С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, П.В. Мокшеев

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская,14, г. Ярославль, 150000, Россия

Введение. Расчет равновесных форм и устойчивости вращающихся заряженных капель представляет интерес в связи с изучением процессов в грозовых облаках, воронках смерчей и в других заряженных жидко-капельных системах естественного и искусственного происхождения [1–4]. Исследование устойчивости капель в различных силовых полях необходимо для понимания физических закономерностей возникновения и существования смерчей и грозовых облаков. Ввиду многочисленных технических и технологических приложений, в которых вращающаяся заряженная капля встречается как основной физический объект, исследование устойчивости капель непосредственно связано с изучением временной эволюции нелинейно осциллирующих капель, механизмов реализации их неустойчивости и закономерностей распада при силовых воздействиях [4–7]. Так, Е. Тринч и Т. Ванг [7], исследовавшие возбуждаемые акустическим полем осцилляции большой амплитуды капель, подвешенных в акустическом подвесе, выяснили, что осцилляции большой амплитуды весьма трудно возбудить из-за появления на поверхности капли неосесимметричной бегущей волны, которая в конце концов приводила к вращению капли как целого. Такой же эффект проявлялся и в экспериментах Н. Якоби и др. [8] со свободно висящими в условиях невесомости каплями, осцилляции большой амплитуды которых также генерировались акустическим полем. Корректное истолкование подобных экспериментов должно отталкиваться от известной равновесной формы заряженной вращающейся капли.

1. Постановка задачи. Пусть капля идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения σ, массовой плотностью ρ, имеющая заряд Q, вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\Omega}$ в вакууме. Будем исследовать устойчивость капли в первом порядке малости по отношению амплитуды равновесной деформации исходной сферической формы капли, вызванной ее вращением, к радиусу R. Все рассмотрение проведем в неинерциальной системе отсчета, вращающейся вместе с каплей, в сферической системе координат, начало координат которой совпадает с центром масс капли, а полярный угол ϑ отсчитывается от положительного направления оси вращения. Всю описанную систему, состоящую из вращающейся капли вместе с окружающим ее электрическим полем собственного заряда, будем считать замкнутой.

Как показано в [9], равновесная форма вращающейся заряженной капли в линейном приближении по амплитуде равновесной деформации является сплюснутым вдоль оси вращения сфероидом. Уравнение свободной поверхности капли, возмущенной осесимметричным капиллярным волновым движением теплового происхождения (т.е. порождаемым тепловыми движениями молекул жидкости [10]), будет иметь вид:

$$r = r(\vartheta) + \xi(\vartheta, t); \qquad \boldsymbol{r(\vartheta)} \equiv R\left(1 - e^2 \cdot P_2(\mu)/3\right); \qquad \mu \equiv \cos(\vartheta);$$

$$e^2 \equiv \frac{\rho \cdot \Omega^2 \cdot R^3}{4\sigma \cdot (1 - W)} \ll 1; \quad W = \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}; \quad |\xi| << 1,$$

где $P_2(\mu)$ – полином Лежандра; функция $\xi(\vartheta, t)$ описывает деформацию равновесной сфероидальной формы вращающейся заряженной капли, связанную с осцилляциями капли под действием сил поверхностного натяжения. Амплитуда деформации $|\xi(\vartheta, t)|$ имеет величину $\sim \sqrt{kT/\sigma}$, где k – коэффициент Больцмана; T – абсолютная температура. Безразмерный параметр W характеризует устойчивость изолированной сферической капли электропроводной жидкости по отношению к собственному заряду [10]: капля претерпевает неустойчивость при $W \geq 1$.

Движение жидкости в капле, связанное с осцилляциями ее поверхности, будем полагать потенциальным с потенциалом поля скоростей $\psi\left(\vec{r},t\right)$, а электрическое поле собственного заряда капли - электростатическим с потенциалом $\Phi\left(\vec{r},t\right)$. Причем потенциальность электрического поля имеет место как в окрестности невозмущенной сфероидальной поверхности капли (при $\xi\left(\vartheta,t\right)\neq 0$), так и при наличии зависящей от времени деформации (при $\xi\left(\vartheta,t\right)\neq 0$), поскольку характерная скорость изменения рельефа поверхности капли ($\approx \nabla\psi\left(\vec{r},t\right)$ много меньше скорости света в вакууме *c*: $\nabla\psi\left(\vec{r},t\right) << c$. Тогда математическая формулировка задачи об исследовании устойчивости заряженной вращающейся капли будет иметь вид

$$\Delta\psi\left(\vec{r},t\right);\ \Delta\Phi\left(\vec{r},t\right)=0;$$

$$r\to 0:\quad \psi\left(\vec{r},t\right)\to 0;$$

$$r\to\infty:\Phi\left(\vec{r},t\right)\to 0;$$

$$r=r\left(\vartheta\right)+\xi\left(\vartheta,t\right):\Phi\left(\vec{r},t\right)=\Phi_S\left(\vec{r},t\right);$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\vec{V}\cdot\nabla\xi\left(\vartheta,t\right)\approx\frac{\partial\psi}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\frac{\partial\xi}{\partial\vartheta};\qquad p+p_\Omega+p_Q=p_\sigma,$$

где $p=-\left(\partial\psi/\rho\cdot\partial t\right)$ – гидродинамическое давление внутри капли, связанное с движением жидкости; p_Ω– давление на свободную поверхность капли центробежных сил, связанных с вращением капли:

$$p_\Omega=\int\limits_0^{r(\vartheta)+\xi(\vartheta,t)}\rho\Omega^2 x dx\equiv\frac{1}{2}\rho\Omega^2\left[r(\vartheta)+\xi(\vartheta,t)\right]^2;$$

$p_Q=-(-\nabla\Phi)^2/8\pi$ – давление электрического поля собственного заряда на свободную поверхность капли; $p_\sigma=\sigma\cdot div_S\vec{n}$ – давление сил поверхностного натяжения, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к свободной поверхности капли; $\Phi_S(t)$ – постоянное вдоль поверхности капли значение электрического потенциала.

Кроме того, форма поверхности капли должна удовлетворять условиям неизменности объема и неподвижности центра масс:

$$\int\limits_V r^2\cdot dr\cdot d\mu\cdot d\varphi=-\frac{4\pi}{3}R^3;\qquad V=\left[0\le r\le r\left(\vartheta\right)+\xi(\vartheta,t),\ 0\le\vartheta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\right];$$

$$\int\limits_V \vec{e}_r\cdot r^3\cdot dr\cdot d\mu\cdot d\varphi=0,$$

которые позволяют найти ограничения снизу на спектр мод, принимающих участие в формировании формы свободной поверхности капли, условием $n\ge 2$ [10, 11]. При осцилляциях капли также должен оставаться неизменным ее полный электрический заряд:

$$\oint\limits_S(\vec{n}\bullet\nabla\Phi)r^2\cdot d\mu\cdot d\varphi=-4\pi Q;\qquad S=\left[r=r\left(\vartheta\right)+\xi(\vartheta,t),0\le\vartheta\le\pi,0\le\varphi\le 2\pi\right].$$

2. Решение сформулированной задачи. Дальнейший анализ проведем в соответствии со стандартной процедурой, подробно описанной в [1, 4, 10, 12], сводящейся к линеаризации задачи в окрестности сферической формы капли, отысканию неизвестных функций $\xi\left(\vartheta,t\right)$, $\psi\left(\vec{r},t\right)$, $\Phi\left(\vec{r},t\right)$ в виде бесконечных рядов по полиномам Лежандра и получению дисперсионного уравнения задачи из условия совместности гидродинамических граничных условий на свободной поверхности жидкости.

В итоге решение задачи будем искать в виде

$$\xi(\vartheta,t)=\sum_{n=2}^{\infty}A_n\cdot P_n(\mu)\cdot\exp(i\omega t);$$

$$\psi(r,\vartheta,t)=\sum_{n=2}^{\infty}C_n\cdot r^n\cdot P_n(\mu)\cdot\exp(i\omega t);$$

$$\Phi(r,\vartheta,t)=\sum_{n=2}^{\infty}D_n\cdot r^{-(n+1)}\cdot P_n(\mu)\cdot\exp(i\omega t).$$

При записи этих выражений было учтено, что гидродинамический потенциал поля скоростей должен быть ограничен в центре капли, а потенциал электростатического поля, связанного с осцилляциями поверхности заряженной капли, должен стремиться к нулю на бесконечности. В выписанных проектах решений A_n, C_n, D_n – неизвестные коэффициенты.

Удовлетворяя гидродинамическим граничным условиям на свободной поверхности жидкости, найдем связь между коэффициентами A_n, C_n, D_n, выражая C_n и D_n через A_n, и выпишем выражения для давлений p, p_Ω, p_Q и p_σ для сферической поверхности капли:

$$r=R:\quad p=-\rho\frac{\partial\psi(r,\vartheta,t)}{\partial t}=\omega^2\cdot R\cdot\rho\cdot\exp(i\omega t)[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\{A_n+$$

$$+\frac{e^2}{3}\{A_{n+2}\frac{3(n+1)(n^2+n-4)}{2(3+2n)(5+2n)}+A_n\frac{(n+1)(n^2-n-3)}{(2n-1)(2n+3)}+A_{n-2}\frac{3(-1)^{4(2-n)}n(n-1)^2}{2(2n-3)(2n-1)}\}];$$

$$p_\Omega=-\frac{2}{3}R\cdot\rho\cdot\Omega^2\cdot\exp(i\omega t)[\sum_{n=2}^{\infty}(A_n(-3\frac{n^2+n-1}{(2n-1)(2n+3)})+$$

$$+A_{n+2}(\frac{3}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{(2n+5)(2n+3)}+A_{n-2}(\frac{3(-1)^{8-4n}}{2}\frac{n(n-1)(n+2)}{(2n-1)(2n-3)})P_n(\mu)];$$

$$p_Q=\frac{Q^2}{8\pi R^4}+\frac{Q^2}{4\pi R^5}\{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\cdot A_n\cdot P_n(\mu)-$$

$$-e^2\cdot\exp(i\omega t)[\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(n+1)(n+2)(n-7)}{2(3+2n)(5+2n)}A_{n+2}+\frac{n(n+1)(n-4)}{3(3+2n)(2n-1)}A_n+$$

$$+\frac{(-1)^{4(2-n)}n(n-1)(n-5)}{2(n-3)(2n-1)}A_{n-2})P_n(\mu)]\};$$

$$p_\sigma=\frac{2\sigma}{R}-\frac{4\sigma}{3R}e^2P_2(\mu)+[\frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+2)A_nP_n(\mu)]+$$

$$+\frac{2\sigma}{3R^2}e^2\exp(i\omega t)[\sum_{n=2}^{\infty}(A_{n+2}\frac{3(n+1)(n+2)(n^2+5n+10)}{2(2n+3)(2n+5)}+$$

$$+A_n\frac{n(n+1)(n^2+n-4)}{(2n+3)(2n-1)}+A_{n-2}\frac{3(-1)^{4(2-n)}n(n-1)(n^2-3n+6)}{2(2n-3)(2n-1)})P_n(\mu)].$$

Наконец, подставив эти выражения в условие баланса давлений на свободной поверхности капли (динамическое граничное условие) и воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра, получим дисперсионное уравнение задачи, которое в безразмерных переменных, где $R=\sigma=\rho=1$ (то есть за основные единицы выбраны радиус капли R, коэффициент поверхностного натяжения σ и плотность жидкости ρ), имеет вид

$$\omega^2=n(n-1)[(n+2)-W]+$$

$$+e^2[W\frac{n^4+17n^2+21n-21}{3(3+2n)(2n-1)}-\frac{(n+2)(n^4-5n^3+4n^2+25n-9)}{3(3+2n)(2n-1)}].$$

Условием реализации неустойчивости капли является прохождение квадрата частоты ω^2 через ноль в область отрицательных значений. Тогда для самой частоты получим два комплексно сопряженных решения ($\omega_{1,2}=\pm i\gamma$), одно из которых будет соответствовать затуханию движений с декрементом $-\gamma$, а второе – их нарастанию с инкрементом +γ. Приравнивая в полученном дисперсионном уравнении квадрат частоты нулю, найдем критическую для реализации неустойчивости капли связь между параметрами W, n, e^2. В приближении $e^2 \ll 1$ обсуждаемую зависимость можно записать в простом виде:

$$W_{cr} = (n+2) + e^2 \frac{5n^4 + 23n^3 + 47n^2 + 30n - 24}{3n(4n^3 - 7n + 3)}.$$

Несложно отметить, что для произвольных номеров мод критическое значение параметра W с ростом e^2 увеличивается.

Сказанное означает, что наличие вращения у капли приводит к увеличению ее устойчивости по отношению к осесимметричным осцилляциям, что совпадает с ранее полученными результатами численных [13] и аналитических исследований [12,14], в которых сплюснутая сфероидальная форма капли не обеспечивалась физическим воздействием, как в настоящей работе, а задавалась виртуально.

Заключение. Равновесная форма заряженной вращающейся капли в широком диапазоне угловых скоростей и зарядов капли может быть аппроксимирована сфероидом, сплюснутым вдоль оси вращения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №06-01-00066-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорьев А.И., Григорьев О.А.* О влиянии вращения и электрического заряда на устойчивость сферической капсулы // Электронная обработка материалов. 1991. № 3. С. 41–44.
2. *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* О природе электрических явлений в воронке смерча // ЖТФ. 1986. Т.56. Вып.10. С.1985–1987.
3. *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* The possible physical mechanism of initiation and growth of lightning // Physica Scripta. 1996. V.54. P. 660–666.
4. *Brown R.A., Scriven L.E.* The shape and stability of rotating liquid drop // Proc. R. Soc., London, 1980. V.A371. P.331–357.
5. *Natarajan R., Brown R.A.* Third-order resonance effects and the nonlinear stability of drops oscillations // J. Fluid Mech. 1987. V.183. P.95–121.
6. *Natarajan R., Brown R.A.* The role of three-dimensional shapes in the break-up charged drops // Proc. R. Soc., London. 1987. V.A410. P.209–227.
7. *Trinch E., Wang T.G.* Large amplitude free and driven drop-shape oscillations: experimental observations // J. Fluid Mech. 1982. V.122. P.315–338.
8. *Jakobi N., Croonquist A.P., Elleman D.D. Wang T.G.* Acoustically induced oscillations and rotation of a large drop in Space // Proc. 2-nd Int. Colloq. on Drop and Bubbles. Pasadena: 1982. JPL Publication 82-7. P.31.
9. *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Мокшеев П.В.* Равновесная форма заряженной капли, вращающейся вокруг своей оси симметрии // Электронная обработка материалов. 2006. № 4. С. 46–52.
10. *Schweizer J.W., Hanson D.N.* Stability limit of charged drops // J. Coll. Int. Sci. 1971. V.35. № 3. P.417–423.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
12. *Григорьев А.И., Фирстов А.А.* Критические условия неустойчивости заряженной капли, имеющей форму сплюснутого сфероида // Электронная обработка материалов. 1992. № 6. С. 20–23.
13. *Basaran O.A., Scriven L.E.* Axisymmetric shapes and stability of isolated charged drops // Phys.Fluids A. 1989. V.1. № 5. P.795–798.
14. *Щукин С.И., Григорьев А.И.* Устойчивость заряженной капли, имеющей форму трехосного эллипсоида // ЖТФ. 1998. Т.68. Вып.11. С.48–51.

Поступила 06.03.07

Summary

It is derived the disperse equation for rotating about its own axis of symmetry charged drop. It is shown that rotation increased the stability of a charged drop to its axisymmetric oscillations.