

# Волны в стратифицированной по плотности двухслойной жидкости конечной толщины с заряженной границей раздела

А. И. Григорьев, М. С. Фёдоров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, e-mail: [grig@uniyar.ac.ru](mailto:grig@uniyar.ac.ru)

В аналитической асимптотической процедуре первого порядка малости исследованы закономерности реализации волнового движения в двухслойной стратифицированной по физико-химическим свойствам жидкости со свободной поверхностью и твёрдым дном. Показано, что наличие твердого дна усиливает эффект.

УДК 532.5

Феномен «мертвой воды», феномен передачи импульса между волнами, порождаемыми в многослойной стратифицированной по физико-химическим свойствам жидкости различными поверхностями, исследовался только для бесконечно глубокой жидкости [1]. Физическая суть этого эффекта заключается в том, что в стратифицированной жидкости амплитуды волнового движения, возникающего на границе стратификации, могут существенно превышать амплитуды волн на свободной поверхности [1–2], и энергия, например винтов судна, идёт на раскачку волн на границе стратификации, тогда как на поверхности волнение остаётся малозначительным, а судно «вмерзает» в поверхность спокойной воды. В естественных условиях феномен для гравитационных волн наблюдается в северных морях при таянии льдов, когда на поверхности солёной воды образуется лужа не смешивающейся с ней более лёгкой пресной. Этот феномен вызывает интерес [3–6] в связи с предсказанием существования аналогичного эффекта в диапазоне капиллярных волн. Наличие на одной из границ электрического заряда приводит к смещению области реализации эффекта в сторону реальных значений коэффициента поверхностного натяжения [3, 7]. Влияние на эффект наличия твёрдого дна, хотя физически и очевидно, до сих пор не исследовано.

## 1. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Пусть имеются два слоя идеальных несжимаемых несмешиваемых жидкостей, из них верхний – диэлектрик с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ , характеризуется плотностью  $\rho_1$  и толщиной  $h_1$ , а аналогичные характеристики нижнего идеального проводника, лежащего на твёрдом дне слоя, –  $\rho_2$ ,  $h_2$ , причем  $\rho_2 > \rho_1$ . Введём декартову систему координат, ось OZ которой направ-

лена вверх против силы тяжести ( $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{e}_z$ , а  $\mathbf{e}_z$  – орт декартовой системы координат), а плоскость  $z = 0$  совпадает с границей раздела слоёв в невозмущённом состоянии. При этом поверхность дна описывается уравнением  $z = -h_2$ ; верхний слой занимает пространство  $0 \leq z \leq h_1$ , а нижний –  $-h_2 \leq z \leq 0$ . На границе раздела жидкостей равномерно распределён электрический заряд, создающий в области пространства  $z > 0$  электрическое поле с напряжённостью  $E_*$ .

Проанализируем взаимодействие капиллярно-гравитационных волн, существующих в описанной системе на свободной поверхности и границе раздела сред, которые характеризуются коэффициентами поверхностного натяжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно.

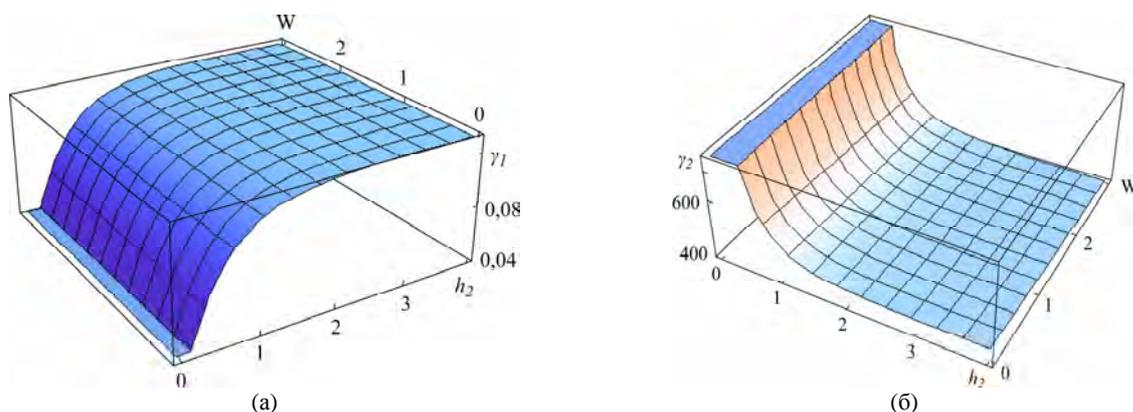
Уравнения, описывающие форму возмущённых волновым движением свободной поверхности верхней жидкости и границы раздела слоёв, запишем в виде

$$\begin{aligned} F_1(x, z, t) &\equiv z - h_1 - \xi_1(x, t) = 0; \\ F_2(x, z, t) &\equiv z - \xi_2(x, t) = 0, \end{aligned}$$

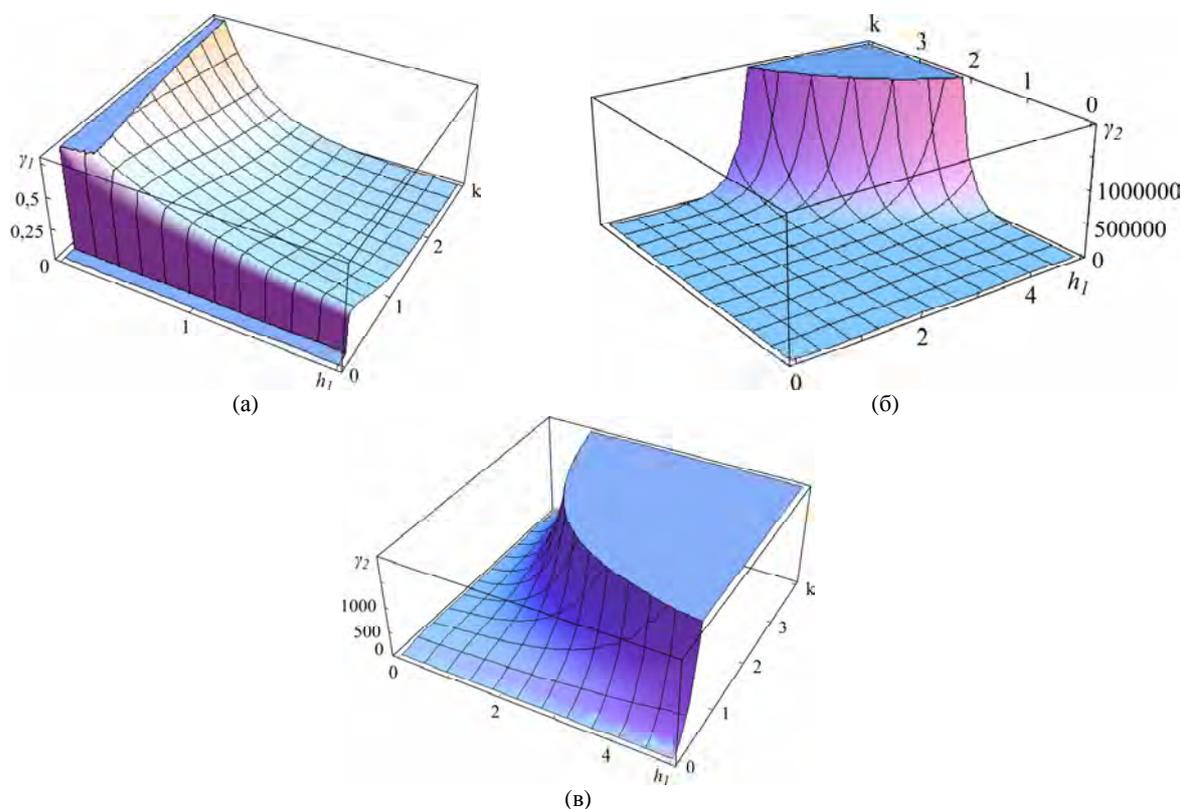
где  $\xi_1(x, t)$  и  $\xi_2(x, t)$  – малые отклонения от невозмущённых уровней  $z = h_1$  и  $z = 0$  соответственно ( $|\xi_1| \ll h_1$ ,  $|\xi_2| \ll h_2$ ), амплитуда которых ( $|\xi_1| \sim |\xi_2|$ ) принимается в качестве малого параметра задачи.

Математическая формулировка линеаризованной задачи имеет вид

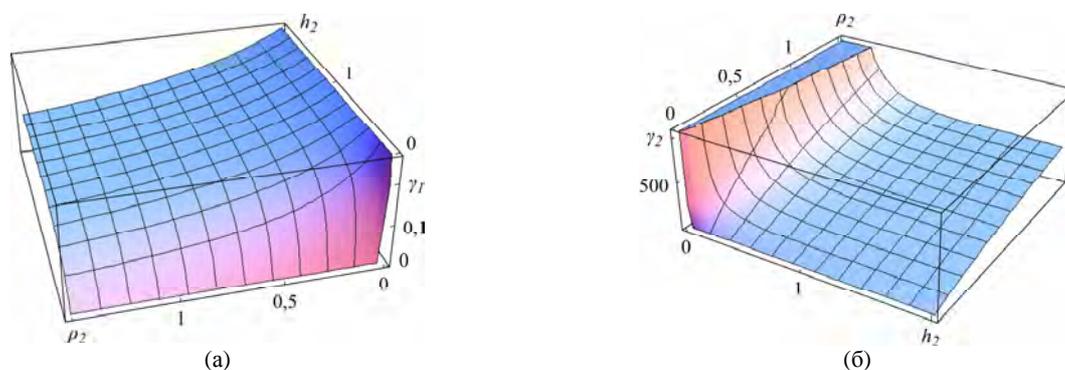
$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} &= -\nabla \left( \frac{P_j}{\rho_j} \right) + \frac{\mathbf{g}}{\rho_j}; \quad \text{div} \mathbf{v}_j = 0; \quad (j = 1; 2); \quad \Delta \Phi = 0; \\ z = -h_2: \quad (\mathbf{n}_2, \mathbf{v}_2) &= 0; \\ z = h_1 + \xi_1(x, t): \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} &+ (\mathbf{v}_1, \nabla) F_1 = 0; \quad P_1 - P_a - P_{\sigma_1} + P_{1E} = 0; \end{aligned}$$



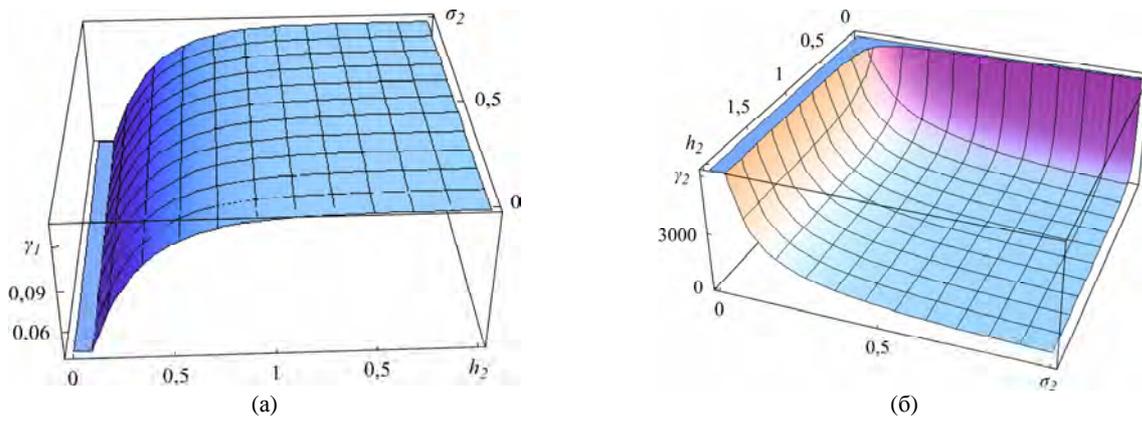
**Рис. 1.** Зависимости отношения амплитуд  $\gamma_j$  от толщины нижнего слоя  $h_2$  и электрического параметра  $W$ : (а) – для первого корня дисперсионного уравнения (для которого реализуется режим «однородной» жидкости); (б) – для второго корня дисперсионного уравнения (для которого реализуется режим «мертвой воды»), рассчитанные при  $\rho_1 = 1$ ;  $\rho_2 = 1,02$ ;  $g = 1$ ;  $\sigma_1 = 60$ ;  $\sigma_2 = 1$ ;  $h_1 = 1$ ;  $k = 2$ ;  $\epsilon = 80$ .



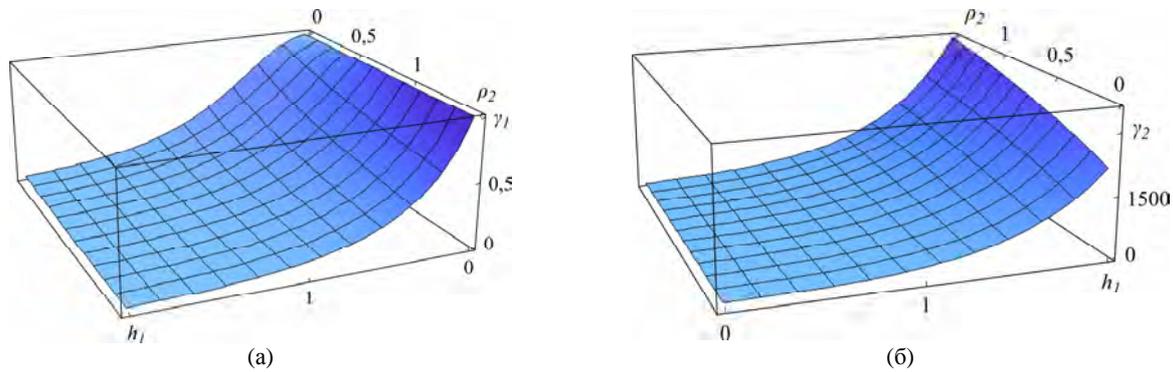
**Рис. 2.** Зависимости отношения амплитуд  $\gamma_j$  от волнового числа  $k$  и толщины верхнего слоя жидкости  $h_1$ : (а) – для первого корня дисперсионного уравнения (для которого реализуется режим «однородной» жидкости); (б) – для второго корня дисперсионного уравнения (для которого реализуется режим «мертвой воды»); (в) – то же, что на рис. 2б, но приведенное в большем масштабе, рассчитанные при  $\rho_1 = 1$ ;  $\rho_2 = 1,02$ ;  $g = 1$ ;  $\sigma_1 = 60$ ;  $\sigma_2 = 1$ ;  $h_2 = 1$ ;  $W = 3$ ;  $\epsilon = 80$ .



**Рис. 3.** Зависимости отношения амплитуд  $\gamma_j$  от плотности нижней жидкости  $\rho_2$  и её толщины  $h_2$ : (а) – для первого корня дисперсионного уравнения (для которого реализуется режим «однородной» жидкости); (б) – для второго корня дисперсионного уравнения (для которого реализуется режим «мертвой воды»), рассчитанные при  $\rho_1 = 1$ ;  $g = 1$ ;  $\sigma_1 = 60$ ;  $\sigma_2 = 1$ ;  $h_1 = 1$ ;  $k = 2$ ;  $W = 3$ ;  $\epsilon = 80$ .



**Рис. 4.** Зависимости отношения амплитуд  $\gamma_j$  от величины коэффициента поверхностного натяжения границы раздела жидкостей  $\sigma_2$  и толщины нижнего слоя жидкости  $h_2$ : (а) – для первого корня дисперсионного уравнения (для которого реализуется режим «однородной» жидкости); (б) – для второго корня дисперсионного уравнения (для которого реализуется режим «мертвой воды»), рассчитанные при  $\rho_1 = 1$ ;  $\rho_2 = 1,02$ ;  $g = 1$ ;  $\sigma_1 = 60$ ;  $h_1 = 1$ ;  $k = 2$ ;  $W = 3$ ;  $\varepsilon = 80$ .



**Рис. 5.** Зависимости отношения амплитуд  $\gamma_j$  от плотности нижней жидкости  $\rho_2$  и толщины слоя верхней жидкости  $h_1$ : (а) – для первого корня дисперсионного уравнения (для которого реализуется режим «однородной» жидкости); (б) – для второго корня дисперсионного уравнения (для которого реализуется режим «мертвой воды»), рассчитанные при  $\rho_1 = 1$ ;  $g = 1$ ;  $\sigma_1 = 60$ ;  $\sigma_2 = 1$ ;  $h_2 = 1$ ;  $k = 2$ ;  $W = 3$ ;  $\varepsilon = 80$ .

$$z = \xi_2; \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} + (\mathbf{v}_2, \nabla) F_2 = 0; \quad (\mathbf{n}_1, \mathbf{v}_1) = -(\mathbf{n}_1, \mathbf{v}_2);$$

$$P_2 - P_1 - P_{\sigma_2} + P_{2E} = 0; \quad \Phi = \text{Const}; \quad z \rightarrow \infty:$$

$$\nabla \Phi \rightarrow -\mathbf{E}_*; \quad t = 0:$$

$$\xi_1(x, t) = \xi_1 \cos(k_1 x); \quad \partial_t \xi_1(x, t) = 0;$$

$$\xi_2(x, t) = \xi_2 \cos(k_2 x); \quad \partial_t \xi_2(x, t) = 0,$$

где  $\mathbf{v}_j$  – поля скоростей в верхней и нижней жидкостях;  $\Phi$  – электрический потенциал;  $\mathbf{n}_j$  – вектора нормали к границам раздела;  $P_j$  – гидродинамические давления в слое верхней и нижней жидкости;  $P_a$  – давление атмосферное;  $P_{jE}$  – давление электрического поля;  $P_{\sigma_j} = \sigma_j \cdot \text{div} \mathbf{n}_j$  – капиллярные давления на свободной поверхности и границе раздела сред соответственно.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Решение сформулированной задачи в первом порядке малости по безразмерной амплитуде не представляет трудностей и может быть найдено по аналогии с [3–6]. Выражения для возмущений  $\xi_i$  запишем в виде

$$\xi_1 = \delta(t) \exp(ikx) + (k.c.); \quad \xi_2 = \eta(t) \exp(ikx) + (k.c.).$$

Здесь и далее аббревиатура (*k.c.*) обозначает слагаемые, комплексно сопряжённые к выписанным. Подстановка в систему проекта решения в виде  $\delta(t) = d \cdot \exp(i\omega t)$ ,  $\eta(t) = c \cdot \exp(i\omega t)$  позволяет получить выражение для отношения амплитуд волн на различных поверхностях раздела:

$$\frac{\eta(t)}{\delta(t)} \equiv \gamma_j(\omega_j) \equiv - \frac{\left( \frac{kW(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon[\varepsilon + \text{th}(kh_1)]} + g\rho_1 - k^2\sigma_1 - \frac{\rho_1}{k \text{th}(kh_1)} \omega_j^2 \right)}{\left( \frac{\rho_1}{k \text{sh}(kh_1)} \omega_j^2 + \frac{kW(\varepsilon-1)}{\varepsilon[\varepsilon + \text{th}(kh_1)] \text{ch}(kh_1)} \right)};$$

$$(j = 1; 2);$$

$$W \equiv \varepsilon E_*^2 / 4\pi,$$

где индекс  $j$  нумерует корни дисперсионного уравнения, которое имеет биквадратный вид:

$$\omega^4 + \frac{A_2}{A_1} \cdot \omega^2 + \frac{A_3}{A_1} = 0;$$

$$A_1 = -\frac{\rho_1^2}{k^2 \text{sh}(kh_1)} + \frac{\rho_1}{k \text{th}(kh_1)} \left( \frac{\rho_1}{k \text{th}(kh_1)} + \frac{\rho_2}{k \text{th}(kh_2)} \right);$$

$$A_2 = -\left( gk\rho_1 + k^3\sigma_1 - \frac{k^2W(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon[\varepsilon + \text{th}(kh_1)]} \right) \left( \frac{\rho_1}{\text{th}(kh_1)} + \frac{\rho_2}{\text{th}(kh_2)} \right) +$$

$$+ \frac{\rho_1}{\text{th}(kh_1)} \left( gk(\rho_1 - \rho_2) - k^3\sigma_2 + \frac{k^2W[1 + \varepsilon \text{th}(kh_1)]}{\varepsilon[\varepsilon + \text{th}(kh_1)]} \right);$$

$$A_3 = - \left( gk\rho_1 - k^3\sigma_1 + \frac{k^2W(\varepsilon-1)^2}{\varepsilon[\varepsilon + \text{th}(kh_1)]} \right) \\ \left( gk(\rho_1 - \rho_2) - k^3\sigma_2 + \frac{k^2W[1 + \varepsilon\text{th}(kh_1)]}{\varepsilon[\varepsilon + \text{th}(kh_1)]} \right) + \\ + \left( \frac{k^2W(\varepsilon-1)}{\varepsilon[\varepsilon + \text{th}(kh_1)]\text{ch}(kh_1)} \right)^2.$$

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЁТОВ

В рассматриваемой системе могут реализовываться два режима волновых движений, соответствующих двум корням –  $\omega_1^2(k)$  и  $\omega_2^2(k)$  биквадратного дисперсионного уравнения:

$$\omega_1^2 = -\frac{1}{2A_1} \left( A_2 + \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3} \right);$$

$$\omega_2^2 = -\frac{1}{2A_1} \left( A_2 - \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3} \right).$$

В одном из режимов амплитуда внутренней волны (волны на границе стратификации)  $\eta(t)$  меньше амплитуды  $\delta(t)$  внешней волны (на свободной поверхности) примерно в  $\exp(-kh_1)$  раз, то есть волновое возмущение экспоненциально затухает по мере увеличения глубины, как в однородной жидкости. Второй режим, при котором амплитуда внутренней волны  $\eta(t)$  существенно превышает амплитуду внешней  $\delta(t)$ , характерен именно для стратифицированной жидкости. Волновое движение в этом режиме и получило название эффекта «мёртвой воды».

На рис. 1а и б приведены зависимости отношения амплитуд  $\gamma_j$  от глубины нижнего слоя жидкости  $h_2$  и параметра  $W$  в двух описанных режимах волнового движения. Видно, что как в режиме «мёртвой воды», так и в режиме «однородной» жидкости отношение амплитуд заметно зависит от глубины  $h_2$  только при малых  $h_2$ , и эта зависимость приходится на длинные волны (малые значения волнового числа). От параметра  $W$  отношение амплитуд  $\gamma_j$  практически не зависит.

Из рис. 2, на котором приведена зависимость отношения амплитуд  $\gamma_j$  от толщины верхнего слоя  $h_1$  и волнового числа  $k$ , видно, что в режиме «однородной» жидкости заметно зависит от  $h_1$  и  $k$  только при малых их величинах, а в режиме «мёртвой воды» сильная зависимость от  $h_1$  и  $k$  имеет место при больших  $h_1$  и  $k$ . На рис. 2в приведена та же зависимость, что и на рис. 2б, но в более крупном масштабе.

Из рис. 3 видно, что отношение амплитуд  $\gamma_j$  убывает с ростом плотности нижней среды  $\rho_2$  в режиме «однородной» жидкости и увеличивается в режиме «мёртвой воды».

На рис. 4 приведены зависимости отношения амплитуд волн  $\gamma_j$  от толщины нижнего слоя  $h_2$  и

коэффициента поверхностного натяжения поверхности раздела  $\sigma_2$ . Несложно видеть, что в режиме «однородной» жидкости зависимость от  $\sigma_2$  отсутствует, а с уменьшением толщины  $h_2$  отношение амплитуд уменьшается. В режиме «мёртвой воды» отношение амплитуд растёт с уменьшением и  $h_2$ , и  $\sigma_2$ .

На рис. 5 приведены зависимости отношения амплитуд волн  $\gamma_j$  от толщины верхнего слоя  $h_1$  и плотности нижней жидкости  $\rho_2$ . Зависимости от плотности жидкости оказываются слабыми в обоих случаях, а зависимости от толщины слоя верхней жидкости – противоположными.

Расчеты показывают, что наличие твердого дна усиливает проявление эффекта «мёртвой воды».

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 09-01-00084.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л.Н. О волнах на поверхности раздела двух жидкостей с применением к явлению «мертвой воды». *Журнал геофизики*. 1934, **4**(3), 332–367.
2. Сретенский Л.Н. *Теория волновых движений жидкости*. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Федоров М.С. Капиллярный аналог эффекта «мертвой воды» в стратифицированной жидкости с заряженной границей раздела сред. *ЖТФ*. 2010, **80**(7), 8–17.
4. Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О. Волновое движение в поле силы тяжести на свободной поверхности и на границе стратификации слоисто-неоднородной жидкости. Нелинейный анализ. *Изв. РАН. МЖГ*. 2010, **74**(5), 130–140.
5. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Фёдоров М.С. Взаимодействие гравитационных волн, бегущих по различным поверхностям раздела в слоисто-неоднородной жидкости. *Электронный журнал «Исследовано в России»*. 2010, (20), 260–268. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2010/020.pdf>.
6. Григорьев А.И., Фёдоров М.С., Ширяева С.О. Нелинейный анализ особенностей взаимодействия капиллярных волн конечной амплитуды в слоисто-неоднородной жидкости. *ЖТФ*. 2011, **81**(11), 31–39.
7. Григорьев А.И., Фёдоров М.С., Ширяева С.О. Влияние электрического поля на капиллярный эффект «мертвой воды». *ЖТФ*. 2012, **82**(6), 9–19.

Поступила 12.03.12

### Summary

In analytical asymptotical procedure of first power of smallness the regulations of realization of a waves motion are studied in twolayered liquids stratified with regard to their physico-chemical properties with a free surface and hard bottom. It is shown that existence of hard bottom enhances the effect.