

ВЫРОЖДЕННОЕ ВНУТРЕННЕЕ НЕЛИНЕЙНОЕ РЕЗОНАНСНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ НЕЗАРЯЖЕННОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СТРУИ В ПРОДОЛЬНОМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

А.И. Григорьев, Н.В. Воронина, С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, grig@uniyar.ac.ru, shir@uniyar.ac.ru

Введение. Феномен капиллярного и электростатического распада на капли струи жидкости представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями явления [1–5]. Поэтому капиллярный распад струй достаточно подробно исследован экспериментально и теоретически в весьма широком наборе внешних условий, в том числе и при наличии внешнего однородного коллинеарного оси струи электростатического поля, играющего стабилизирующую роль [1–12]. Тем не менее большая часть теоретических исследований устойчивости струи в продольном электростатическом поле выполнена в линейном по отношению амплитуды капиллярной волны к радиусу струи приближении [6–12]. Аналитические расчеты волнового движения на поверхности струи в продольном электростатическом поле в квадратичном по безразмерной амплитуде приближении недавно выполнены в [13] по аналогии с тем, как это ранее делалось для заряженных струй [14–15]. Однако особенности внутреннего нелинейного резонансного перераспределения энергии между модами, определяющими начальную деформацию струи, и волнами, порождаемыми в силу нелинейности уравнений гидродинамики, в [13] освещены недостаточно полно. В этой связи и проведен настоящий анализ.

Формулировка задачи. Пусть имеется бесконечная цилиндрическая струя радиуса R идеальной несжимаемой жидкости с массовой плотностью ρ , диэлектрической проницаемостью ϵ_{in} и коэффициентом поверхностного натяжения σ , движущаяся со скоростью U_0 коллинеарно оси симметрии невозмущенной цилиндрической поверхности струи. Примем, что струя находится в среде с очень исчезающе малой плотностью $\rho_{ex} = 0$ и с диэлектрической проницаемостью ϵ_{ex} . В струе и окружающем ее пространстве имеется продольное электрическое поле напряженностью E_0 , коллинеарное оси симметрии невозмущенной цилиндрической поверхности струи. Для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью U_0 . В указанной системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $U(\mathbf{r}, t)$ полностью определится капиллярными волнами, бегущими по ее поверхности. В безразмерной записи (при $R = \sigma = \rho = 1$) амплитуда поля скоростей будет величиной того же порядка малости, что и амплитуда волн на поверхности струи, которая принимается много меньшей радиуса.

Будем исследовать закономерности реализации капиллярного волнового движения конечной амплитуды на поверхности струи в рассматриваемой системе. Расчеты проведем в цилиндрических координатах r, z, φ , орт \mathbf{n}_z совпадает по направлению с U_0 . Уравнение возмущенной волновым движением поверхности цилиндрической струи запишется в виде

$$r(z, \varphi, t) = R + \xi(z, \varphi, t); \quad |\xi|/R \leq 1,$$

$\xi(z, \varphi, t)$ – волновое возмущение цилиндрической поверхности струи.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи в рамках модели потенциального течения состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской) и граничных условий к ним:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0; \quad \Delta \Phi_{in} = 0; \quad \Delta \Phi_{ex} = 0; \\ r \rightarrow 0: \quad |\mathbf{U}| < \infty; \quad |\Phi_{in}| < \infty; \quad r \rightarrow \infty: \quad |\Phi_{ex}| < \infty; \\ -\partial_t \xi + (\nabla \Psi) \cdot \nabla [r - (R + \xi(z, \varphi, t))] &= 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -P(\mathbf{r},t) + P_0 + P_\sigma - P_e = 0; \\
& r = R + \xi: \quad \varepsilon_{in}(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{in}) = \varepsilon_{ex}(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{ex}); \\
& (\boldsymbol{\tau}_\varphi \cdot \nabla \Phi_{in}) = (\boldsymbol{\tau}_\varphi \cdot \nabla \Phi_{ex}); \quad (\boldsymbol{\tau}_z \cdot \nabla \Phi_{in}) = (\boldsymbol{\tau}_z \cdot \nabla \Phi_{ex}).
\end{aligned}$$

Здесь $\Psi(\mathbf{r},t)$ – потенциал поля скоростей; $P(\mathbf{r},t) = -\rho \left[\partial_t \Psi + \frac{1}{2} (\nabla \Psi)^2 \right] + P_0^{(in)}$ – гидродинамическое давление; $P_e(\mathbf{r},t)$ – давление электрического поля; $P_\sigma(\mathbf{r},t) = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n}$ – давление сил поверхностного натяжения; P_0 – постоянное давление внешней среды; $\Phi(\mathbf{r},t)$ – электростатический потенциал; нижние индексы “*ex*” и “*in*” характеризуют электростатическое поле вне и внутри струи соответственно; \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}_\varphi$, $\boldsymbol{\tau}_z$ – орты нормали и касательных к свободной поверхности струи (см. Приложение А).

Выписанную краевую задачу следует дополнить условием сохранения объема участка струи, длина которого равна длине волны λ :

$$\int_V r \, dr \, dz \, d\varphi = \pi R^2 \lambda; \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq R + \xi(z, \varphi, t); \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \\ z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda. \end{cases}$$

Кроме того, необходимо задать еще начальные условия, первое из которых представляет собой начальную деформацию невозмущенной цилиндрической поверхности струи:

$$r(z, \varphi, 0) = R + \varepsilon \left[\zeta^{(+)}(0) \cdot \exp(im\varphi) + \zeta^{(-)}(0) \cdot \exp(-im\varphi) \right] \exp(ikz) + O(\varepsilon^2).$$

Второе начальное условие обычно выбирается на финальной стадии решения таким образом, чтобы получающееся решение приняло наиболее простой вид [2–4, 16–17]. Здесь и далее не выписываются слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. Для простоты нижеследующих расчетов ограничимся рассмотрением случая, когда форма струи определяется одной волной.

Решение. Решение сформулированной задачи ищется в безразмерных переменных, где $R = \sigma = \rho = 1$, в асимптотическом виде путем разложения по малому параметру ε , который имеет смысл безразмерной амплитуды волны (отношение амплитуды волны к радиусу струи). Само решение будем искать методом многих временных масштабов, ограничиваясь точностью до второго порядка малости по ε включительно. Искомые функции $\xi(z, \varphi, t)$, $\Psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi_{in}(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi_{ex}(\mathbf{r}, t)$ представляются в виде асимптотических разложений по степеням ε . Одновременно полагается, что эволюция волн во времени определяется двумя временными масштабами: основным $T_0 = t$ и более медленным $T_1 = \varepsilon \cdot t$:

$$\begin{aligned}
\xi(z, \varphi, t) &= \varepsilon \cdot \xi^{(1)}(z, \varphi, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \xi^{(2)}(z, \varphi, T_0) + O(\varepsilon^3); \\
\Psi(\mathbf{r}, t) &= \varepsilon \cdot \Psi^{(1)}(r, z, \varphi, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \Psi^{(2)}(r, z, \varphi, T_0) + O(\varepsilon^3); \\
\Phi_{in}(\mathbf{r}, t) &= \Phi_{in}^{(0)}(z) + \varepsilon \cdot \Phi_{in}^{(1)}(r, z, \varphi, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \Phi_{in}^{(2)}(r, z, \varphi, T_0) + O(\varepsilon^3); \\
\Phi_{ex}(\mathbf{r}, t) &= \Phi_{ex}^{(0)}(z) + \varepsilon \cdot \Phi_{ex}^{(1)}(r, z, \varphi, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \cdot \Phi_{ex}^{(2)}(r, z, \varphi, T_0) + O(\varepsilon^3).
\end{aligned}$$

Не останавливаясь на описании процедуры отыскания решения, аналогичной подробно описанным в [4, 13–17], выпишем сразу аналитическое выражение для образующей формы свободной поверхности струи в произвольный момент времени [13]:

$$\begin{aligned}
r(z, \varphi, t) &= 1 + \varepsilon \cdot \cos(m\varphi) \cos(kz - \omega t) + \\
& + 0,25 \cdot \varepsilon^2 \left\{ -0,5 + [a_1 \cos(2m\varphi) + a_2] \cos(2(kz - \omega t)) + a_3 \cos(2m\varphi) \right\} + O(\varepsilon^3),
\end{aligned}$$

где частоты волн $\omega_m(k)$ связаны с волновыми k и азимутальными m числами дисперсионным уравнением:

$$\omega_m^2(k) = G_m(k) \cdot \left[k^2 + m^2 - 1 + w \frac{k^2 \cdot (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2}{\varepsilon_{in} \cdot G_m(k) - \varepsilon_{ex} \cdot H_m(k)} \right];$$

$$w \equiv \frac{E_0^2}{4\pi}; \quad G_m(x) \equiv \frac{x \cdot I'_m(x)}{I_m(x)}; \quad H_m(x) \equiv \frac{x \cdot K'_m(x)}{K_m(x)}.$$

Выражения для потенциалов электрического поля внутри и вне струи, а также для гидродинамического потенциала, выписанные с учетом компонент второго порядка малости, будут иметь качественно сходный вид [13]. Аналитический вид амплитудных коэффициентов a_j приведен в Приложении В.

Обсуждение полученных результатов. Из выражений для амплитудных коэффициентов a_1 и a_2 (см. Приложение В) в нелинейных поправках к форме струи видно, что они имеют резонансный вид. При выполнении соотношения

$$\omega_{2m}^2(2k) = 4\omega_m^2(k), \quad (1)$$

обращается в ноль знаменатель в коэффициенте a_1 , а при выполнении соотношения

$$\omega_0^2(2k) = 4\omega_m^2(k) \quad (2)$$

обращается в ноль знаменатель в коэффициенте a_2 . В теории нелинейных волн это обстоятельство интерпретируется как наличие нелинейного вырожденного резонансного взаимодействия между волнами первого порядка малости, определяющими начальную деформацию струи, и волнами, возбуждающимися за счет нелинейности уравнений гидродинамики. Резонанс (1) реализуется при произвольном виде волны (волны с произвольными k и m), определяющей начальную деформацию, и соответствует возбуждению за счет нелинейного взаимодействия (во втором порядке малости) волны с вдвое меньшей длиной и вдвое большим азимутальным числом по сравнению с волной, определяющей начальную деформацию. При этом волна, возбуждающаяся за счет нелинейного взаимодействия (с удвоенными k и m), дважды отбирает энергию у волны, определяющей начальную деформацию. При реализации резонанса (2) волна, определяющая начальную деформацию, возбуждает за счет нелинейного взаимодействия осесимметричную (с $m = 0$) волну с вдвое меньшей длиной.

На рис. 1 приведены графики зависимости $J \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)$, взятой при $m=0$ (определяющей величину знаменателя в коэффициенте a_1 , а также в коэффициенте a_2 при $m=0$), от величины волнового числа k и параметра w , рассчитанной по (1), пересеченной плоскостью $J=0$, при двух различных значениях диэлектрической проницаемости жидкости. На кривой $f_{00}(k, w) \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) = 0$, по которой пересекаются эти две поверхности, реализуется резонансное взаимодействие между двумя осесимметричными модами ($m=0$) для волн с волновыми числами k и $2k$. Нижние индексы у функции $f_{ij}(k, w)$ определяют значения азимутальных чисел волн, участвующих в резонансном взаимодействии. Резонансный обмен энергией между двумя осесимметричными волнами разной длины (заданной в начальный момент времени с волновым числом k и волной с вдвое большим волновым числом $2k$, возбуждение которой происходит в результате нелинейного взаимодействия) на стадии дробления струи может привести к образованию «сателлитов» – капель с размерами, меньшими размеров капель, на которые разбивается струя при отсутствии возмущающих воздействие. Из рисунка можно видеть, что независимо от величины напряженности электрического поля (параметра W) указанное взаимодействие имеет место только для весьма длинных волн ($k \ll 1$), причем с увеличением диэлектрической проницаемости жидкости струи диапазон значений длин волн, имеющих возможность принимать участие в резонансном обмене энергией, уменьшается.

Кроме осесимметричных волн, неустойчивость которых приводит к распаду струи на капли равных размеров, для осмысления феномена электродиспергирования жидкости [4] значительный интерес представляет исследование устойчивости неосесимметричных волн с $m = 1$ (изгибных волн [4, 18]) и с $m = 2$ (изгибно-деформационных волн [4, 19–21]).

Резонансный обмен энергией между волнами с различной симметрией реализуется несколько иначе по сравнению с осесимметричными волнами. Так, расчеты показывают, что резонансная перекачка энергии из заданной в начальный момент времени неосесимметричной волны с $m=1$ (изгибной волны) и волновым числом k в неосесимметричную же волну с $m = 2$ (изгибно-деформационную вол-

ну) и волновым числом $2k$ может иметь место только при $w \neq 0$. С увеличением диэлектрической проницаемости жидкости струи геометрическое место точек на плоскости $\{k, w\}$, где может иметь место резонансное взаимодействие, расширяется, а само резонансное взаимодействие может иметь место при меньших значениях w и больших значениях k , как это видно из рис. 2. Резонансное взаимодействие реализуется на кривой $f_{12}(k, w) \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) = 0$, по которой пересекаются поверхности на рисунке.

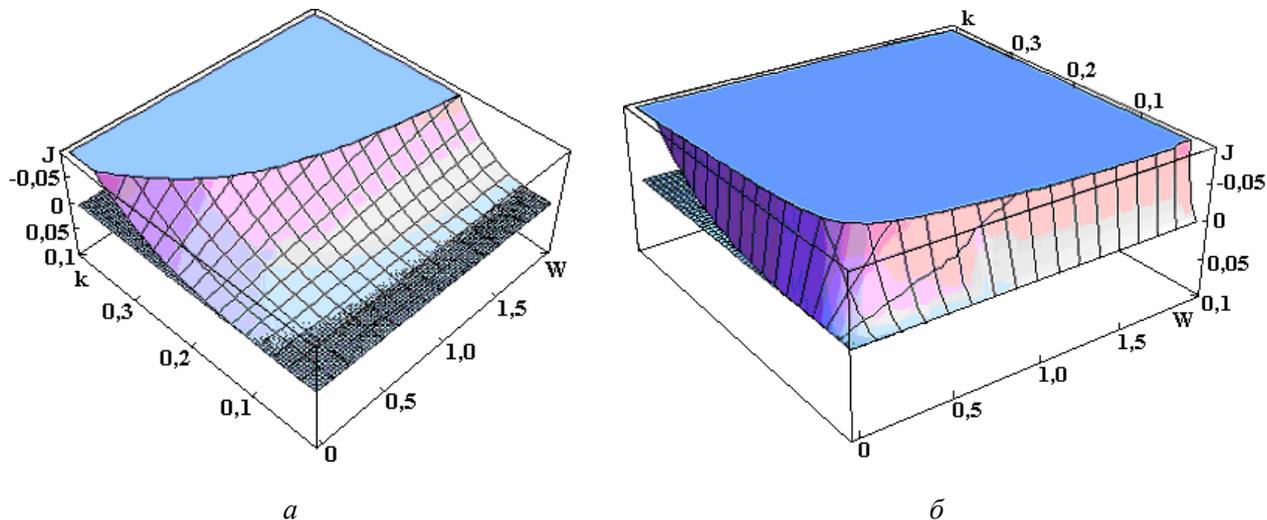


Рис. 1. График зависимости $J \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)$ от величины безразмерного волнового числа k и параметра w , рассчитанный при $t = 0$ и $\epsilon_{ex} = 1$, пересеченный плоскостью $F = 0$. На линии пересечения указанных поверхностей реализуется нелинейное резонансное взаимодействие осесимметричных волн с волновыми числами k и $2k$. а) $\epsilon_{in} = 5$; б) $\epsilon_{in} = 100$

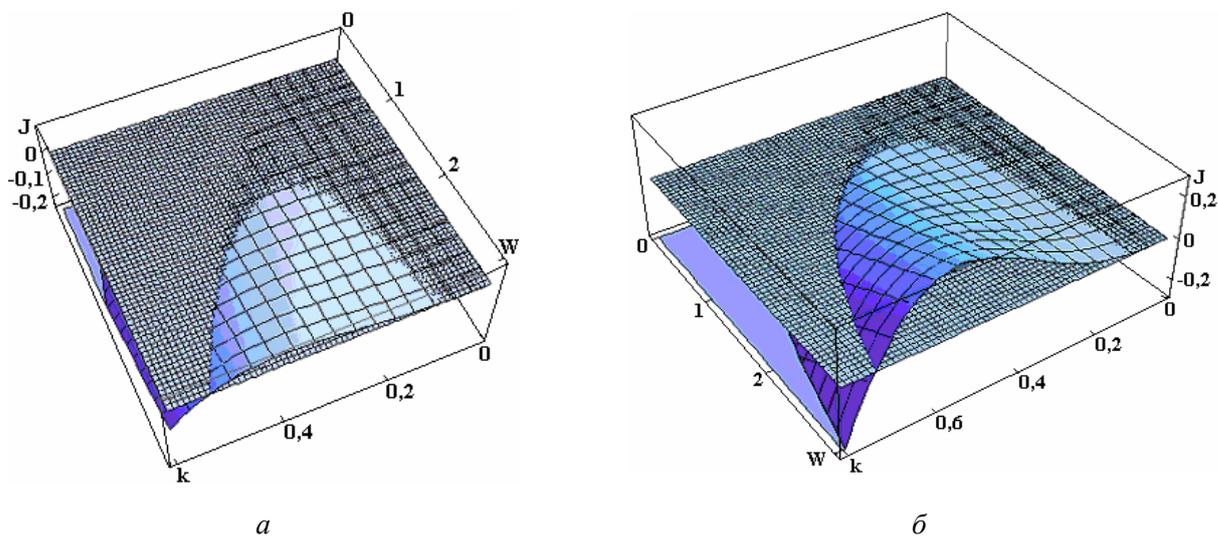


Рис. 2. То же, что на рис. 1, для неосесимметричных волн с $t=1$

Согласно рис. 3 резонансная перекачка энергии из заданной в начальный момент времени неосесимметричной волны с $t = 2$ и волновым числом k в неосесимметричную же волну с $t = 4$ и волновым числом $2k$ имеет место при существенно больших значениях волновых чисел и значениях параметра w , чем в двух предыдущих ситуациях. Резонансное взаимодействие реализуется на кривой $f_{24}(k, w) \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) = 0$, по которой пересекаются поверхности на рис. 3. Видно, что с увеличением диэлектрической проницаемости жидкости струи зависимость значений волновых чисел резонансно-взаимодействующих волн от параметра w становится более сильной.

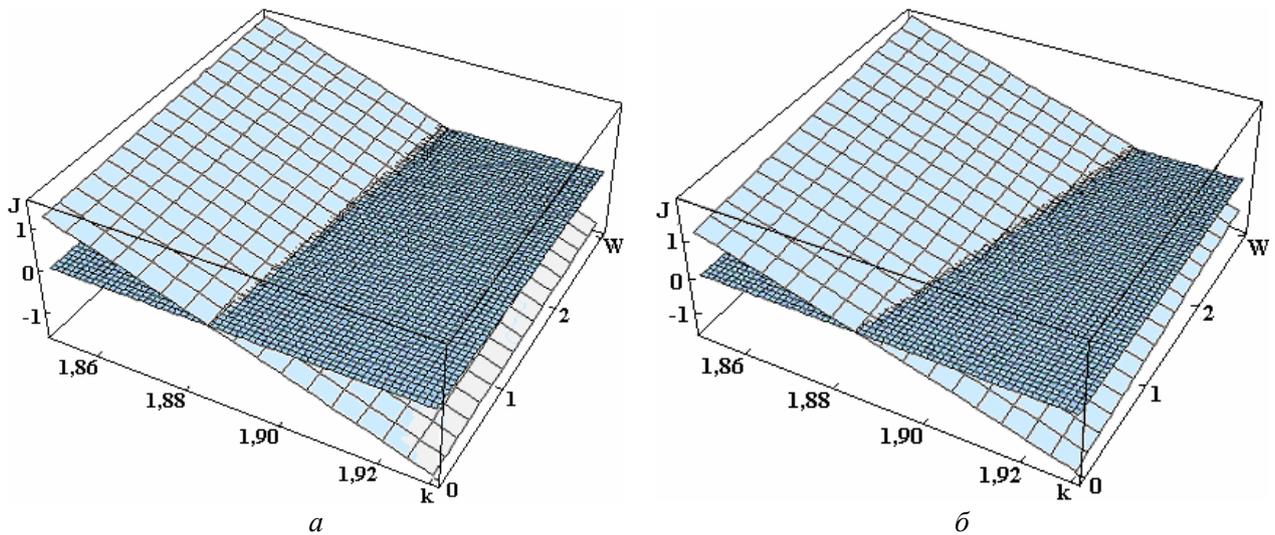


Рис. 3. То же, что на рис. 1, для неосесимметричных волн с $m=2$

Рис. 4, рассчитанные по соотношению (2), как и рис. 2–3, иллюстрируют возможность резонансного обмена между волнами с различной симметрией. Из (2) видно, что возможно резонансное взаимодействие между осесимметричной модой $m=0$ и заданными в начальный момент времени произвольными неосесимметричными модами с $m \neq 0$. Иными словами, какого бы вида ни была начальная деформация струи, осесимметричная мода во втором порядке малости возбуждается всегда. На рис. 4 приведен график зависимости $J \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)$, рассчитанный при $m=1$, от величины волнового числа k и параметра w , пересеченной плоскостью $J=0$. На кривых $f_{10}(k, w) \equiv 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k) = 0$, по которым пересекаются поверхности, реализуется резонансное взаимодействие между заданной в начальный момент времени неосесимметричной волной с $m=1$ (изгибной волной) и волновым числом k и осесимметричной волной $m=0$ с волновым числом $2k$, возбуждающейся за счет нелинейности уравнений гидродинамики. При таком взаимодействии энергия перекачивается из неосесимметричной моды с $m=1$ к осесимметричной моде ($m=0$) с удвоенным волновым числом. Из рисунка видно, что такое резонансное взаимодействие может иметь место и при отсутствии на струе электрического заряда (при $w=0$). Интересно, что резонансное взаимодействие реализуется на двух кривых, одна из которых лежит в области малых значений волновых чисел $k \ll 1$, а другая – в области $k \sim 1$. Это обстоятельство может объяснить возможность одновременно разрыва струи в далеко отстоящих местах, как это наблюдается в экспериментах [4, 22].

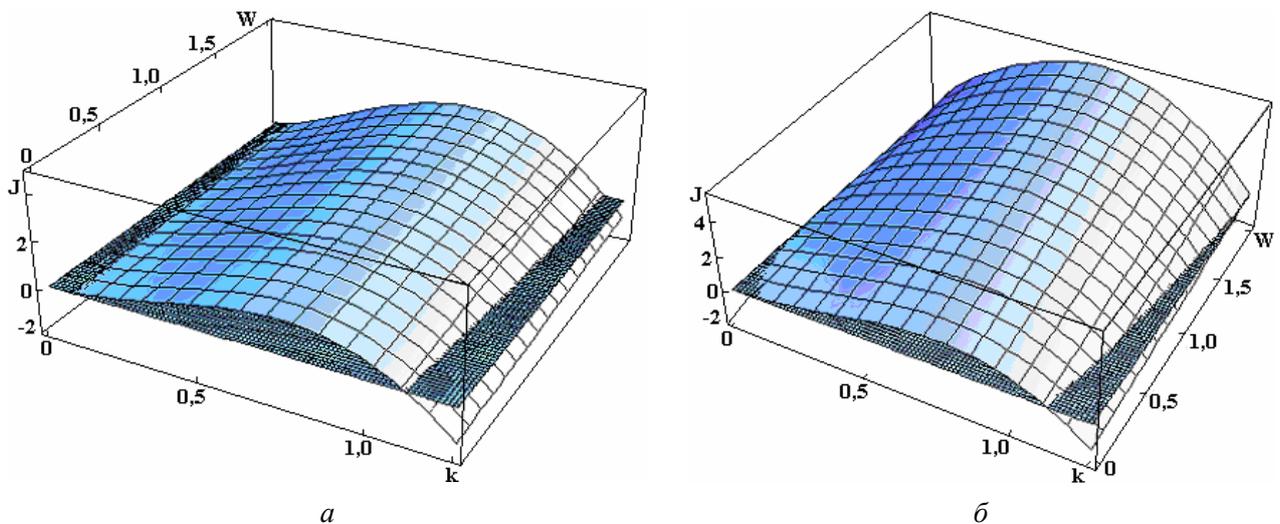


Рис. 4. То же, что на рис. 1, для ситуации взаимодействия неосесимметричных волн с $m=1$ с осесимметричной волной

Рис. 5 иллюстрирует особенности резонансного взаимодействия неосесимметричной изгибно-деформационной волны ($m=2$) с волной осесимметричной ($m=0$). Видно, что в качественном отношении картина резонансного взаимодействия сходна с приведенной на рис. 3,б, где рассматривалось

резонансное взаимодействие изгибно-деформационной волны ($m = 2$) с неосесимметричной волной с $m = 4$.

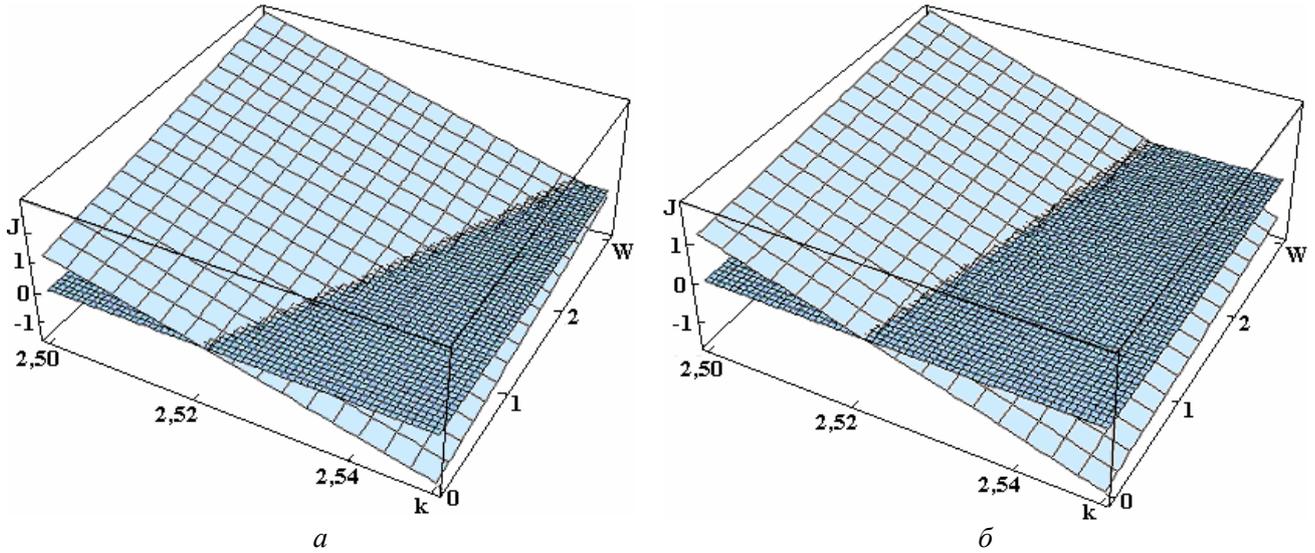


Рис. 5. То же, что на рис. 1, для ситуации взаимодействия неосесимметричных волн с $m = 2$ с осесимметричной волной

Из приведенных рисунков видно, что задание начальной деформации струи одной из неосесимметричных волн приводит к одновременной передаче части ее энергии как осесимметричной волне, так и к неосесимметричной волне с удвоенным азимутальным числом, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия.

Заключение. В расчетах второго порядка малости обнаружены вырожденные внутренние нелинейные резонансы, соответствующие обмену энергией как между осесимметричными волнами, заданными в начальный момент времени, и осесимметричными же волнами, порождаемыми нелинейностью уравнений гидродинамики, так и между волнами с различной симметрией. Положения резонансов зависят от диэлектрических проницаемостей жидкости и среды, напряженности электрического поля и величины межфазного поверхностного натяжения.

Приложение А.

Аналитические выражения для ортов нормали и касательных \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}_\varphi$, $\boldsymbol{\tau}_z$ к свободной поверхности струи, выписанные с точностью до компонент второго порядка малости по безразмерной амплитуде струи:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{e}_r \left[1 - (1/2r^2)(\partial_\varphi \xi)^2 - (1/2)(\partial_z \xi)^2 \right] - \mathbf{e}_z (\partial_\varphi \xi) - \\ &\quad - \mathbf{e}_\varphi (1/r)(\partial_\varphi \xi) + O(\varepsilon)^3; \\ \boldsymbol{\tau}_\varphi &= \mathbf{e}_r (1/r)(\partial_\varphi \xi) + \mathbf{e}_\varphi \left[1 - (1/2r^2)(\partial_\varphi \xi)^2 \right] + O(\varepsilon)^3; \\ \boldsymbol{\tau}_z &= \mathbf{e}_r (\partial_z \xi) + \mathbf{e}_z \left[1 - (1/2)(\partial_z \xi)^2 \right] - \mathbf{e}_\varphi (1/r)(\partial_\varphi \xi)(\partial_z \xi) + O(\varepsilon)^3. \end{aligned}$$

Приложение В.

Выражения для коэффициентов a_1 , a_2 и a_3 в поправках второго порядка малости:

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv P_1/Q_1; \quad Q_1 = 4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k); \quad a_2 \equiv P_2/Q_2; \quad Q_2 = 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k); \\ P_1 &= Y_1 G_{2m}(2k) + 2\omega \cdot X_1 - \sqrt{w/4\pi} \cdot k G_{2m}(2k) (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}) (\varepsilon_{in} M \cdot G_{2m}(2k) + 2L_1); \\ P_2 &= Y_2 G_0(2k) + 2\omega \cdot X_2 - \sqrt{w/4\pi} \cdot k G_0(2k) (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}) (\varepsilon_{in} M \cdot G_0(2k) + 2L_2); \\ a_3 &\equiv Y_3/(1 - 4m^2); \quad b_0 \equiv Y_4 + 0,5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_1 &= \omega_m(k) \left[2(k^2 + m^2) - G_m(k) \right] / G_m(k); \quad X_2 = \omega_m(k) \left[2k^2 - G_m(k) \right] / G_m(k); \\
Y_1 &= 1 + \frac{k^2 - 5m^2}{2} + \frac{\omega^2(k^2 + m^2 - 3G_m^2(k))}{2G_m^2(k)} - \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} \left[2kg\sqrt{4\pi w} \cdot H_m(k) + \right. \\
&\quad \left. + (1 - \varepsilon_{ex}/\varepsilon_{in}) \left(k\sqrt{4\pi w} + g \cdot H_m(k) \right)^2 + g^2(k^2 + m^2 - H_m^2(k)) \right]; \\
Y_2 &= 1 + \frac{k^2 - 3m^2}{2} + \frac{\omega^2(k^2 - m^2 - 3G_m^2(k))}{2G_m^2(k)} - \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} \left[2kg\sqrt{4\pi w} \cdot H_m(k) + \right. \\
&\quad \left. + (1 - \varepsilon_{ex}/\varepsilon_{in}) \left(k\sqrt{4\pi w} + g \cdot H_m(k) \right)^2 + g^2(k^2 - m^2 - H_m^2(k)) \right]; \\
Y_3 &= 1 - \frac{k^2 + 5m^2}{2} + \frac{\omega^2(k^2 - m^2 - G_m^2(k))}{2G_m^2(k)} - \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} \left[2kg\sqrt{4\pi w} \cdot H_m(k) - \right. \\
&\quad \left. - (1 - \varepsilon_{ex}/\varepsilon_{in}) \left(k\sqrt{4\pi w} + g \cdot H_m(k) \right)^2 + g^2(k^2 - m^2 + H_m^2(k)) \right]; \\
Y_4 &= 1 - \frac{k^2 + 3m^2}{2} + \frac{\omega^2(k^2 + m^2 - G_m^2(k))}{2G_m^2(k)} - \frac{(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})}{8\pi} \left[2kg\sqrt{4\pi w} \cdot H_m(k) - \right. \\
&\quad \left. - (1 - \varepsilon_{ex}/\varepsilon_{in}) \left(k\sqrt{4\pi w} + g \cdot H_m(k) \right)^2 + g^2(k^2 + m^2 + H_m^2(k)) \right].
\end{aligned}$$

Работа выполнена при поддержке грантов: Рособразования № РНП 2.1.1/3776, РФФИ № 09-01-00084 и № 09-08-00148.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В.М., Ярин А.Л. Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей. *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа*. М.: ВИНТИ, 1984, **18**, 112–197.
2. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Егорова Е.В. О некоторых особенностях нелинейного резонансного взаимодействия мод заряженной струи. *Электронная обработка материалов*. 2005, **41**(1), 42–50.
3. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Воронина Н.В., Егорова Е.В. Об осцилляциях и спонтанном распаде заряженных жидких струй. *Электронная обработка материалов*. 2006, **42**(6), 23–34.
4. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. *Спонтанный капиллярный распад заряженных струй*. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2007. 340 с.
5. Eggers J., Villermaux E. Physics of liquid jets. *Rep. Prog. Phys.* 2008, **71**(036601), 1–79.
6. Глонти Г. А. К теории устойчивости жидких струй в электрическом поле. *ЖЭТФ*. 1958, **34**(5), 1328–1330.
7. Nayyar N.K., Murty G.S. The stability of a dielectric jet in a presence of a longitudinal electric field. *Proc. Phys. Soc.* 1960, **75**(483), Pt.3; 369–373.
8. Saville D.A. Electrohydrodynamic stability: fluid cylinders in longitudinal electric fields. *Phys. Fluids*. 1970, **13**(12), 2987–2994.
9. Шутов А.А. Формирование и устойчивость заряженной вязкой струи в сильном электрическом поле. *Изв. РАН. МЖГ*. 2006, (6), 52–67.
10. Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I., Volkova M.V. On the possibility of the full stabilization of the capillary instability of a dielectric liquid jet by a longitudinal static field. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2009, **45**(3), 193–198.
11. Ширяева С.О. О капиллярной устойчивости цилиндрической струи диэлектрической жидкости в продольном электростатическом поле. *ЖТФ*. 2010, **80**(2), 47–51.
12. Ширяева С.О. Об устойчивости объёмно заряженной струи диэлектрической жидкости, ускоренно движущейся в коллинеарном струе электрическом поле. *Изв. РАН. МЖГ*. 2010, **46**(3), 57–68.
13. Григорьев А.И., Воронина Н.В., Ширяева С.О. Асимптотическое исследование нелинейных несимметричных волн на поверхности незаряженной диэлектрической струи в продольном электростатическом поле. *ЖТФ*. 2010, **80**(10), 22–29.

14. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. Нелинейный асимптотический анализ осцилляций неосесимметричных мод заряженной струи идеальной жидкости. *ЖТФ*. 2004, **74**(8), 6–14.
15. Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. Нелинейные осцилляции заряженной струи электропроводной жидкости при многомодовой начальной деформации ее поверхности. *ЖТФ*. 2006, **76**(9), 31–41.
16. Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И. О нелинейных поправках к частотам мод осцилляций заряженной струи идеальной жидкости. *ЖТФ*. 2007, **77**(2), 46–55.
17. Воронина Н.В., Ширяева С.О., Григорьев А.И. О нелинейных поправках к частотам неосесимметричных мод объемно заряженной струи диэлектрической жидкости. *ЖТФ*. 2008, **78**(6), 1–14.
18. Ширяева С.О. Об изгибной неустойчивости объемно заряженной капиллярной струи диэлектрической жидкости. *ЖТФ*. 2010, **80**(4), 24–32.
19. Григорьев А.И. Электростатическая неустойчивость сильно заряженной струи электропроводной жидкости. *ЖТФ*. 2009, **79**(4), 36–45.
20. Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. On electrostatic instability of a space-charged jet of dielectric liquid. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2009, **45**(6), 465–470.
21. Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O., Petrushov N.A., Volkova M.V. Instability of the lateral surface of strongly charged jets in a collinear flow of material environment. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2010, **46**(3), 22–28.
22. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes. *J. Electrostatics*. 1990, **25**, 165–184.

Поступила 20.12.10

Summary

It is studied the energy transfer from long waves independently from its symmetry on surface liquid jet to more short one at a degenerate internal nonlinear resonant interaction of a waves in longitudinal electrostatic field.
