

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИЗГИБНОЙ МОДЫ ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУИ
ВЯЗКОЙ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ С КОНЕЧНОЙ
ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ В КОЛЛИНЕАРНОМ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

С.О. Ширяева, А.И. Григорьев

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, shir@uniyar.ac.ru, grig@uniyar.ac.ru*

Введение. Феномен полидисперсного распада на капли заряженных струй жидкости, выбрасываемых с вершин свободно падающих капель [1] и менисков жидкости на торцах капилляров [2–6] при реализации их неустойчивости по отношению к поверхностному заряду, известен давно и широко используется в самых разнообразных направлениях техники и технологии. Среди множества экспериментально наблюдаемых режимов электродиспергирования [1, 4–8] в большинстве реализуется хлыстообразное движение свободного конца струи [9–10], которое связано с возбуждением изгибных волн на поверхности струи с азимутальным числом $m = 1$ [11]. В [12] это явление детально проанализировано для объемно заряженной капиллярной струи диэлектрической жидкости. В настоящем рассмотрении изучен более общий случай струи реально проводящей жидкости в суперпозиции продольного и радиального электростатических полей.

1. Формулировка задачи. Рассмотрим цилиндрическую струю несжимаемой жидкости с кинематической вязкостью ν , диэлектрической проницаемостью ϵ_{in} и удельной проводимостью σ , помещенную во внешнюю не проводящую среду, характеризующуюся диэлектрической проницаемостью ϵ_{ex} и пренебрежимо малой плотностью. В окружающем струю пространстве создается электростатическое поле напряженности \mathbf{E}_0 , коллинеарное оси струи, а на её поверхности равномерно распределён заряд с равновесной поверхностной плотностью χ . Причиной возникновения поверхностного заряда может быть создание в окружающем струю пространстве радиального электростатического поля, при этом предполагается, что проводимость жидкости достаточна, чтобы обеспечить отсутствие заряда в объёме струи.

Для решения задачи введём цилиндрическую систему координат (r, φ, z) , движущуюся с постоянной скоростью, равной несущей скорости струи, ось OZ которой совпадает с осью струи. Всё рассмотрение проведём в безразмерных переменных, где радиус струи R , плотность жидкости ρ и коэффициент поверхностного натяжения γ примем в качестве основных масштабов обезразмеривания ($R = \rho = \gamma = 1$).

Уравнение свободной поверхности струи, подверженной произвольным осцилляциям малой амплитуды, может быть записано в виде

$$r = 1 + \xi(z, \varphi, t),$$

где функция $\xi(z, \varphi, t)$ описывает отклонение формы поверхности от цилиндрической, а её амплитуда является малым параметром задачи ($|\xi(z, \varphi, t)| \ll 1$).

Будем исследовать устойчивость осцилляций свободной поверхности струи в описанной системе. Математическая формулировка соответствующей линейной задачи имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0; \quad \partial_t \mathbf{u} = -\nabla P_{in} + \nu \Delta \mathbf{u}; \quad \nabla P_{ex} = 0;$$

$$\mathbf{E}_j = -\nabla \Phi_j; \quad \Delta \Phi_j = 0; \quad j = \{in; ex\};$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{u} \rightarrow 0; \quad \nabla \Phi_{in} \rightarrow -E_{in}^{(0)} \mathbf{e}_z;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi_{ex} \rightarrow -E_0 \mathbf{e}_z;$$

$$\begin{aligned}
r = 1 + \xi(\varphi, z, t): \quad & \Phi_{in} = \Phi_{ex}; \quad \varepsilon_{in} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{in} - \varepsilon_{ex} \mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{ex} = 4\pi\chi; \\
& \partial_t H(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u} \cdot \nabla H(\mathbf{r}, t) = 0; \quad H(\mathbf{r}, t) \equiv r - (1 + \xi(\varphi, z, t)); \\
& \nu(\boldsymbol{\tau}_\varphi \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_\varphi \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \Pi_\varphi = 0; \\
& \nu(\boldsymbol{\tau}_z \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau}_z \cdot \nabla) \mathbf{u}) + \Pi_z + T = 0; \\
& -P_{in} + P_{ex} + 2\nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{u} - P_E + P_\gamma = 0.
\end{aligned}$$

Здесь P_{in} – гидродинамическое давление внутри струи; P_{ex} – давление во внешней среде; Φ_{in} , Φ_{ex} , \mathbf{E}_{in} , \mathbf{E}_{ex} – потенциалы и напряжённости электрического поля внутри (*in*) и вне (*ex*) струи; $E_{in}^{(0)}$ – напряжённость электрического поля на оси струи в равновесном состоянии; $\boldsymbol{\tau}_\varphi$, $\boldsymbol{\tau}_z$ и \mathbf{n} -касательные орты и орт нормали к возмущенной поверхности струи; Π_φ и Π_z – касательные компоненты электрической силы, действующей на единицу поверхности струи, а P_E , P_γ – давления на свободную поверхность электрического поля и капиллярных сил соответственно:

$$\begin{aligned}
\Pi_i &= \frac{1}{4\pi} \left[\varepsilon_{in} (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \nabla \Phi_{in}) (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{in}) - \varepsilon_{ex} (\boldsymbol{\tau}_i \cdot \nabla \Phi_{ex}) (\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{ex}) \right]; \quad (i = z, \varphi) \\
P_E &= \frac{1}{8\pi} \left[\varepsilon_{in} \left((\nabla \Phi_{in})^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{in})^2 \right) - \varepsilon_{ex} \left((\nabla \Phi_{ex})^2 - 2(\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi_{ex})^2 \right) \right]; \\
P_\gamma &= \text{div } \mathbf{n}.
\end{aligned}$$

Необходимо отметить, что в динамическом граничном условии для касательного направления $\boldsymbol{\tau}_z$ в невозмущённом состоянии системы вследствие движения поверхностного заряда в продольном электрическом поле электрическое касательное напряжение отлично от нуля. Для того чтобы его скомпенсировать, в уравнение формальным образом введено постоянное внешнее напряжение T , причиной возникновения которого может быть, например, сопротивление среды движению струи.

Сформулированную задачу дополним уравнением, описывающим динамику изменения поверхностной плотности электрического заряда:

$$\partial_t \chi + \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_\sigma + \chi(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \nabla \cdot \mathbf{n} + \nabla_\Sigma \cdot (\chi(\mathbf{u}_\tau + b \mathbf{E}_\tau)) + \nabla_\Sigma \cdot (D \nabla_\Sigma \chi) = 0$$

где $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})$; $\mathbf{E}_\tau = \mathbf{E} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})$; $\mathbf{j}_\sigma = -\sigma \mathbf{E}_{in}$; $\nabla_\Sigma \cdot \mathbf{A}$ и $\nabla_\Sigma \chi$ – поверхностная дивергенция и поверхностный градиент, вычисляемые по формулам (символом Σ обозначена поверхность струи):

$$\nabla_\Sigma \cdot \mathbf{A} = \left(\nabla \cdot \mathbf{A} - \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \right) \Big|_\Sigma; \quad \nabla_\Sigma \chi = \left(\nabla \chi - \mathbf{n} \frac{\partial \chi}{\partial n} \right) \Big|_\Sigma.$$

В уравнении баланса заряда учтены следующие физические факторы: проводимость жидкости, изменение площади свободной поверхности в результате её деформации, перемещение зарядов вдоль поверхности током жидкости под действием тангенциальной компоненты электрического поля и за счёт диффузии. Последние два из перечисленных процесса характеризуются подвижностью носителей заряда b и коэффициентом диффузии D .

Решение сформулированной задачи стандартными методами (см., например, [6, 12]) в линейном по амплитуде волн приближении будем искать в виде разложений внутри струи по модифицированным функциям Бесселя первого рода $I_m(x)$, а вне струи (для электрического поля, связанного с периодическими деформациями поверхности струи) – по модифицированным функциям Бесселя второго рода $K_m(x)$, где m – азимутальный параметр, характеризующий симметрию деформаций поверхности струи. В итоге для азимутального числа $m = 1$, соответствующего изгибным деформациям, придем в пределе малой вязкости к дисперсионному уравнению:

$$\begin{aligned}
& s^2 - f_1 g(k) + 2\nu s \left(f_2 - \frac{1}{s^2} f_1 \right) + \\
& + \frac{1}{2s(s\alpha + 4\pi\sigma g(k))} \left\{ w 2sk^2 \left[s f_3 + 4\pi\sigma\alpha - D(k^2 + 1)f_4 \right] + \right. \\
& \quad + W \left[s^2 f_5 + 2s \left(4\pi\sigma f_6 - D(k^2 + 1)f_7 \right) + f_1 f_8 \right] - \\
& \quad \left. - ik\sqrt{wW} \left[s^2 f_9 \alpha_1 + 2s \left(4\pi\sigma f_{10} + D(k^2 + 1)f_{11} \right) - f_1 f_2 \alpha_1 \right] \right\} = 0; \quad (1) \\
& w = \frac{E_0^2}{4\pi}; \quad W = 4\pi\chi^2,
\end{aligned}$$

где параметры W и w характеризуют величину электрического заряда, приходящегося на единицу длины струи, и величину напряженности внешнего поля соответственно. Коэффициенты f_j ($j = 1, 2, \dots, 11$) являются функциями волнового числа k и диэлектрических проницаемостей ϵ_{in} , ϵ_{ex} , а их явные выражения приведены в приложении.

В (1) бросается в глаза, что в использованном приближении малой безразмерной вязкости из-за ограничения малыми её степенями исчезли компоненты, связанные с подвижностью носителей заряда b . Это означает, что влияние данного физического фактора на устойчивость волнового движения на поверхности струи значительно слабее остальных, учтённых в уравнении баланса заряда.

2. Анализ дисперсионного уравнения. Возмущения свободной поверхности струи с азимутальным числом, равным единице, приводят к изгибным её деформациям, но не сказываются на форме сечения струи. В отсутствие внешнего поля и поверхностного заряда такие возмущения устойчивы во всём диапазоне волновых чисел $k > 0$, то есть экспоненциально затухают со временем под влиянием вязкости жидкости. Наличие заряда на поверхности идеально проводящих струй [11] либо равномерно распределённого объёмного заряда в случае диэлектрических непроводящих струй [12] приводит к неустойчивости изгибной моды. Коллинеарное оси струи внешнее электростатическое поле является стабилизирующим фактором как в случае отсутствия заряда на струе [13] – изгибные возмущения не приводят к реализации неустойчивости, так и при его наличии [14] – продольное электрическое поле стабилизирует неустойчивость изгибных волн, порождаемую зарядом на струе.

Влияние продольного поля на устойчивость изгибной моды при учёте феномена поверхностной релаксации заряда иллюстрирует рис. 1. Из приведённых зависимостей видно, что электростатическое поле играет дестабилизирующую роль: уменьшает декременты затухания изгибной моды хорошо проводящих струй (рис. 1,а) и может быть причиной изгибной неустойчивости в случае плохо проводящих струй, так как согласно рис. 1,б для слабо проводящих жидкостей ветвь 2 из области отрицательных значений, где она характеризует декременты затухания переходит в область положительных значений, где она характеризует уже инкременты неустойчивости. На рис. 1 не приведены зависимости безразмерных частот волновых движений жидкости от безразмерного волнового числа (ввиду несообразности числовых значений величин: частоты существенно превышают по величине декременты и инкременты), а потому отметим, что капиллярные движения (линии 1 и 2) являются периодическими, а релаксационные (линии 3 и 4) – аperiodическими. Существенно, что устойчивость теряет периодическое «капиллярное» решение, и, следовательно, продольное поле приводит к колебательной неустойчивости изгибной моды. Термином «капиллярные» здесь и далее мы будем отмечать те решения дисперсионного уравнения, возникновение которых не связано с учётом процессов поверхностного перемещения заряда. Решения же, появившиеся вследствие учёта релаксационных явлений, будем называть «релаксационными». При $w \neq 0$ существует ещё одно (не приведенное ввиду несообразности величин) аperiodическое затухающее решение со значительно большим декрементом.

В отсутствие коллинеарной оси струи компоненты электростатического поля, но при отличном от нуля радиальном электрическом поле картина проявления неустойчивости выглядит несколько иначе (рис. 2). На рис. 2 капиллярные движения жидкости (линии 1 и 2) являются периодическими, а релаксационные (линии 3 и 4) – аperiodическими. Частоты на рис. 2 не приведены ввиду несообразности их величин с величинами декрементов и инкрементов. Поверхностный заряд, так же как и продольное поле, может являться причиной «капиллярной» периодической неустойчивости длинноволновых возмущений на поверхности струй с различной проводимостью (линии 1 и 2 на

рис. 2). Наличие радиального поля приводит в случае низкой проводимости струи к появлению ещё одного аperiodического неустойчивого решения, обусловленного релаксационными явлениями и обладающего существенно большим инкрементом (линии 3 и 4 на рис. 2,б). Именно это решение и будет определять картину развития изгибной неустойчивости в данном случае, то есть неустойчивость будет аperiodической.

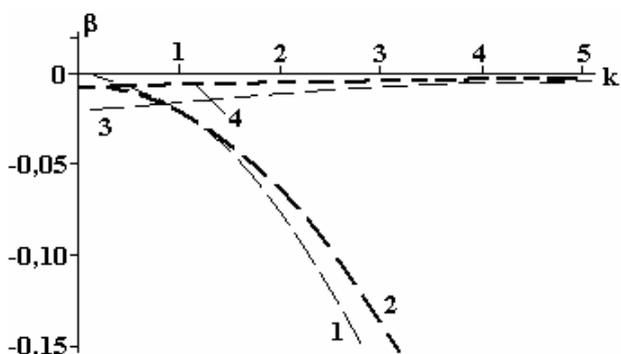


Рис. 1,а. Зависимости от безразмерного волнового числа k безразмерных декрементов β периодических капиллярных (линии 1 и 2) и аperiodических релаксационных (линии 3 и 4) движений жидкости, рассчитанные при $\nu=0,01$, $\sigma=100$, $W=0$, $\epsilon_{ex}=1$, $\epsilon_{in}=20$, $D=0$ и различных значениях полевого параметра W . Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $w=0$, толстыми – при $w=0,1$

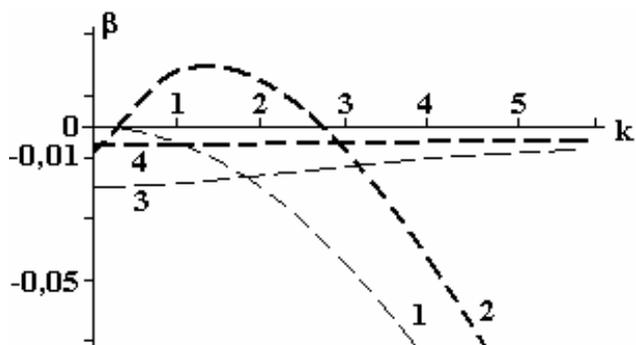


Рис. 1,б. Те же зависимости, что на рис. 1,а, рассчитанные при $\sigma=1$. В области $\beta < 0$ кривые описывают декременты затухания, в области $\beta > 0$ – инкременты неустойчивости

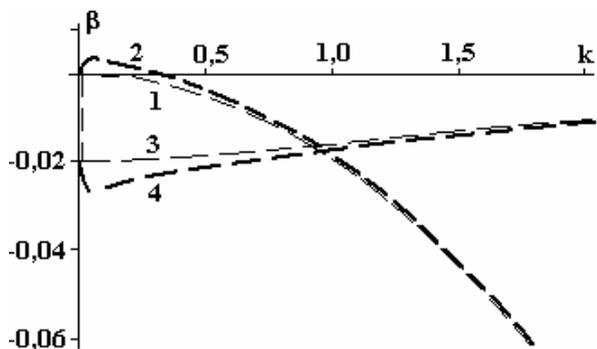


Рис. 2,а. Зависимости аналогичные приведенным на рис. 1,а, но рассчитанные при $w=0$ и различных значениях зарядового параметра W . Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $W=0$, толстыми – при $W=0,1$

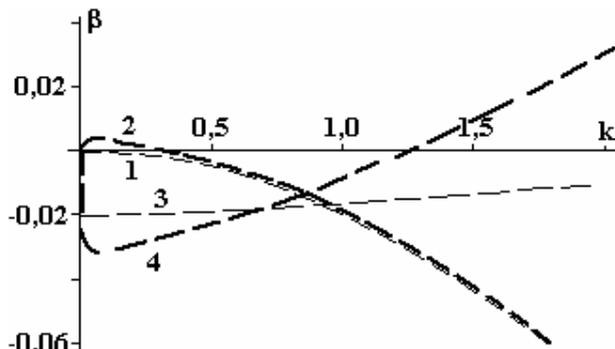


Рис. 2,б. Те же зависимости, что на рис. 2,а, рассчитанные при $\sigma=1$

Ситуацию, реализующуюся при наличии обеих компонент электрического поля, как продольной, так и радиальной, иллюстрирует рис. 3. На рис. 3,а приведены зависимости, полученные только для капиллярных движений, на рис. 3,б,в – для релаксационных. Видно, что совместное дестабилизирующее действие радиальной и коллинеарной компонент поля приводит к тому, что, во-первых, увеличиваются инкременты и расширяется спектр неустойчивых «капиллярных» периодических решений (линии 1 и 3 на рис. 3,а), а, во-вторых, неустойчивое «релаксационное» решение становится периодическим (линии 2 на рис. 3,б,в). Для слабо проводящих струй «релаксационная» неустойчивость (линии 2 на рис. 3,б) характеризуется большими значениями инкремента, чем «капиллярная» (линии 3 на рис. 3,а), а её граница смещается в область малых волновых чисел. В итоге диапазоны длин волн, претерпевающих «капиллярную» и релаксационную неустойчивости, частично перекрываются. Интересно, что величина инкремента периодического релаксационного движения 2 на рис. 3,б растет с ростом волнового числа (с уменьшением длины волны) и уже при $k=1$ в два раза превышает максимальное значение величины инкремента капиллярной неустойчивости (линии 3 на рис. 3,а). Это означает, что реально наблюдаемая картина реализации изгибной неустойчивости струи определится

именно релаксационной ветвью. В случае хорошо проводящих струй «релаксационная» неустойчивость (линии 3 и 4 на рис. 3,в) реализуется для более коротких волн, чем «капиллярная» (линии 1 и 2 на рис. 3,в), и развивается с более низкими инкрементами. Как «капиллярные», так и «релаксационные» решения являются периодическими, но частоты на рис. 3,в не приведены из-за несоизмерности с инкрементами и декрементами по величинам (отметим лишь, что частоты «релаксационных» решений существенно меньше капиллярных).

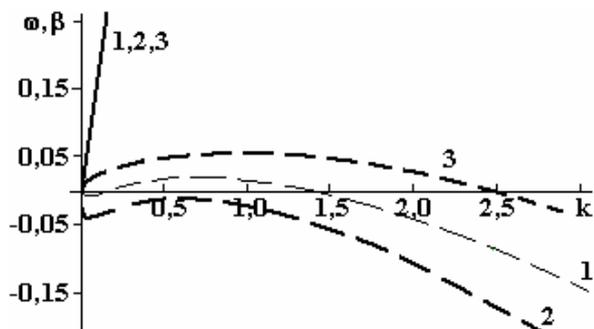


Рис. 3,а. Зависимости от безразмерного волнового числа k безразмерных декрементов, инкрементов (штриховые линии) и частот (сплошные линии) капиллярных движений жидкости, рассчитанные при $\nu=0,01$, $\sigma=1$, $w=0,1$, $\epsilon_{ex}=1$, $\epsilon_{in}=20$, $D=0$ и различных значениях зарядового параметра. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $W=0$ (оба корня сливаются, так как имеют одинаковые декременты-инкременты), толстыми – при $W=0,1$. Частоты для всех этих корней практически одинаковы, поэтому сплошные линии слились (линии 1–3)

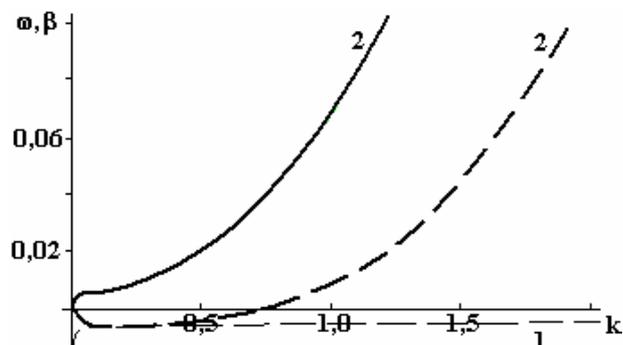


Рис. 3,б. Те же зависимости, что на рис. 3,а, но для релаксационных движений жидкости. При $W=0$ релаксационные движения аperiodические затухающие (линия 1), при $W=0,1$ релаксационные движения периодические нарастающие (линии 2)

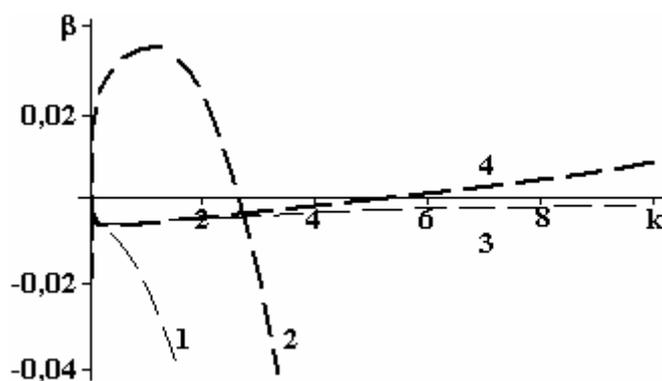


Рис. 3,в. Зависимости от безразмерного волнового числа k безразмерных декрементов, инкрементов капиллярных (линии 1 и 2) и релаксационных (линии 3 и 4) движений жидкости, рассчитанные при $\nu=0,01$, $\sigma=100$, $w=0,1$, $W=0$, $\epsilon_{ex}=1$, $\epsilon_{in}=20$, $D=0$ и различных значениях зарядового параметра. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $W=0$, толстыми – при $W=0,1$

Расчеты для струй с различными значениями диэлектрической проницаемости жидкости показывают, что «капиллярная» неустойчивость легче реализуется для струй диэлектрических жидкостей: увеличиваются инкременты, расширяется спектр неустойчивых волн, в то время как «релаксационная» неустойчивость характеризуется тем меньшими инкрементами, чем меньше диэлектрическая проницаемость жидкости. Эта тенденция справедлива и для хорошо проводящих струй, хотя и менее ярко выражена.

Следует заметить, что кроме корней дисперсионного уравнения, приведённых на рис. 1–3, релаксация заряда вдоль поверхности приводит к появлению аperiodических либо периодических

решений, затухающих, как правило, с большими декрементами и приводящих к дополнительному рассеянию энергии колебаний.

Влияние процесса диффузии заряда вдоль поверхности струи на устойчивость её изгибных деформаций иллюстрируют рис. 4 и 5. Отметим сразу, что это явление может играть заметную роль лишь в случае слабо проводящих струй. Кривые на рис. 4 рассчитаны при значениях безразмерных параметров, характерных для тонкой струи воды с радиусом ~ 1 мкм, и иллюстрируют различное влияние диффузии на «капиллярные» и «релаксационные» ветви решений в электрическом поле, коллинеарном оси струи. Для тонких струй диффузия заряда усиливает затухание «капиллярных» ветвей решения (рис. 4,а). Устойчивые в отсутствие диффузии «релаксационные» решения (тонкие линии на рис. 4,б) при учёте диффузии заряда становятся неустойчивыми (толстые линии на рис. 4,б) в области коротких волн, приводя к «релаксационной» неустойчивости: периодической (линии 1) либо аperiodической (линии 2 и 3). В области относительно длинных волн (при $k < 4$ на рис. 4,б) «релаксационные» движения остаются устойчивыми (линии 4 и 5). При увеличении коэффициента диффузии (рис. 4,в) левая граница неустойчивых «релаксационных» решений (линии 1 и 3) смещается в область длинных волн.

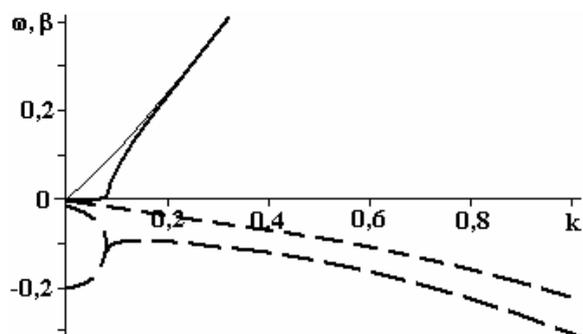


Рис. 4,а. Зависимости от безразмерного волнового числа k безразмерных декрементов (штриховые линии) и частот (сплошные линии) капиллярных движений жидкости, рассчитанные при $\nu = 0,1$, $\sigma = 0,1$, $W = 0$, $w = 0,01$, $\epsilon_{ex} = 1$, $\epsilon_{in} = 80$ и различных значениях коэффициента диффузии. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $D = 0$, толстыми – при $D = 0,1$

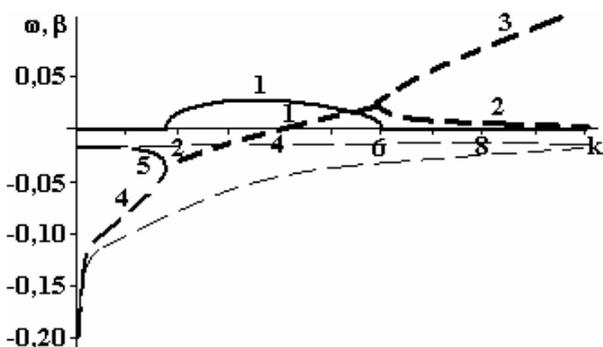


Рис. 4,б. Те же зависимости, что на рис.3а, но для релаксационных движений жидкости. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $D = 0$, толстыми (линии 1–5) – при $D = 0,01$

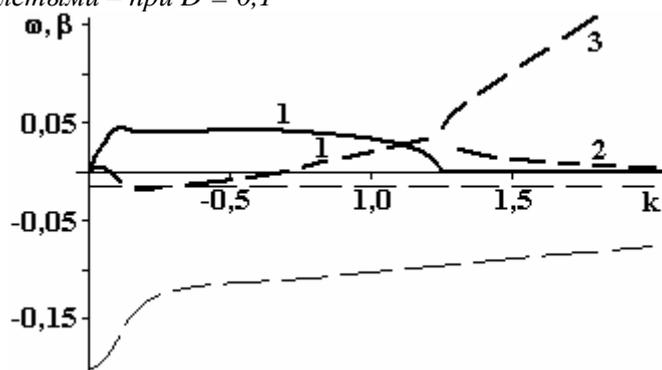


Рис. 4,в. Те же зависимости, что на рис. 4,б, но толстыми линиями (линии 1–3) нанесены результаты расчетов при $D = 0,1$

С ростом значения безразмерной проводимости и уменьшением параметра вязкости (то есть для более толстых струй) учёт явления диффузии заряда в продольном поле приводит к появлению области неустойчивости и для «капиллярных» решений (рис. 5,а). Однако эта область охватывает лишь малые значения волновых чисел, и поэтому реализация неустойчивости возможна лишь для достаточно длинных струй. Кроме того, инкременты «капиллярной» неустойчивости существенно меньше (более чем на порядок) «релаксационной». При отличной от нуля радиальной составляющей электрического поля с увеличением коэффициента диффузии область «капиллярной» периодической неустойчивости расширяется, а инкременты увеличиваются (рис. 5,б). Влияние явления поверхностной диффузии заряда на «релаксационные» ветви решения заметно снижается в отсутствие продоль-

ной компоненты электрического поля. Следует отметить, что зависимости, представленные на рис. 4 и 5, имеют иллюстративный характер, поскольку рассчитаны при больших значениях безразмерного коэффициента диффузии (например, для струи воды микронного радиуса эта величина составляет всего $\sim 10^{-4} \div 10^{-3}$).

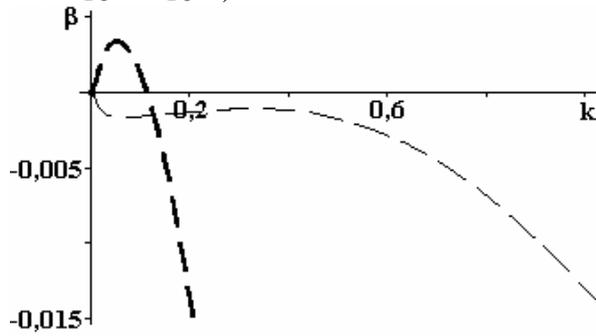


Рис. 5,а. Зависимости от безразмерного волнового числа k безразмерных декрементов и инкрементов капиллярных движений жидкости, рассчитанные при $\nu = 0,01$, $\sigma = 1$, $w = 0,01$, $W = 0$, $\epsilon_{ex} = 1$, $\epsilon_{in} = 20$ и различных значениях коэффициента диффузии. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $D = 0$, толстыми – при $D = 1$

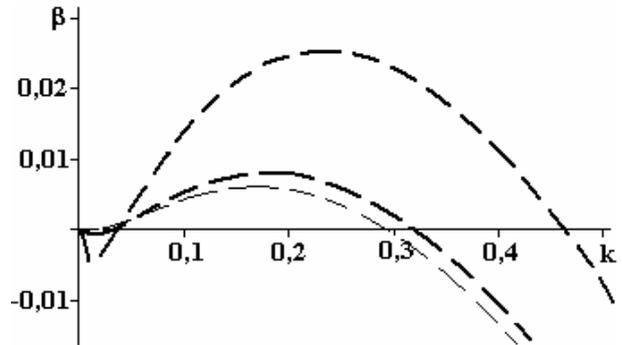


Рис. 5,б. То же, что на рис. 5,а, но рассчитано при $\nu=0,1$, $\sigma=0,1$, $w = 0$, $W = 0,1$, $\epsilon_{ex} = 1$, $\epsilon_{in} = 80$. Тонкими линиями нанесены результаты расчетов при $D = 0$, средними – при $D = 0,1$; толстыми – при $D = 1$

Заключение. Вследствие явления поверхностной релаксации заряда продольное электрическое поле оказывает дестабилизирующее влияние на изгибные деформации поверхности струй, приводя к их периодической неустойчивости в случае низкой проводимости.

Во внешнем электрическом поле произвольной направленности неустойчивость изгибной деформации является периодической и для слабо проводящих струй охватывает практически весь диапазон волновых чисел.

Диэлектрические свойства жидкости дают преимущество развитию изгибной неустойчивости более длинных волн.

Влияние поверхностной диффузии заряда более заметно для слабо проводящих струй и при наличии продольного электрического поля. Диффузия заряда является дестабилизирующим фактором для коротких волн, приводя к их неустойчивости. При увеличении как проводимости струи, так и радиальной компоненты внешнего поля диффузия усиливает неустойчивость и длинноволновых изгибных деформаций.

Приложение. $f_1 = -k^2$; $f_2 = 2 + 2k^2 - g(k)$; $f_3 = (\epsilon_{ex} - \epsilon_{in})^2 g(k)$;
 $f_4 = f_3 - (\epsilon_{ex} - \epsilon_{in})\alpha$; $f_5 = 3 + k^2 + 2f_2 h(k) + 2\epsilon_{in} f_6$;
 $f_6 = \frac{1}{\epsilon_{ex}} [1 + h(k)] g(k)^2$; $f_7 = \left(1 + \frac{\epsilon_{in}}{\epsilon_{ex}} g(k)\right) [1 + k^2 + g(k)h(k)]$;
 $f_8 = 2(1 + k^2)^2 - (3 + k^2)g(k)$; $f_9 = 1 - 2g(k)$;
 $f_{10} = 1 + k^2 + [1 - g(k) + 2h(k)]g(k)$;
 $f_{11} = (\epsilon_{ex} - \epsilon_{in}) [1 + k^2 - g(k)] + \alpha \left[1 - \left(1 - 2\frac{\epsilon_{in}}{\epsilon_{ex}}\right)g(k)\right]$;
 $\alpha = \epsilon_{in} g(k) - \epsilon_{ex} h(k)$; $g(k) \equiv 1 + \frac{k I_2(k)}{I_1(k)}$; $h(k) \equiv 1 - \frac{k K_2(k)}{K_1(k)}$.

$I_m(k)$ и $K_m(k)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; m – азимутальный параметр.

ЛИТЕРАТУРА

1. Macky W.A. Some investigations on the deformation and breaking of water drops in strong electric fields. *Pros. Roy. Soc., London*. 1931, **133**(822), 565–587.
2. Zeleny J. The electrical discharge from liquid points and a hydrostatic method of measuring the electric intensity at their surfaces. *Phys. Rev.* 1914, **3**(2), 69–91.
3. English W.N. Corona from water drop. *Phys. Rev.* 1948, **74**(2), 179–189.
4. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes. *J. Electrostatics*. 1990, **25**, 165–184.
5. Jaworek A., Krupa A. Classification of the modes of EHD spraying. *J. Aerosol Sci.* 1999, **30**(7), 873–893.
6. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. *Спонтанный капиллярный распад заряженных струй*. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2007. 340 с.
7. Ширяева С.О., Григорьев А.И. Опыт полуфеноменологической классификации наблюдаемых режимов электростатического диспергирования жидкостей. *ЖТФ*. 1994, **64**(3), 13–25.
8. Shiryayeva S.O., Grigor'ev A.I. The semifenomenological classification of the modes of electrostatic dispersion of liquids. *J. Electrostatics*. 1995, **34**, 51–59.
9. Magarvey R., Outhouse L. Note on the break up of charged liquid jet. *J. Fluid Mech.* 1962, **13**(1), 151–157.
10. Huebner A., Chu H. Instability and breakup of charged liquid jets. *J. Fluid Mech.* 1971, **49**(2), 361–372.
11. Taylor G. Electrically driven jet. *Proc. Roy. Soc. London*: 1969, **A313**, 453–470.
12. Ширяева С.О. Об изгибной неустойчивости объемно заряженной капиллярной струи диэлектрической жидкости. *ЖТФ*. 2010, **80**(4), 24–31.
13. Ширяева С.О. О капиллярной устойчивости цилиндрической струи диэлектрической жидкости в продольном электростатическом поле. *ЖТФ*. 2010, **80**(2), 45–50.
14. Ширяева С.О. Об устойчивости объемно заряженной струи диэлектрической жидкости, ускоренно движущейся в коллинеарном электрическом поле. *Изв. РАН. МЖГ*. 2010, (3), 57–68.

Поступила 01.10.10

Summary

It is investigated by a theoretical analytical way the bending instability of a charged capillary jet of viscous dielectric liquids with finite conductivity in a collinear to the jet electrostatic field. It is shown that realization of the bending instability mostly probable for jets with small conductivity and surface charge diffusion coefficients.
