

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ ОБЪЕМНО ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия*

Введение. Еще в середине XVIII в. было обнаружено, что заряженная поверхность жидкости выбрасывает струйки, распадающиеся на отдельные капли [1]. В последующие годы этот феномен изучили как экспериментально [2], так и теоретически [3–6] и положили в основу многочисленных приложений [5–6]. Исследования последних десятилетий позволили выделить около десятка различных режимов электродиспергирования жидкостей [7–9]. Наблюдаемое разнообразие режимов связано как с реализацией в реальных экспериментах весьма широкого набора начальных и граничных условий [5–8], так и с варьированием физико-химических свойств жидкостей [8, 10], а также возможностью возбуждения множества комбинаций неосесимметричных мод осцилляций [6, 10–12].

Исследование осцилляций и устойчивости по отношению к распаду на отдельные капли объемно заряженных струй диэлектрической жидкости представляет интерес в связи с многочисленными приложениями, обусловленными получением потоков моно- и полидисперсных заряженных капель жидкостей с различными физико-химическими свойствами [5, 6, 13]. В целом ряде технических приложений необходимо получать потоки заряженных капель именно диэлектрических жидкостей [5, 8, 13–15], а потому понимание особенностей возбуждения осцилляций и разбиения на капли диэлектрических жидкостей важно. Поэтому проведение теоретического аналитического исследования нелинейных осцилляций объемно заряженной струи диэлектрической жидкости достаточно актуально.

Цель настоящей работы – найти аналитическое асимптотическое решение задачи о нелинейных осесимметричных осцилляциях струи объемно заряженной диэлектрической жидкости с нулевой электропроводностью во втором порядке малости по амплитуде начальной деформации и провести сравнение с ранее решенной задачей [10–12] о нелинейных осесимметричных осцилляциях поверхностно заряженной струи идеально проводящей жидкости. Все это будет сделано на основе метода многих масштабов, ранее использованного для расчета нелинейных осцилляций незаряженной струи [16].

1. Постановка задачи. Пусть имеется бесконечная цилиндрическая струя радиуса R идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости с массовой плотностью ρ , диэлектрической проницаемостью ϵ_d , коэффициентом поверхностного натяжения γ , однородно электрически заряженная с объемной плотностью μ , движущаяся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью \vec{U}_0 . Весь последующий анализ проведем в рамках модели «вмороженного» электрического заряда в инерциальной системе отсчета, начало цилиндрической системы координат (r, φ, z) которой движется вместе со струей со скоростью \vec{U}_0 вдоль оси симметрии невозмущенной струи: $\vec{U}_0 \parallel \vec{n}_x$, принимая за ось z . В выбранной системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $\vec{U}(r, t)$ полностью определяется возможными капиллярными осцилляциями ее поверхности. При обезразмеривании на радиус струи R коэффициент поверхностного натяжения γ и плотность жидкости ρ , амплитудное значение поля скоростей является величиной того же порядка малости, что и амплитуда осцилляций, которая мала по сравнению с радиусом струи.

Будем исследовать закономерности реализации нелинейных осцилляций струи, полагая, что уравнение ее свободной поверхности, возмущенной капиллярным волновым движением, записывается в виде

$$r(\varphi, z, t) = R + \xi(\varphi, z, t); \quad |\xi| \ll R,$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ – деформация поверхности струи, вызванная ее осцилляциями.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи в рамках модели потенциального течения состоит из уравнений гидродинамики и, в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской, уравнений электростатики:

$$\begin{aligned} \Delta \Psi &= 0; \\ \Delta \Phi_{ex} &= 0; \\ \Delta \Phi_{in} &= -4\pi \frac{\mu}{\varepsilon_d}; \end{aligned}$$

условий ограниченности:

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0: |\vec{U}| < \infty, \quad |\nabla \Phi_{in}| < \infty; \\ r \rightarrow \infty: |\nabla \Phi_{ex}| \rightarrow 0; \end{aligned}$$

гидродинамических граничных условий на свободной поверхности струи $r = R + \xi$, кинематического

$$-\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\nabla \Psi) \cdot \nabla [r - (R + \xi(\varphi, z, t))] = 0$$

динамического

$$-P(\vec{r}, t) + P_0 + P_\gamma - P_q = 0;$$

и граничных условий для электрического поля:

$$r = R + \xi: \quad \Phi_{in} = \Phi_{ex}, \quad \varepsilon_d \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{ex}}{\partial n}.$$

В выписанной математической формулировке задачи $P(\vec{r}, t) = -\rho \left[\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Psi)^2 \right]$ – гидродинамическое давление, связанное с потенциальным движением жидкости; $P_q(\vec{r}, t)$ – давление электрического поля на поверхность струи; $P_\gamma(\vec{r}, t) \equiv \gamma (\nabla \cdot \vec{n})$ – давление сил поверхностного натяжения; P_0 – постоянное давление внешней среды; $\Psi(\vec{r}, t)$ – потенциал поля скоростей; $\Phi(\vec{r}, t)$ – электростатический потенциал; нижние индексы “ex” и “in” характеризуют электрическое поле вне и внутри струи соответственно; \vec{n} – орт нормали к возмущенной свободной поверхности струи.

Задачу следует дополнить условием сохранения объема участка струи, длина которого равна длине волны λ :

$$\int_V r \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dt = \pi R^2 \cdot \lambda; \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq R + \xi(\varphi, z, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda. \end{cases}$$

Для замыкания задачи необходимо задать еще начальные условия, первое из которых определяет начальную деформацию свободной поверхности струи:

$$r(\varphi, z, 0) = R + a \cdot [\zeta^{(+)}(0) \cdot \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(0) \cdot \exp(im\varphi)] \cdot \exp(ikz) + O(\varepsilon^2);$$

здесь и далее не выписываются слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным; a – амплитуда волны. Второе начальное условие, как это принято в задачах о нелинейных волнах [10, 16], выбирается на финальной стадии решения таким образом, чтобы получающееся решение имело наименее громоздкий вид.

Дальнейший анализ проведем в безразмерных переменных, в которых основными единицами выбраны радиус струи R , коэффициент поверхностного натяжения γ и плотность жидкости ρ , сохраняя за всеми величинами их прежние обозначения.

2. Метод решения. Решение сформулированной задачи в рамках асимптотического подхода будем искать в виде разложений по малому параметру $\varepsilon \equiv (a/R)$ на основе метода многих масштабов

[10, 16] с точностью до второго порядка малости включительно. Искомые функции $\xi(\varphi, z, t)$, $\Psi(\vec{r}, t)$, $\Phi_{in}(\vec{r}, t)$ и $\Phi_{ex}(\vec{r}, t)$ представим в виде асимптотических разложений по степеням ε , полагая, что временная эволюция искомых функций определяется двумя временными масштабами: основным $T_0 = t$ и медленным $T_1 = \varepsilon \cdot t$:

$$\begin{aligned}\xi(\varphi, z, t) &= \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(\varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \xi^{(2)}(\varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Psi(\vec{r}, t) &= \varepsilon \cdot \Psi^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \Psi^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Phi_{in}(\vec{r}, t) &= \Phi_{in}^{(0)}(r) + \varepsilon \cdot \Phi_{in}^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \Phi_{in}^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3); \\ \Phi_{ex}(\vec{r}, t) &= \Phi_{ex}^{(0)}(r) + \varepsilon \cdot \Phi_{ex}^{(1)}(r, \varphi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \Phi_{ex}^{(2)}(r, \varphi, z, T_0) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

Считая, что волны, распространяющиеся по поверхности струи, бегут в положительном направлении оси OZ, форму свободной поверхности струи в произвольный момент времени можно записать в виде

$$r(\varphi, z, t) = 1 + \varepsilon \cdot \left[\zeta^{(+)}(T_1) \cdot \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(T_1) \cdot \exp(-im\varphi) \right] \cdot \exp(i\mathcal{G}) + O(\varepsilon^2);$$

$\mathcal{G} \equiv k \cdot z - \omega \cdot T_0$, где $\omega \equiv \omega_m(k)$ – частота волны с волновым числом k и азимутальным числом m ; $\zeta^{\pm}(T_1)$ – пока неизвестные комплексные функции, зависящие от медленного времени $T_1 \equiv \varepsilon \cdot t$.

3. Запись окончательных выражений. Не останавливаясь на математической процедуре отыскания решения из-за ее громоздкости, достаточно подробно описанной в [10, 16], выпишем сразу решение задачи.

Форма свободной поверхности струи в произвольный момент времени запишется соотношением

$$r(z, t) = 1 + \varepsilon \cdot \cos(kz - \omega t) + 0,5 \cdot \varepsilon^2 \left\{ -0,5 + a \cdot \cos[2(kz - \omega t)] \right\},$$

а выражения для гидродинамического потенциала и для потенциалов электрического поля внутри и вне струи выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{r}, t) &= \varepsilon \frac{\omega I_0(kr)}{k I_0'(k)} \sin(kz - \omega t) + 0,5 \cdot \varepsilon^2 \cdot b \cdot I_0(2kr) \cdot \sin[2(kz - \omega t)]; \\ \Phi_{in}(\vec{r}, t) &= -\frac{\pi\mu r^2}{\varepsilon_d} + \varepsilon \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d} g_{in} \frac{I_0(kr)}{I_0(k)} \cos(kz - \omega t) + \\ &\quad + 0,5 \cdot \varepsilon^2 c \cdot I_0(2kr) \cos[2(kz - \omega t)]; \\ \Phi_{ex}(\vec{r}, t) &= -\frac{\pi\mu}{\varepsilon_d} - 2\pi\mu \cdot \ln r + \varepsilon \cdot 2\pi\mu \cdot g_{ex} \frac{K_0(kr)}{K_0(k)} \cos(kz - \omega t) + \\ &\quad + 0,5 \cdot \varepsilon^2 \left\{ 2\pi\mu \left[-1 + g_{in} \cdot G_0(k)/\varepsilon_d - g_{ex} \cdot H_0(k) + (1+L) \ln r \right] + \right. \\ &\quad \left. + d \cdot K_0(2kr) \cdot \cos[2(kz - \omega t)] \right\};\end{aligned}$$

где

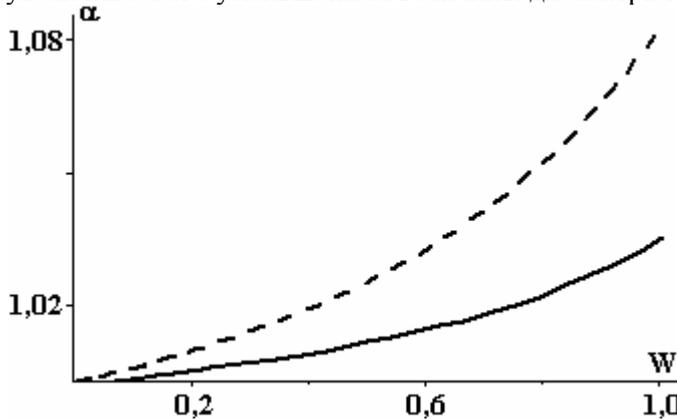
$$\begin{aligned}a &\equiv P/Q; \quad Q = -\varepsilon_d \cdot f_0(2k) \left[4\omega^2(k) - \omega^2(2k) \right]; \\ P &= -(Y_1 G_0(2k) + 2\omega \cdot X) \varepsilon_d \cdot f_0(2k) + W \cdot G_0(2k) \cdot \left\{ 2\varepsilon_d (L + H_0(2k)) + \right. \\ &\quad \left. + 0,5 (\varepsilon_d^2 - 1) G_0(2k) H_0(2k) + 2k^2 (g_{in} - g_{ex}) (2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1) H_0(2k)) - \right. \\ &\quad \left. - g_{in} G_0(k) \cdot [\varepsilon_d + 1 + (\varepsilon_d - 1) G_0(2k)] H_0(2k) + \right. \\ &\quad \left. + g_{ex} H_0(k) \cdot [3\varepsilon_d - 1 + \varepsilon_d (\varepsilon_d - 1) G_0(2k)] H_0(2k) \right\}; \quad b = \frac{2\omega a - X}{2k \cdot I_0'(2k)}; \\ c &= \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d \cdot I_0(2k) \cdot f_0(2k)} \left\{ [2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1) H_0(2k)] a - \varepsilon_d L - 2\varepsilon_d k^2 (g_{in} - g_{ex}) - H_0(2k) \cdot M \right\}; \\ d &= \frac{2\pi\mu}{K_0(2k) \cdot f_0(2k)} \left\{ [2 + (\varepsilon_d - 1) G_0(2k)] a - L - 2k^2 (g_{in} - g_{ex}) - G_0(2k) \cdot M \right\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X &= \omega(k) \cdot [2k^2 - G_0(k)] / G_0(k); \\
Y_1 &= 1 + 0,5k^2 + \omega^2(k) [k^2 - 3G_0^2(k)] / 2G_0^2(k) + W \cdot (2g_{in}G_0(k) - 1) / \varepsilon_d - \\
&\quad - \frac{\varepsilon_d - 1}{2\varepsilon_d} W [3 + k^2 - 4g_{ex}(k^2 - H_0(k)) + g_{ex}^2 H_0^2(k) - \varepsilon_d k^2 (g_{ex} - 1)^2]; \\
Y_2 &= 1 - 0,5k^2 + \omega^2(k) [k^2 - G_0^2(k)] / 2G_0^2(k) + W \cdot (2g_{in}G_0(k) - 1) / \varepsilon_d - \\
&\quad - \frac{\varepsilon_d - 1}{2\varepsilon_d} W \cdot [3 - k^2 + 4g_{ex}H_0(k) + g_{ex}^2 H_0^2(k) + \varepsilon_d k^2 (g_{ex} - 1)^2]; \\
L &\equiv 1 - g_{in}G_0(k) + g_{ex}H_0(k); \quad M \equiv 0,5(\varepsilon_d + 1) - g_{in}G_0(k) + \varepsilon_d g_{ex}H_0(k); \\
G_0(x) &\equiv x \cdot I'_0(x) / I_0(x); \quad H_0(x) \equiv x \cdot K'_0(x) / K_0(x);
\end{aligned}$$

$I_0(x)$ и $K_0(x)$ – модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода; штрихом обозначена производная от функции Бесселя по аргументу. Дисперсионное уравнение, связывающее частоту колебаний $\omega_m(k)$ с волновым числом k , получающееся при решении задачи первого порядка малости, имеет вид

$$\begin{aligned}
\omega_0^2(k) &= \frac{G_0(k)}{\varepsilon_d \cdot f_0(k)} \left\{ (k^2 - 1) \varepsilon_d \cdot f_0(k) + \right. \\
&\quad \left. + W \left[\varepsilon_d (4 + (\varepsilon_d - 3)G_0(k)) + (3\varepsilon_d - 1 + (\varepsilon_d - 1)^2 G_0(k)) H_0(k) \right] \right\}; \\
f_0(x) &\equiv \varepsilon_d \cdot G_0(x) - H_0(x); \quad W = \pi \mu^2.
\end{aligned}$$

4. Обсуждение полученных результатов. На рисунке представлена зависимость величины $\alpha \equiv a^d / a^c$ от параметра W (характеризующего отношение давления электрического поля собственного заряда на поверхность струи к давлению сил поверхностного натяжения) [10]). Из рисунка видно, что зависимость коэффициента a от параметра W несколько отличается от таковой для идеально проводящей жидкости. Интересно также отметить, что разница между величинами коэффициентов при нелинейных поправках для диэлектрической и идеально проводящей жидкостей увеличивается с уменьшением величины диэлектрической проницаемости жидкости.



Зависимость величины $\alpha \equiv a^d / a^c$ от параметра W – отношения коэффициента при нелинейной поправке в выражении для формы струи диэлектрической жидкости a^d к соответствующему коэффициенту при нелинейной поправке выражения для формы струи электропроводной жидкости a^c . Штрихом отмечены данные для $\varepsilon_d = 30$, сплошной линией – для $\varepsilon_d = 80$

Из выражения для коэффициентов a, b, c, d несложно отметить, что положение внутренних нелинейных резонансов, в окрестности которых происходит нелинейная перекачка энергии между модами, определяющееся условием обращения в ноль знаменателей a, b, c, d , для диэлектрической жидкости формально имеет такой же вид, что и для идеально проводящей:

$$4\omega_m^2(k) = \omega_{2m}^2(2k).$$

Однако следует учитывать, что дисперсионное уравнение, из которого рассчитываются зависимости $\omega_m^2(k)$ и $\omega_{2m}^2(2k)$, в рассматриваемых ситуациях диэлектрической и идеально проводящей жидкостей различаются, и при малых величинах диэлектрической проницаемости ε_d длины резонансных волн для диэлектрической жидкости и идеально проводящей могут заметно отличаться.

Заключение. Во втором порядке малости по амплитуде начальной деформации найдено аналитическое асимптотическое решение задачи о расчете нелинейных осесимметричных осцилляций однородно объемно заряженной струи идеальной несжимаемой жидкости. Анализ полученных результатов показал, что по сравнению с нелинейно осесимметрично осциллирующей заряженной струей идеально проводящей жидкости при равных электрических зарядах, приходящихся на единицу длины струи, нелинейные поправки для струи диэлектрической жидкости отличаются от нелинейных поправок для струи идеально проводящей жидкости незначительно: не более чем на 10%.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №05-08-01147-а и №06-01-00066-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baily A.G. Electrostatic spraying of liquids // Phys. Bull. 1084. V.35. № 4. P. 146–148.
2. Savart F. Memare sur la contitution veines liquides lancus par des orifices circulaires en mince paroi // Annal. chimic. 1833. Ser. 2. Vol. 53. N 3. P. 337–386.
3. Rayleigh, Lord. On the capillary phenomena of jets // Proc. Roy. Soc. London. 1879. V.29. № 196. P. 71–97.
4. Рэлей Дж. Теория звука. Т. 2. М., 1955.
5. Ентов В.М., Ярин А.Л. Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. 1984. Т. 17. С.112–197.
6. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Воронина Н.В., Егорова Е.В. Об осцилляциях и спонтанном распаде заряженных жидких струй // Электронная обработка материалов. 2006. № 6. С. 23–34.
7. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes // J. Electrostatics. 1990. V.25. P. 165–184.
8. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А. Классификация режимов работы электрогидродинамических источников жидко-капельных пучков (обзор) // Препринт ИМРАН № 25. Ярославль, 1993.
9. Shiryaeva S.O., Grigor'ev A.I. The semifenomenological classification of the modes of electrostatic dispersion of liquids // J. Electrostatics. 1995. V. 34. P. 51–59.
10. Белоношко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И. Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. 288 с.
11. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В. О спонтанном распаде заряженной струи вязкой электропроводной жидкости // Электронная обработка материалов. 2003. № 1. С. 38–143.
12. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Егорова Е.В. О некоторых особенностях нелинейного резонансного взаимодействия мод заряженной струи // Электронная обработка материалов. 2005. № 1. С. 42–50.
13. Монодиспергирование вещества: принципы и применение // Е.В. Аметистов, В.В. Блаженков, А.К. Городов и др.; Под ред. В.А. Григорьева. М., 1991.
14. Гиневский А.Ф. Особенности капиллярного распада струй заряженных диэлектриков // Исследование процессов и систем монодисперсного распада жидкости. Сб. н. тр. МЭИ. №119. М., 1986.
15. Гиневский А.Ф. Особенности капиллярного распада струй вязких заряженных диэлектрических жидкостей //Физико-технические проблемы монодисперсных систем. Сб. н. тр. МЭИ. № 185. М., 1988. С. 54–58.
16. Nayfeh F.H. Nonlinear stability of a liquid jet // Phys. Fluids. 1970. № 4. P. 841–847.

Поступила 16.03.07

Summary

It is found the solution of nonlinear axisymmetrical oscillations of a volumetrically charged jet of dielectric liquids. The value of nonlinear corrections amplitude to a solution for volumetrically charged jet of dielectric liquids changed in comparison with conductive liquids slightly.