

А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, Д.О. Корниенко, М.В. Волкова

### О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ФИЗИЧЕСКИХ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РЕАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, [grig@uniyar.ac.ru](mailto:grig@uniyar.ac.ru)*

**Введение.** Исследование физического механизма реализации неустойчивости заряженной капли по отношению к собственному заряду (электростатической неустойчивости капли) представляет значительный интерес в связи с многочисленными приложениями в технике и технологии, в которых заряженная капля является ключевым элементом (см., например, обзоры [1-4] и приведенные там ссылки). Первое корректное аналитическое исследование на эту тему проведено Рэлеем еще в конце 19-го века [5]. Он показал, что  $n$ -я мода капиллярных осцилляций сферической капли идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , имеющая радиус  $R_0$  и заряд  $Q$  в вакууме, определяется условием

$$W_n \equiv \frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3} \geq (n+2). \quad (1)$$

Из (1) видно, что по мере увеличения заряда  $Q$  первой теряет устойчивость основная мода ( $n = 2$ ) при  $W_2 = 4$ , поскольку радиальная мода ( $n = 0$ ) в несжимаемой жидкости не возбуждается, а трансляционная ( $n = 1$ ) исключается из рассмотрения проведением расчетов в системе координат, связанной с центром масс капли. Более высокие, чем основная, моды возбуждаются при дальнейшем увеличении заряда согласно (1).

Впоследствии в линейных (по амплитуде деформации капли) аналитических расчетах выяснилось, что при реализации неустойчивости основной моды капли по отношению к собственному заряду (при  $W_2 \geq 4$ ) она принимает форму вытянутого сфероида [2]. В этой связи встал вопрос: как величина сфероидальной деформации (мерой которой может служить эксцентриситет сфероида) влияет на устойчивость более высоких мод осцилляций, чем основная мода? Этот вопрос был тем более актуален, что в экспериментах выяснилось, что при  $W_2 = 4$  теряют устойчивость и более высокие моды так, что на вершинах сфероидальной капли за счет суперпозиции неустойчивых высоких мод образовывались эмиссионные выступы, с вершин которых выбрасывались сильно заряженные дочерние капельки, уносящие избыточный заряд [6].

В работе [7] аналитическим путем показано, что с увеличением эксцентриситета капли критические для реализации неустойчивости высоких мод значения параметра  $W_n$  снижаются. В [7] аналитические расчеты выполнены в линейном по квадрату эксцентриситета  $e^2$  приближении, но численные расчеты по полученному дисперсионному уравнению сделаны без соблюдения требования асимптотичности по  $e^2$ . В этой связи в [8] по схеме, использованной в [7], аналитические асимптотические расчеты проведены строго в квадратичном приближении по  $e^2$ . Здесь следует отметить, что анализ в [7] выполнен не строго линейно по квадрату эксцентриситета. Разложения по  $e^2$  проводились не полностью, и лишь там, где без этого нельзя было обойтись в математических преобразованиях: некоторые математические комбинации, содержащие  $e^2$ , оставались в неприкосновенности, что, по мнению автора, позволяло дальше продвинуться в область нелинейности по  $e^2$ . В результате

проведенного в [7] анализа была предложена физическая модель реализации неустойчивости сильно заряженной капли, согласно которой при достаточно большом удлинении капли неустойчивость следующих за основной мод наступала уже при  $W_2 = 4$  только за счет удлинения капли и соответствующего увеличения поверхностной плотности заряда на её вершинах. В связи со сказанным в настоящей работе будет проведен анализ, подобный [8], то есть с сохранением в асимптотических разложениях квадратичных слагаемых по  $e^2$ , но в рамках примененной в [7] идеи неполного асимптотического разложения.

**Формулировка задачи.** Будем решать задачу об устойчивости капиллярных осцилляций бесконечно малой амплитуды капли радиуса  $R_0$  идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости, имеющей заряд  $Q$ , которая находится в идеальной несжимаемой диэлектрической среде.

Предполагается, что заряд капли равен критическому в смысле реализации неустойчивости по отношению к заряду ( $W_2 = 4$ ). При этом теряет устойчивость основная мода капиллярных осцилляций капли, и капля принимает вытянутую слабосфероидальную форму, ее эксцентриситет растет со временем по мере роста амплитуды неустойчивой основной моды. Уравнение поверхности вытянутого сфероида в сферических координатах с началом в центре масс имеет вид

$$r(\vartheta) = \frac{(1-e^2)^{1/6}}{\sqrt{1-e^2 \cdot \mu^2}}; \quad \mu \equiv \cos(\vartheta), \quad (2)$$

где  $e$  – эксцентриситет сфероида, который будем принимать малым  $e^2 \ll 1$ .

Примем, что поверхность сфероидальной капли возмущена капиллярным волновым движением тепловой природы с амплитудой  $\xi(\vartheta, t)$  так, что уравнение поверхности капли будет иметь вид

$$F(\vartheta, \varphi, t) = r - r(\vartheta, t) - \xi(\vartheta, t),$$

где  $\max |\xi| \ll \min r(\vartheta, t)$ . В дальнейшем будут рассмотрены только осесимметричные осцилляции капли, а потому возможная зависимость возмущения  $\xi(\vartheta, t)$  от азимутального угла  $\varphi$  не принимается во внимание.

Зададимся целью – исследовать устойчивость мод капиллярных осцилляций слабосфероидальной капли на интервале времени, много меньшем характерного времени увеличения амплитуды неустойчивой основной моды осцилляций так, что на указанном интервале времени эксцентриситет сфероида можно считать не зависящим от времени.

Движения жидкости в капле и среде, а также электрическое поле собственного заряда капли во внешней среде будем считать потенциальными с потенциалами скоростей  $\psi_1(\vec{r}, t)$ ,  $\psi_2(\vec{r}, t)$  и  $\Phi(\vec{r}, t)$  соответственно. Математическая формулировка задачи расчета капиллярных осцилляций в такой капле в линейном приближении по  $|\xi|$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Delta \psi_i(\vec{r}, t) &= 0, \quad i = 1, 2, \\ r = r(\vartheta): \quad \Phi(\vec{r}, t) &= \text{const} \equiv \Phi_s(t); \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial n_1} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial n_2} \equiv \frac{\partial \psi}{\partial n}; \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad -\rho_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + \rho_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial t} + P_Q = P_\sigma, \\ r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \psi_2| &\rightarrow 0; \quad |\nabla \Phi(\vec{r}, t)| \rightarrow 0; \\ r \rightarrow 0: \quad |\nabla \psi_1| &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – плотности сред внутри и вне капли соответственно;  $P_Q \equiv (-\nabla \Phi(\vec{r}, t))^2 / 8\pi$  – давление электростатического поля собственного заряда капли на границу раздела сред;  $\Phi(\vec{r}, t)$  – потенциал электростатического поля собственного заряда капли;  $P_\sigma \equiv \sigma \cdot \text{div} \vec{n}$  – давление сил поверхностного натяжения (лапласовское давление);  $\vec{n}_j$  – внешняя нормаль к границе раздела  $j$ -й среды.

**Описание процедуры отыскания дисперсионного уравнения.** Задачу будем решать в сферической системе координат, связанной с центром капли, в виде разложения по полиномам Лежандра

в безразмерных переменных, в которых  $R_0 = \rho_1 = \sigma = 1$ . Решение задачи будем искать в линейном по  $|\xi|$  и квадратичном по  $e^2$  приближении. Причем разложение сформулированной задачи по  $e^2$  в окрестности исходной сферической формы капли будем проводить не полностью, и лишь там, где встречаются комбинации  $f(e^2, \mu) \cdot \xi$ , чтобы обеспечить возможность проведения корректных разложений функций  $f(e^2, \mu)$  по полиномам Лежандра, а комбинации вида  $f(e^2) \cdot \xi$  раскладывать не будем. Именно такой подход использован в [7]. Например, выражение (2) для сфероидальной поверхности с точностью до квадратичных по квадрату эксцентриситета слагаемых можно представить в виде

$$r(\vartheta) = \frac{(1-e^2)^{1/6}}{\sqrt{1-e^2 \cdot \mu^2}} \approx (1-e^2)^{1/6} \left[ 1 + \frac{1}{2} e^2 \cdot \mu^2 + \frac{3}{8} e^4 \cdot \mu^4 + O(e^6) \right].$$

Раскладывая в этом выражении  $\mu^2 \equiv \cos^2(\vartheta)$  и  $\mu^4 \equiv \cos^4(\vartheta)$  по полиномам Лежандра, получим

$$r(\vartheta) = (1-e^2)^{1/6} \left\{ 1 + \frac{1}{6} e^2 [1 + 2P_2(\mu)] + \frac{3}{280} e^4 [20P_2(\mu) + 8P_4(\mu) + 7] \right\}.$$

В приведенных соотношениях остается не разложенным стоящее в числителе выражение  $(1-e^2)^{1/6}$ .

В последнем выражении обращает на себя внимание тот факт, что разложение соотношения (2) проведено только по четным полиномам Лежандра, что обусловлено симметрией сфероида относительно экваториальной плоскости. Указанная симметрия характерна и для всех нижеследующих расчетов.

Поскольку решается задача о волновом движении, то гидродинамические потенциалы  $\Psi_1(\vec{r}, t)$  и  $\Psi_2(\vec{r}, t)$ , а также электростатический потенциал  $\Phi(\vec{r}, t)$  должны быть гармоническими функциями внутри и вне капли соответственно, и в сферической системе координат будем искать их в виде разложений по полиномам Лежандра, являющихся собственными функциями угловой части оператора Лапласа в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \xi(\vartheta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n(e^2, t) \cdot P_n(\mu); & \Psi_1(\vec{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(e^2, t) \cdot r^n \cdot P_n(\mu); \\ \Psi_2(\vec{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)}(e^2, t) \cdot r^{-(n+1)} \cdot P_n(\mu); & \Phi(\vec{r}, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} D_n(e^2, t) \cdot r^{-(n+1)} \cdot P_n(\mu). \end{aligned} \quad (3)$$

Удовлетворяя условиям на границе раздела сред и условию постоянства электростатического потенциала вдоль поверхности капли, можно выразить коэффициенты  $A_n^{(1)}(e^2, t)$ ,  $A_n^{(2)}(e^2, t)$ ,  $D_n(e^2, t)$  через  $M_n(t)$ . Соответствующие соотношения имеют громоздкий вид и их здесь выписывать не будем, поскольку эти соотношения можно найти в электронной публикации [9], где подробно описана и процедура их вывода. Подставляя проекты решений (3) (с учетом связи коэффициентов  $A_n^{(1)}(e^2, t)$ ,  $A_n^{(2)}(e^2, t)$ ,  $D_n(e^2, t)$  и  $M_n(t)$ ) в динамическое условие на границе раздела сред, в котором аналитические выражения для электростатического и капиллярного давлений определены весьма громоздкими формулами, приведенными в электронной публикации [10], можно получить систему связанных дифференциальных уравнений для отыскания временной зависимости неизвестных коэффициентов  $M_n(t)$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{n\pm 4} \cdot \partial_{tt} M_{n\pm 4} + \alpha_{n\pm 2} \cdot \partial_{tt} M_{n\pm 2}(t) + \alpha_n \cdot \partial_{tt} M_n(t) = \\ = -\beta_{n\pm 4} \cdot M_{n\pm 4}(t) - \beta_{n\pm 2} \cdot M_{n\pm 2}(t) - \beta_n \cdot M_n(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{n-4} = e^4 \left\{ \frac{K_{4(n-4)n}}{70\tau^4} \left[ -25(n-4)(n+1) + 96\tau^2 \right] - \frac{W}{315\tau^{17}} \left\{ 35[-3(n+1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \tau^6(-3n^2 + 11n + 18) + \tau^{12}(n^2 - 6n + 5) \right\} K_{2(n-4)(n-2)} K_{2(n-2)n} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +3\left[-126n + 830 + 3\tau^{12}(-2n^2 + n + 45) + 18\tau^6(n^2 + 3n - 44)\right]K_{4(n-4)n}\Bigg\}; \\
\beta_{n+4} & = e^4\left\{\frac{1}{70\tau^4}\left[96\tau^2 - 25n(n+5)\right]K_{4(n+4)n} - \frac{W}{315\tau^{17}}\left\{35[-15(n+3) + \right.\right. \\
& + 5\tau^{12}(n+3)^2 + \tau^6(-3n^2 + 15n + 100)]K_{2(n+2)n}K_{2(n+4)(n+2)} - 3[294n + \\
& \left. + 94 - 18\tau^6(n^2 + 19n + 12) + 15\tau^{12}(2n^2 + 19n + 39)]K_{4(n+4)n}\right\}\Bigg\}; \\
\beta_{n-2} & = e^2\left\{\frac{1}{3\tau^2}(2n^2 - 3n + 6)K_{2(n-2)n} + \frac{W}{3\tau^{11}}[4n - 14 - \right. \\
& \left. - 3\tau^6(n-3)]K_{2(n-2)n}\right\} + e^4\left\{-\frac{1}{70\tau^4}\left\{10(4\tau^2 - (n-2)(n+1)K_{2(n-2)n} - \right.\right. \\
& \left. - [96\tau^2 - 25(n^2 - n - 9)]K_{4(n-2)n} + \frac{W}{630\tau^{17}}\left\{5K_{2(n-2)n}[-192 - 2\tau^6(6n^2 + \right.\right. \\
& \left. \left. + 140n - 595) + \tau^{12}(n-3)(9n^2 + 8n + 76) - \right.\right. \\
& \left. - 14[-3(n+1) + \tau^6(-n^2 + 8n + 12) + \tau^{12}(n^2 - 4n + 3)]K_{2(n-2)(n-2)} - \right. \\
& \left. - 14[3\tau^{12}(n-3)(n+1) - 9(n+2) + \tau^6(-5n^2 + 8n + 43)]K_{2nn}\right\} + 6[-725 + \\
& \left. + 168n - 18\tau^6(n^2 + 7n - 42) + 3\tau^{12}(n^3 + n^2 - 2n - 30)]K_{4(n-2)n}\right\}\Bigg\}; \\
\beta_{n+2} & = e^2\left\{\frac{2}{3\tau^2}(n^2 + 5n + 10)K_{2(n+2)n} - \frac{W}{3\tau^{11}}[-8n + 7\tau^6(n+1)]K_{2(n+2)n}\right\} + \\
& + e^4\left\{-\frac{1}{70\tau^4}\left\{10[4\tau^2 - n(n+3)]K_{2(n+2)n} + [-96\tau^2 + 25(n^2 + 3n - 7)]K_{4(n+2)n}\right\} + \right. \\
& \left. + \frac{W}{630\tau^{17}}\left\{5K_{2(n+2)n}\left\{-192 - 4\tau^6(3n^2 + 143n - 42) + \right.\right.\right. \\
& \left. \left. + \tau^{12}(n+1)(9n^2 + 52n + 252) - 14[3\tau^{12}(n+1)^2 - 9(n+2) + \right.\right. \\
& \left. \left. + \tau^6(-n^2 + 22n + 51)]K_{2nn} - 14[-15(n+3) + 5\tau^{12}(n+1)(n+3) + \right.\right. \\
& \left. \left. + \tau^6(-5n^2 - 2n + 54)]K_{2(n+2)(n+2)}\right\} + 6[-263 + 252n - 18\tau^6(n^2 + 15n - 14) + \right. \\
& \left. \left. + 3\tau^{12}(n^3 + 13n^2 + 54n + 42)]K_{4(n+2)n}\right\}\Bigg\}; \\
\beta_n & = -\frac{(n-1)(n+2)}{\tau^2} + \frac{(n-1)W}{\tau^5} + e^2\left\{-\frac{W}{6\tau^{11}}\left[5\tau^6(n-1) + 2(9 - 6n + \right.\right. \\
& \left. + 5\tau^6(n-1))K_{2nn} + \frac{1}{3\tau^2}\left[(n-1)(n+2) + 2(n^2 + n + 4)K_{2nn}\right]\right\} + \\
& + e^4\left\{-\frac{1}{70\tau^4}\left\{14[4\tau^2 - n(n+1)] + 10[4\tau^2 - (n^2 + n - 3)]K_{2nn} + \right.\right. \\
& \left. \left. + [-96\tau^2 + 25(n^2 + n - 10)]K_{4nn}\right\} - \frac{W}{2520\tau^{17}}\left\{280[\tau^{12}(n-1)^2 - 3(n+1) + \right.\right. \\
& \left. \left. + \tau^6(n^2 + 17n + 10)]K_{2(n-2)n}K_{2n(n-2)} - 60[-64 + \tau^{12}(n-1)(4n + 49) + \right.\right. \\
& \left. \left. + \tau^6(-4n^2 - 142n + 275)]K_{2nn} + 840[-3(n+2) + \tau^6(-n^2 + 3n + 11) + \right.\right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \tau^{12}(n^2 - 1) \Big] K_{2mn}^2 + 280 \Big[ -15(n+3) + 5\tau^{12}(n-1)(n+3) + \\
& + \tau^6(-7n^2 - 7n + 60) \Big] K_{2n(n+2)} K_{2(n+2)n} - 21 \Big[ -160 + \tau^{12}(n-1)(8n+53) - \\
& - 8\tau^6(n^2 + 11n - 32) \Big] + 24 \Big[ 210n - 536 + 9\tau^{12}(n-1)(2n+7) - \\
& - 18\tau^6(n^2 + 11n - 32) \Big] K_{4mn} \Big\}; \quad \tau \equiv (1 - e^2)^{1/6}; \quad \rho \equiv \rho_2/\rho_1; \quad K_{lmn} = \left[ C_{l0m0}^{n0} \right]^2.
\end{aligned}$$

Здесь  $C_{l0m0}^{n0}$  – коэффициенты Клебша-Гордана [11], которые отличны от нуля, только если нижние индексы удовлетворяют условиям:

$$|l - m| \leq n \leq |l + m|, \quad l + m + n - \text{четное}.$$

Коэффициенты  $\alpha_j$ , так же как и коэффициенты  $\beta_j$ , являются функциями от квадрата эксцентриситета  $e^2$ , номеров мод  $n$  и параметра  $W$ , имеют вид столь же громоздкий, что и коэффициенты  $\beta_j$ , но для интерпретации конечного результата данной работы они не существенны, а потому и не выписаны. Аналитический вид коэффициентов  $\alpha_j$  можно найти в электронной публикации [9]. Интересно, что коэффициенты  $\beta_{n\pm 2}$  содержат множителем  $e^2$ , а коэффициенты  $\beta_{n\pm 4}$  содержат множителем  $e^4$ .

Учитывая то обстоятельство, что решается задача об осцилляциях капли, будем искать временную зависимость коэффициентов  $M_n(t)$  в периодическом виде

$$M_n(t) = A_n \cdot \exp(-i\omega t), \quad (5)$$

где  $\omega$  – частота осцилляций;  $i$  – мнимая единица. Подставляя (5) в (4), получаем бесконечную систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов  $A_j$ :

$$\begin{aligned}
& \left[ \omega^2 \alpha_{n-4} - \beta_{n-4} \right] \cdot A_{n-4} + \left[ \omega^2 \alpha_{n-2} - \beta_{n-2} \right] \cdot A_{n-2}(t) + \left[ \omega^2 \alpha_n - \beta_n \right] \cdot A_n(t) + \\
& + \left[ \omega^2 \alpha_{n+2} - \beta_{n+2} \right] \cdot A_{n+2}(t) + \left[ \omega^2 \alpha_{n+4} - \beta_{n+4} \right] \cdot A_{n+4} = 0.
\end{aligned} \quad (6)$$

**Анализ дисперсионного уравнения.** Из (6) видно, что в реальности мы имеем две системы: одну – для нечетных номеров коэффициентов и одну – для четных. Полученные системы алгебраических уравнений связывают между собой частоты осцилляций, номера мод и физические параметры задачи. Поскольку система (6) однородна, то для того, чтобы она имела нетривиальные решения, необходимо потребовать равенства нулю определителя  $\det[a_{ij}]$ , составленного из коэффициентов при  $A_j$ . Из этого условия получим дисперсионное уравнение задачи:

$$\det[a_{ij}] = 0; \quad i, j = 1; 2; 3. \quad (7)$$

Выпишем для наглядности несколько первых элементов определителя  $[a_{ij}]$  для четных номеров:

$$\begin{aligned}
a_{11} &\equiv \omega^2 \alpha_2 - \beta_2; & a_{12} &\equiv 0; & a_{13} &\equiv \omega^2 \alpha_4 - \beta_4; & a_{14} &\equiv 0; \\
a_{15} &\equiv \omega^2 \alpha_6 - \beta_6; & a_{1j} &\equiv 0; & j &\geq 7; \\
a_{21} &\equiv 0; & a_{22} &\equiv \omega^2 \alpha_4 - \beta_4; & a_{23} &\equiv 0; & a_{24} &\equiv \omega^2 \alpha_6 - \beta_6; \\
a_{25} &\equiv 0; & a_{26} &\equiv \omega^2 \alpha_8 - \beta_8; & a_{2j} &\equiv 0; & j &\geq 9; \\
a_{31} &\equiv \omega^2 \alpha_4 - \beta_4; & a_{32} &\equiv 0; & a_{33} &\equiv \omega^2 \alpha_6 - \beta_6; & a_{34} &\equiv 0; \\
a_{35} &\equiv \omega^2 \alpha_8 - \beta_8; & a_{36} &\equiv 0; & a_{37} &\equiv \omega^2 \alpha_{10} - \beta_{10}; & a_{3j} &\equiv 0; \quad j \geq 11; \\
a_{41} &\equiv 0; & a_{42} &\equiv \omega^2 \alpha_6 - \beta_6; & a_{43} &\equiv 0; & a_{44} &\equiv \omega^2 \alpha_8 - \beta_8;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{45} &\equiv 0; & a_{46} &\equiv \omega^2 \alpha_{10} - \beta_{10}; & a_{47} &\equiv 0; & a_{48} &\equiv \omega^2 \alpha_{12} - \beta_{12}; \\
&& && a_{4j} &\equiv 0; & j &\geq 13; \\
a_{51} &\equiv \omega^2 \alpha_6 - \beta_6; & a_{52} &\equiv 0; & a_{53} &\equiv \omega^2 \alpha_8 - \beta_8; & a_{54} &\equiv 0; & a_{55} &\equiv \omega^2 \alpha_{10} - \beta_{10}; & a_{56} &\equiv 0; \\
&& && a_{57} &\equiv \omega^2 \alpha_{12} - \beta_{12}; & a_{58} &\equiv 0; \\
a_{59} &\equiv \omega^2 \alpha_{14} - \beta_{14}; & a_{5j} &\equiv 0; & j &\geq 15.
\end{aligned} \tag{8}$$

Дисперсионное уравнение (7) является алгебраическим уравнением бесконечного порядка относительно  $\omega^2$ , и решать его следует последовательными приближениями. При некоторых значениях физических параметров задачи квадрат частоты  $\omega^2$  может уменьшиться до нуля и перейти в область отрицательных значений, что будет соответствовать появлению мнимых  $\omega$  и экспоненциальному росту амплитуд соответствующих волн, то есть проявлению неустойчивости некоторых мод. Критическое условие прохождения квадрата частоты через ноль в область отрицательных значений совпадает с обращением в ноль свободного коэффициента алгебраического уравнения относительно  $\omega^2$ , которое для любого конечного  $n$  и определит критические условия реализации неустойчивости  $n$ -й моды осцилляций. Аналитическое выражение для свободного члена дисперсионного уравнения (7) с коэффициентами (8) несложно получить из (7), полагая в нём  $\omega^2 \equiv 0$ , тогда уравнение для отыскания критических условий неустойчивости примет вид

$$\det [b_{ij}] = 0, \tag{9}$$

где первые элементы определителя будут иметь вид

$$\begin{aligned}
b_{11} &\equiv -\beta_2; & b_{12} &\equiv 0; & b_{13} &\equiv -\beta_4; & a_{14} &\equiv 0; & b_{15} &\equiv -\beta_6; & b_{1j} &\equiv 0; & j &\geq 7; \\
b_{21} &\equiv 0; & b_{22} &\equiv -\beta_4; & b_{23} &\equiv 0; & b_{24} &\equiv -\beta_6; & b_{25} &\equiv 0; & b_{26} &\equiv -\beta_8; & b_{2j} &\equiv 0; & j &\geq 9; \\
b_{31} &\equiv -\beta_4; & b_{32} &\equiv 0; & b_{33} &\equiv -\beta_6; & b_{34} &\equiv 0; & b_{35} &\equiv -\beta_8; & a_{36} &\equiv 0; & b_{37} &\equiv -\beta_{10}; \\
&& && b_{3j} &\equiv 0; & j &\geq 11; \\
b_{41} &\equiv 0; & b_{42} &\equiv -\beta_6; & b_{43} &\equiv 0; & b_{44} &\equiv -\beta_8; & b_{45} &\equiv 0; & b_{46} &\equiv -\beta_{10}; & b_{47} &\equiv 0; & b_{48} &\equiv -\beta_{12}; \\
&& && b_{4j} &\equiv 0; & j &\geq 13; \\
b_{51} &\equiv -\beta_6; & b_{52} &\equiv 0; & b_{53} &\equiv -\beta_8; & b_{54} &\equiv 0; & b_{55} &\equiv -\beta_{10}; & b_{56} &\equiv 0; & b_{57} &\equiv -\beta_{12}; & a_{58} &\equiv 0; & b_{59} &\equiv -\beta_{14}; \\
&& && b_{5j} &\equiv 0; & j &\geq 15.
\end{aligned}$$

Поскольку уравнение (9) имеет бесконечно большой порядок, то и уравнение относительно  $W$  следует решать методом последовательных приближений, рассматривая последовательно определители первого, второго, третьего и т.д. порядков и прослеживая эволюцию получающихся корней для второй, четвертой, шестой и т.д. мод. Как показывают численные оценки, такая процедура достаточно быстро сходится и уже в расчетах третьего приближения дает критические значения параметра  $W$  с точностью до третьей цифры.

Легко видеть, что при  $e^2 = 0$ , то есть для сферы, в дисперсионном уравнении (7) остаются только диагональные члены, и оно примет вид

$$\prod_{n=2}^{\infty} (\omega_n^2 \alpha_n - \beta_n) = 0$$

или

$$\omega_n^2 = n(n-1)[(n+2) - W_n] = 0,$$

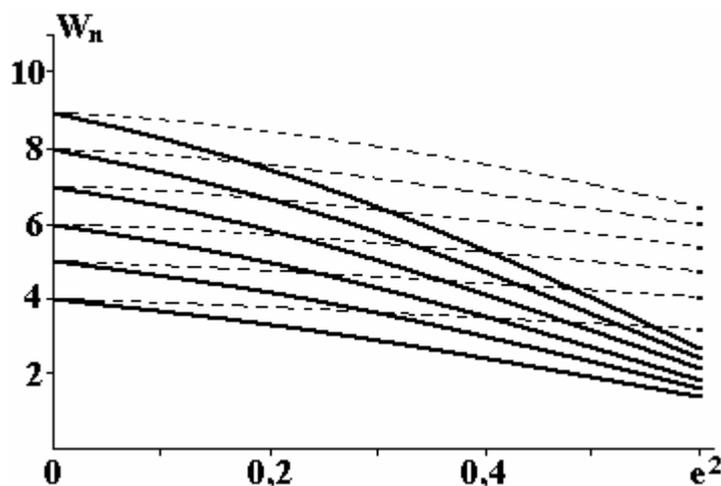
как и было получено Рэлеем [5]. Критические условия реализации неустойчивости  $n$ -й моды отсюда получатся в виде [5]:

$$W_n \geq (n + 2).$$

Исследуя уравнение (10) на предмет критических условий появления неустойчивости, приравняем свободный член уравнения нулю и найдем его корни относительно  $W$ . При этом получим

$$W_n = n + 2.$$

Для нижеследующих численных расчетов по (9) будем учитывать только первые пять уравнений. На рисунке сплошными линиями представлены результаты численных расчетов критических условий неустойчивости  $n$ -й моды заряженной сфероидальной капли в виде зависимости параметра  $W_n$  от квадрата эксцентриситета для первых шести осесимметричных мод. На том же рисунке штриховыми линиями приведены аналогичные зависимости, построенные в рамках строго полного асимптотического разложения (см. [8]). Видно, что с увеличением эксцентриситета критические значения параметра  $W$  снижаются в обоих случаях, но при использовании метода неполного асимптотического разложения соответствующие кривые быстрее убывают с ростом  $e^2$ , то есть удаётся дальше углубиться в область нелинейности.



*Зависимость критических для реализации электростатической неустойчивости  $n$ -й моды капиллярных осцилляций значений параметра  $W_n$  от квадрата эксцентриситета сфероидальной капли*

**Заключение.** В существенно нелинейных ситуациях, когда в задаче имеются два (или больше) малых параметра, существенно различающихся по порядкам величин, то разложение по большему из параметров можно проводить с учетом структуры математических выражений, сохраняя комбинации параметров (которые в принципе несложно представить в виде разложения в асимптотический ряд), позволяющие приблизить обчислимую математическую модель к реальному физическому объекту. Такой подход позволяет далее углубиться в область нелинейности по сравнению с полным асимптотическим разложением и получить результаты расчета в виде, более близком к реальности. Предлагаемый метод аналитического расчета естественно именовать «методом неполного асимптотического разложения».

*Работа выполнена в рамках тематического плана университета и при поддержке грантов: Рособразования №2.1.1/3776 и РФФИ № 09-01-00084.*

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А.И. Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор) // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 23–32.
2. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор)// Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
3. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А. Нелинейные осцилляции заряженных капель. Часть I. Аналитические и численные исследования общих закономерностей нелинейных осцилляций. Экспериментальные работы (Обзор)// Электронная обработка материалов. 2005. № 3. С. 25–36.

4. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А. Нелинейные осцилляции заряженных капель. Часть II. Внутреннее резонансное взаимодействие и излучение. Влияние внешних полей. Учет вязкости (Обзор) // Электронная обработка материалов. 2005. № 4. С. 24–35.
5. Rayleigh (Strutt J.W.) On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1882. V.14. P. 184–186.
6. Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
7. Григорьев А.И. О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли // ЖТФ. 1985. Вып.7. С.1272–1278.
8. Ширяева С.О., Корниенко Д.О., Волкова М.В. Об электростатической неустойчивости заряженной сфероидальной капли // Электронная обработка материалов. № 4. 2009. С. 20–30.
9. Ширяева С.О., Корниенко Д.О. О выводе системы связанных дифференциальных уравнений, описывающих временную эволюцию амплитуд мод осцилляций заряженной сфероидальной капли // Электронный журнал «Исследовано в России». Изд. МФТИ. 100. С.1253-1262. 2009. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/100.pdf>
10. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Корниенко Д.О. К асимптотическому расчету капиллярного и электростатического давления, действующих на поверхность осциллирующей заряженной сфероидальной капли электропроводной жидкости // Электронный журнал «Исследовано в России». 090. С. 1167–1176. 2009. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2009/090.pdf>
11. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.

Поступила 18.02.10

### Summary

Within the limits of analytical asymptotic approach by incomplete decomposition on small parameters: in the first order on amplitude of oscillations and in the second order on amplitude of spheroidal deformation, dispersion equation for capillary oscillation of charged spheroidal drop was found. It is shown that critical conditions of electrostatic instability for all modes of a drop oscillation decrease with increase of spheroidal deformation range.

---