

Н.И. Ботошан, М.К. Болога, С.Е. Берзой

КАТАСТРОФЫ В ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ МОДЕЛЯХ ЭВОЛЮЦИИ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Институт прикладной физики АН РМ,
ул. Академией, 5, г. Кишинев, MD-2028, Республика Молдова*

Ряд задач, относящихся к различным областям науки и техники, характеризуются явлениями устойчивости решений дифференциальных уравнений. Потеря устойчивости в таких задачах порождает катастрофы, описание которых представляет значительный интерес [1]. Потерей устойчивости решений обладают следующие задачи: галопирование тонкостенных конструкций под действием веса и ветровой нагрузки; внезапный развал кристаллической решетки; самоорганизация в биологических системах; возникновение турбулентности в жидкостях; хаотическое движение в детерминистических моделях; вибрации самолетов. Дифференциальные уравнения для этих задач заведомо нелинейные, и их исследование требует применения теории бифуркации и катастроф. Далее в качестве примера рассмотрены дифференциальные уравнения, описывающие динамическую систему с двумя степенями свободы. Обычно исследование устойчивости движения проводится с помощью линеаризации относительно отклонений от равновесия, в котором будет представлена система.

Изучим решение системы для устойчивого режима фокального типа, когда она совершает периодические, затухающие колебания, асимптотически приближаясь к положению равновесия. Суть исследования состоит в идентификации обобщенных параметров задачи и выявлении критериев их влияния на основные характеристики эволюционирующей системы. Фазовые траектории движения в этом случае имеют вид закручивающейся спирали, амплитуда которой определяется начальными условиями задачи. Любопытно то, что для устойчивого режима фокального типа можно усмотреть возникновение катаклизмов в процессе эволюции взаимодействия видов при исчезновении одного из них. Таким образом, так же можно предсказать основные факторы, приводящие к нарушениям автоколебательного режима для клеточного обмена живого организма [2]. Автоколебательный процесс характерен для многих задач метаболизма. Например, ферментативные реакции в сфере обмена веществ составляют отдельный раздел, изучающий как синтез генетического материала, так и промежуточный обмен. Процесс гликолиза в организме, состоящий в анаэробном превращении глюкозы в лактат с выделением тепла для поддержания теплового баланса, тоже происходит в автоколебательном режиме.

Примером математического описания динамики популяций и взаимодействия видов служит линеаризованная модель Лотки-Вольтерра [3]. Здесь исследуется качественное описание взаимодействия видов в линеаризованной модели уравнений движения.

Рассматривая линеаризованную модель задачи, допустим, что n означает полное текущее число хищников, а m – текущее число их потенциальных жертв. Сосуществование видов можно описать в линейном приближении системой скоростных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{n} = -\lambda(n - n_a) + \gamma(m - m_a), \\ \dot{m} = -\nu(m - m_a) - \sigma(n - n_a). \end{cases}$$

Система содержит минимально возможное количество параметров для описания эволюции видов и стабилизации их популяций. Цель таких моделей состоит в выявлении материальной взаимосвязи между сосуществующими контрадикторными видами и определении критериев стабилиза-

ции. Уравнения составлены по принципу скоростных, когда скорости изменений величин равны разностям между «приростом» и «потерями». В уравнения входят четыре релаксационных времени $\lambda^{-1}, \gamma^{-1}, \nu^{-1}$ и σ^{-1} , определяющие быстроту «прироста» или «потерь» в уравнениях видов, и две характеристики стабилизации, определяющие стационарное решение систем n_a и m_a . Все коэффициенты ($\lambda, \gamma, \nu, \sigma$) в уравнениях суть положительные величины.

Выясним смысл релаксационных коэффициентов в линеаризованных уравнениях движения. Рассмотрим популяцию насекомых, когда их численность довольно значительная, чтобы можно было пренебречь флуктуациями. Уравнение движения для численности насекомых можно представить в простом виде: $\frac{dn}{dt} = \lambda(n - n_a)$, где n – численность популяции насекомых, n_a – стационарная точка равновесия их численности.

Если начальная численность популяции $n_0 > n_a$, тогда численность насекомых будет возрастать экспоненциально. Естественно, такого рода явления наблюдаются в случаях нашествия насекомых на новые места из-за чрезмерного роста их количества и отсутствия необходимой пищи. Если же не допустить начальную флуктуацию ($n_0 > n_a$), тогда популяция насекомых вымрет за время

$\tau_s = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{n_a}{n_0 - n_a}$. Следовательно, чем ближе n_0 к стационарному значению n_a , тем больше время

жизни популяции. Физический смысл величины n_a определен как граничное значение численности насекомых, при котором прирост равняется потерям. Это означает, что в полном количестве насекомых имеются и особи, не способные к воспроизводству. Скоротечная гибель популяции будет определяться соотношением $\tau_d \approx \frac{n_0}{\lambda n_a}$, где ($n_0 \ll n_a$).

Случай, когда коэффициент λ входит в уравнение движения со знаком минус, можно интерпретировать как фактор сдерживания роста популяции. В самом деле, всегда происходит стабилизация численности насекомых вне зависимости от соотношения между начальным и равновесным значениями, если $\lambda < 0$.

Учитывая эти особенности, будем трактовать релаксационные константы в уравнениях движения по их физическому смыслу. Так, λ и ν являются факторами сдерживания, ограничивающими чрезмерное увеличение численности данной популяции вида по уровню достаточного обеспечения пищей. Для жертв уровень пищи достаточного обеспечения равен m_a , а коэффициент ν сдерживает увеличение численности при его превышении случайной флуктуацией. Для хищников уровень пищи, сдерживающий дальнейший рост, определяется величиной n_a , которая указывает на то, что его превышение делает достаточный доступ пищи почти невозможным. Этот фактор в уравнении для хищников описывает конкуренцию особей в борьбе за пищу.

Факторы γ и σ характеризуют уровень размножения для каждого из видов в отдельности. Например, уровень размножения для жертв убывающий, если хищников больше сдерживающего предела n_a , определяющего число хищников в случае их достаточного сосуществования с доступным уровнем пищи. На этом этапе рост численности хищников определен коэффициентом γ и является прибыльным только при наличии пищи выше уровня достаточного обеспечения ($m > m_a$).

Особый интерес представляет задача при отсутствии факторов сдерживания или при их равенстве. Одна из причин повышенного интереса к ограничению сдерживания определена вмешательством человека в развитие популяции видов. Для автоколебательных циклов клеточного обмена снятие факторов сдерживания означает как нарушение режима питания, так и злоупотребления, влияющие на обеспечение клеток нормальной средой развития.

В таком аспекте модель содержит как бы ограничительный предел «роста» величин, определенный ограниченным запасом пищи для жертв.

Уравнения движения для каждого вида, в частности, принимают независимый, идентичный вид:

$$\begin{aligned} \ddot{n} + 2\varepsilon\dot{n} + \Delta(n - n_a) &= 0, \\ \ddot{m} + 2\varepsilon\dot{m} + \Delta(m - m_a) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения: $\Delta = \gamma\sigma + \nu\lambda$; $\varepsilon = (\lambda + \nu)/2$.

Стационарному решению соответствует точка (n_a, m_a) в фазовом пространстве (n, m) . Характеристическое уравнение запишем как:

$$(k + \varepsilon)^2 = \frac{1}{4} [(\lambda - \nu)^2 - 4\gamma\sigma].$$

Заметим, что чрезмерное различие в темпах «прироста» одного из видов по сравнению с другим приводит к бесконечному росту количества особей одного вида и к видимому истреблению другого. Образование цикла повторений в фазовом пространстве проявляется лишь при умеренном отличии между величинами λ и ν или когда $4\gamma\sigma > (\lambda - \nu)^2$. Тогда решения уравнений движения принимают вид

$$\begin{aligned} n - n_a &= \exp(-\varepsilon\tau) \{A \cos \omega\tau + B \sin \omega\tau\}, \\ m - m_a &= \exp(-\varepsilon\tau) \{C \cos \omega\tau + D \sin \omega\tau\}, \end{aligned}$$

где $\omega = \frac{1}{2} \sqrt{4\gamma\sigma - (\lambda - \nu)^2}$.

Начальное условие $\tau = 0, n = n_0, m = m_0$ дает $A = n_0 - n_a$, $C = m_0 - m_a$. Величины A и C определяют начальное фазовое запаздывание между уровнем развития хищников и жертв. Фазовая частота ω определяет периодичность циклов – $T = 2\pi / \omega$. Величины B и D определяются для того же начального условия соотношениями $B = \frac{1}{\omega}(\gamma C - \delta A)$, $D = \frac{1}{\omega}(\delta C - \sigma A)$, где $\delta = \frac{\lambda - \nu}{2}$.

Графики эволюции относительных величин приращений чисел хищников $Y = \frac{n - n_a}{n_0 - n_a}$ и

жертв $X = \frac{m - m_a}{m_0 - m_a}$ на фазовой плоскости XOY представляют собой закручивающиеся спирали, радиус которых $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$ обладает своеобразной зависимостью от параметров и времени. Координаты точек на фазовой плоскости определены формулами

$$\begin{aligned} X &= \exp(-\varepsilon\tau) \left[\cos \omega\tau - \frac{\sigma - \alpha\delta}{\alpha\omega} \sin \omega\tau \right], \\ Y &= \exp(-\varepsilon\tau) \left[\cos \omega\tau + \frac{\alpha\gamma - \delta}{\omega} \sin \omega\tau \right], \end{aligned} \quad \text{где } \alpha = \frac{m_0 - m_a}{n_0 - n_a} \text{ – относительное отклонение от равновесных величин числа жертв и хищников в начальный момент времени.}$$

новесных величин числа жертв и хищников в начальный момент времени.

Полярный угол φ определяется формулой: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{Y}{X} = \frac{\omega + (\alpha\gamma - \delta) \operatorname{tg} \omega\tau}{\omega - \left(\frac{\sigma}{\alpha} - \delta\right) \operatorname{tg} \omega\tau}$.

Рассматривая случай $\delta = 0$, $\varepsilon = \lambda$, $\omega = \sqrt{\gamma\sigma}$, можно заметить, что начальная величина радиальной координаты ρ равна $\sqrt{2}$ и при определенных параметрах λ , γ , σ и α вначале возрастает, а впоследствии стремится к нулю. Особое поведение амплитуды колебаний представлено графиками рис. 1 и 2. Параметры задачи соответственно равны: $\alpha = -10$, $\lambda = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $\sigma = 0,5$. Глубокий первый минимум величины $2 - Y$ является первопричиной возможной катастрофы для популяции хищников. Для этого набора параметров закручивание спирали на рис. 2 происходит по движению часовой стрелки.

Аналогичное поведение представлено на графиках рис. 3 и 4. Набор параметров $\alpha = 10$, $\lambda = 0,1$, $\gamma = 0,5$, $\sigma = 0,5$ отличается знаком величины α , что предопределило направление закручивания спирали и первичный максимум величины $2 - Y$. Всплеск амплитуды, превышающий первоначальную флуктуацию численности, является предпосылкой возможной катастрофы гибели вида.

Во многих задачах, среди которых и случай хищник–жертва, такое поведение имеет катастрофические последствия.

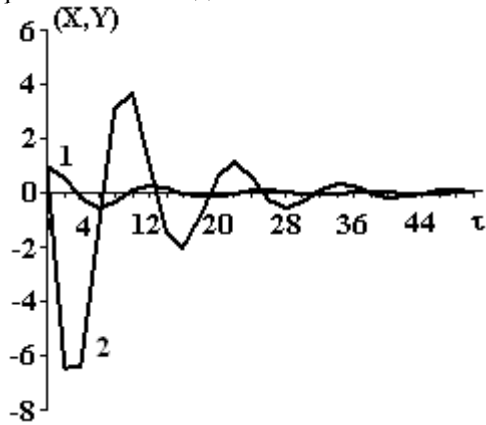


Рис. 1. Начальный отрицательный всплеск амплитуды с последующей асимптотической стабилизацией решения в устойчивом фокусе (1 – X, 2 – Y)

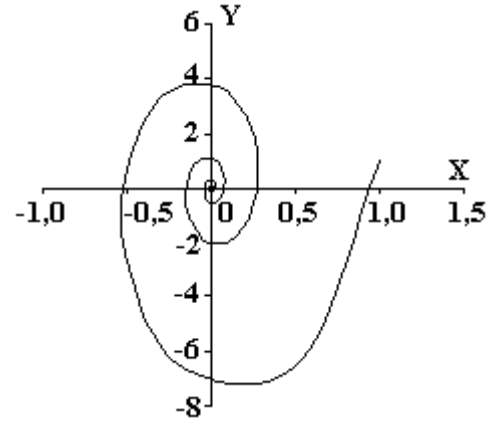


Рис. 2. Спиралевидная траектория на фазовой плоскости с затухающим закручиванием по часовой стрелке

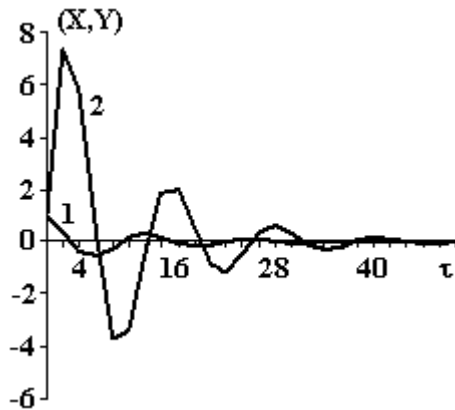


Рис. 3. Начальный положительный всплеск амплитуды с последующей стабилизацией решения (1 – X, 2 – Y)

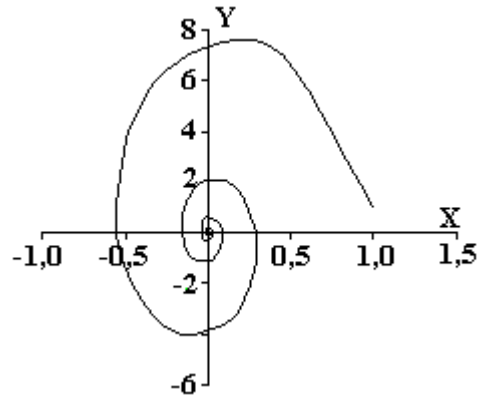


Рис.4. Спиралевидная траектория на фазовой плоскости с затухающим закручиванием против часовой стрелки

Фазовые координаты являются функциями параметров задачи $\lambda, \nu, \gamma, \sigma, \alpha$ и времени τ :

$$\frac{m - m_0}{m_0 - m_a} = X(\lambda, \nu, \gamma, \sigma, \alpha, \tau),$$

$$\frac{n - n_a}{n_0 - n_a} = Y(\lambda, \nu, \gamma, \sigma, \alpha, \tau).$$

Критериями выживания каждого из взаимодействующих видов являются ограничения чисел n и m условиями $n > 0$ и $m > 0$. Обратным соотношениям $n \leq 0$ и $m \leq 0$ соответствуют гибели популяций во взаимодействии с конкурирующим видом. Этими условиями определяют пределы возникновения катастроф. Например, гибели популяции хищников в случае $n_0 < n_a$ соответствует усло-

вие $Y(\lambda, \nu, \gamma, \sigma, \alpha, \tau) \leq \frac{n_a}{n_a - n_0}$, которое является очевидным при малых отклонениях от равновесного

значения $n_a - n_0$ и нормальном уровне питания n_a , составляющих основу выживания. Факторы взаимодействия видов могут привести к катастрофам только при определенном соотношении между ними. Зависимость от параметров значения функций X и Y в экстремумах по времени, указывающих на реальную возможность возникновения катастроф выживания в линеаризованной задаче хищ-

ник–жертва, представлена графически. Экстремумы функций X и Y в случае $\delta = 0$ определены соотношениями

$$X_{ex}(\delta = 0) = \exp(\lambda\tau_1) \frac{\alpha \left(1 + \frac{\lambda}{\gamma}\right) + \frac{\sigma - \lambda}{\gamma}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\lambda}{\gamma\sigma}\right) \left(\alpha^2 + \frac{\sigma}{\gamma}\right)}}, \text{ где } \tau_1 = \frac{1}{\sqrt{\gamma\sigma}} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{\sigma}{\gamma}} \frac{1 + \alpha \frac{\lambda}{\sigma}}{\alpha - \frac{\lambda}{\gamma}} \right], \text{ и}$$

$$Y_{ex}(\delta = 0) = \exp(-\lambda\tau_2) \sqrt{\frac{1 + \alpha^2 \frac{\gamma}{\sigma}}{1 + \frac{\lambda^2}{\gamma\sigma}}}, \text{ где } \tau_2 = \frac{1}{\sqrt{\gamma\sigma}} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{\gamma}{\sigma}} \frac{\alpha - \frac{\lambda}{\gamma}}{1 + \alpha \frac{\lambda}{\sigma}} \right].$$

Ясно, что аналогичные условия возникновения катастроф можно предусмотреть и в других задачах линеаризованных моделей.

На рис. 5 и 6 представлены зависимости экстремальных значений $1-X$ и $2-Y$ от величины α для набора параметров $\lambda = 0,5$, $\gamma = 0,1$, $\sigma = 0,1$ и $\lambda = 0,9$, $\gamma = 0,5$, $\sigma = 0,1$, отобранных таким образом, чтобы выявить возможные чувствительные проявления катастрофических отклонений от стационарного решения. Графики показывают, что в зависимости от параметра α возможны нарушения пределов выживания для обоих взаимодействующих видов.

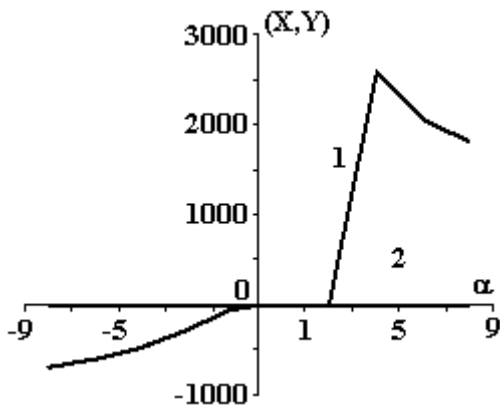


Рис.5. Отклонения, способные породить катастрофу исчезновения одного из видов в задаче хищник–жертва ($1 - X$, $2 - Y$)

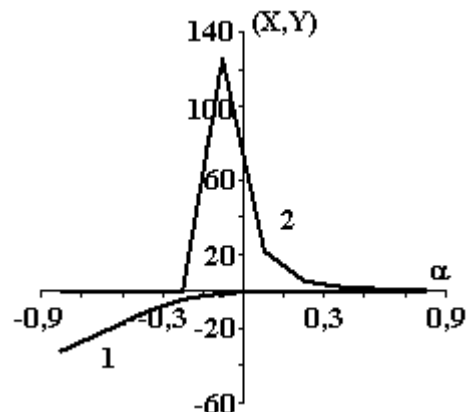


Рис.6. Отклонения, способные породить катастрофу исчезновения обоих видов в задаче хищник–жертва ($1 - X$, $2 - Y$)

Резюмируя изложенное, отметим, что на примере задачи хищник–жертва рассматривается ее линеаризованная модель, допускающая асимптотически устойчивую траекторию, сходящуюся в фокусе стационарного решения. Минимальное, полное количество параметров задачи равно шести (которые являются фундаментальными характеристиками). Фактически любое взаимодействие, наблюдаемое в природе, имеет в основе циклические повторения – замкнутые траектории на фазовой плоскости взаимодействующих видов. Это экспериментальный факт. Вопрос в том, можно ли ограничиться линеаризованной моделью, особенности которой были изучены еще Ляпуновым [4]. Нелинейная задача взаимосвязана с линеаризованной точкой стационарности, вблизи которой выполнена линеаризация.

Выявленные возможности проявления катастроф и выведенные критерии их определения в линеаризованных моделях служат своеобразным подходом к изучению развития популяций, отличающиеся от известной методики изучения режимов устойчивости решений. Ситуация катастроф проявляется в предельном, устойчивом фокусе, что не характерно даже для нелинейных задач.

Задача хищник–жертва, в основе которой лежит модель Лотки–Вольтерра, построенная по принципу скоростных уравнений с двумя степенями свободы, имеет множество аналогов, поэтому следует уточнить основы типовых задач взаимодействия видов. Динамику популяций отдельного вида следует построить методом скоростных уравнений взаимодействия изученного вида со средой. Человек взаимодействует со средой, изменяя природу самой среды. Однако в основном приближении задача сосуществования может быть сведена к задаче с двумя степенями свободы, к изучению лине-

аризованной модели шести параметров. Поэтому критерии описанных катастроф носят общий характер для задач сосуществования. Главное – к какой точке стационарности следует привязать параметры задачи и какова роль нелинейностей для них. Детализация многовидового взаимодействия приводит к увеличению степени характеристического уравнения, что является причиной усложнений анализа для определения критериев выживания видов.

Набор параметров линеаризованной модели определен стационарными точками первоначальной нелинейной задачи взаимодействия и сформировавшимися временами релаксаций в результате линеаризации. Возможности проявления катастроф зависят от точек стационарности и наборов их времени релаксаций.

Особый интерес представляет проявление катастроф в цикле клеточного обмена, автоколебательного процесса обеспечения клеток питательной средой. Нарушения обменного цикла между клеткой и окружающей ее средой являются причиной многих недугов жизнедеятельности живых организмов и болезней.

Любопытны обстоятельства взаимодействия и сосуществования противоречивых гипотез, конкурирующих систем, идеологий или теорий. Результаты анализа на основе линеаризованной модели могут служить прогнозом для конкурирующих сторон. Представляется, что линеаризованная модель взаимодействия и сосуществования не имеет признаков ограничений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
2. Ботошан Н.И., Болога М.К., Берзой С.Е. Клеточная модель электроплазмолита // Электронная обработка материалов. 2004. № 3. С. 60–64.
3. Хакен Г. Синергетика. М.: Ир, 1980. 404 с.
4. Ляпунов А.А. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892.

Поступила 27.09.05

Summary

Possibilities of catastrophes existence in the linearized model with two degree of freedom, having the solution of steady focus type, were studied. The essence of catastrophes is based on the criteria of extermination of fluctuation types near stationary points of phase space. Irregularities of self-oscillating process of cell metabolism, which have the same roots, are the cause of many illnesses of living organisms. A stationary set of the main parameters of the linearized model of interaction with two degree of freedom is presented. There is a strong dependence both on the original nonlinearity and the set of stationary points of the problem. The model can be used for forecasting of evolution of interaction and coexistence of concurrent systems.
