поперечное расщепление струи в сильном электрическом поле // ДАН СССР. 1988. Т. 302. № 2. С. 284–287.
129. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. О корректной форме записи закона сохранения количества вещества на движущейся границе раздела двух жидких сред // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 11. С. 22–28.
130. Higuera F.J. Flow rate and electric current emitted by a Taylor cone // J. Fluid Mech. 2003. V. 484. P. 303–327.
131. Higuera F.J. Current/flow-rate characteristics of an electrospray with a small meniscus // J. Fluid Mech. 2004. V. 513. P. 239–246.
132. Canan-Calvo A.M. Cone-jet analytical extension of Taylor's electrostatic solution and the asymptotic universal scaling laws in electrospraying // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. № 2. P. 217–220.
133. Gamero-Castano M., Hruby V. Electric measurements of charged sprays emitted by cone-jets // J. Fluid Mech. 2002. V. 459. P. 245–276.
134. Lopez-Herera J.M., Canan-Calvo A.M. A note on charged capillary jet breakup of conducting liquids: experimental validation of a viscous one-dimensional model // J. Fluid Mech. 2004. V. 501. P. 303–326.
135. Marginean I., Parvin L., Hefferman L., Vertes A. Flexing the electrified meniscus: the birth of a jet in electrosprays // Anal. Chem. 2004. V. 76. P. 4202–4207.
136. Loscertales I.G., Barrero A., Marquez M. Production of complex nano-structures by electro-hydrodynamics // Mater. res. Soc. Symp. Proc. 2005. V.860E. P.LL.5.9.1.– LL.5.9.6.
137. Герценштейн С.Я., Мусабеков П.М., Рудницкий А.Я., Умаркулов К. О немонадисперсном распаде капиллярных струй в нестационарном электрическом поле // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306. № 5. С. 1073–1077.
138. Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Курочкина С.А., Санасарян С.А. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости // Электронная обработка материалов. 2004. № 2. С. 27–31.
139. Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. Нелинейные осцилляции заряженной капли вязкой жидкости // Электронная обработка материалов. 2005. № 4. С. 35–43.
140. Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И., Санасарян С.А. Нелинейные капиллярно-гравитационные волны на поверхности слоя вязкой жидкости // Электронная обработка материалов. 2005. № 5. С. 24–33.

Поступила 07.06.06

Summary

It is reviewed the problem of charged jets oscillations and spontaneous disintegration on drops.
