

О ВЫДЕЛЕНИИ ЭНЕРГИИ В МАСЛЯНОМ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕ ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ ТРАНСФОРМАТОРОВ

М.С. Апфельбаум^{*,**}

**ОИВТ РАН, Ижорская, 13, строение 2, г. Москва, 125412, Россия, msa@ihed.ras.ru*

***МФТИ, Институтский переулок, 9, г. Долгопрудный, 141700, Московская область, Россия*

Введение

Достаточно сильные отклонения от линейного закона Ома для твёрдых слабопроводящих сред в предпробойных постоянных во времени приложенных полях плоского конденсатора экспериментально обнаружил Поль [1]. Позже аналогичный нелинейный рост электрического тока с ростом высокого напряжения как в однородном, так и в сильно неоднородном приложенном электрическом полях экспериментально был получен как в жидких (типа трансформаторного масла), так и в газообразных слабопроводящих средах.

Теоретически рост проводимости рассматриваемых сред с ростом модуля напряженности электрического поля обосновал Френкель в [2], используя уравнение аррениусовского типа для объемной скорости ионизации с учётом уменьшения потенциала такой ионизации сильным электрическим полем. Аналогично снижение работы выхода в предпробойном поле определено Шоттки. Онзагер [3] получил математически близкое к френкелевскому выражение для зависимости предпробойной скорости диссоциации слабых электролитов от модуля напряженности электрического поля методами физической кинетики. Постулируя выполнение закона химического равновесия (действующих масс) не только для рассматриваемых сред типа трансформаторного масла, Онзагер [3] и Френкель [2] получили и зависимости их проводимости от модуля напряженности электрического поля вплоть до её пробойной величины. При этом в [2, 3] не учитывалось влияние дрейфа зарядов и движения жидкости в таком поле. Кроме того, не учитывается в этих и некоторых более поздних работах и обусловленная градиентом объёмных концентраций зарядов их диффузия. Не исследовались теоретически в работах известных учёных, а также в ряде других более поздних работах временные изменения предпробойных электродинамических характеристик, наблюдаемые при проведении опытов даже с высоковольтным источником постоянного приложенного напряжения и малой мощности. Случай переменного предпробойного электрического поля, генерируемого, например, трансформатором, рассматривался нами в [4]. Как и ранее, рассматриваем только случай, когда максвелловское время релаксации объёмного заряда гораздо меньше периода колебания генерируемого трансформатором предпробойного электрического поля, что позволяет свести эти задачи расчёта о выделении энергии в рассматриваемых теплоносителях к квазистационарным.

С учётом таких макроскопических процессов нами были выведены электрогидродинамические уравнения предпробойного образования зарядов в слабопроводящих жидких средах типа трансформаторного масла. Было показано (например, в [5]), что для применения формул Френкеля и Онзагера при расчёте установившейся проводимости исследуемых сред достаточно сохранения условия их электрической (плазменной) квазинейтральности в рассматриваемых полях. При этом плотность образующегося в предпробойных полях объёмного заряда должна быть гораздо меньше во всём пространстве (вне неквазинейтральных погранслоёв) объёмной плотности самонейтрализующегося фона зарядов разных знаков. Тогда, в частности по [5], система электродинамических уравнений зарядообразования может решаться независимо от системы гидродинамических при малости и соизмеримости скорости течений среды по сравнению со скоростью дрейфа ионов в электрическом поле. Отметим также, что в уравнениях движения рассматриваемых достаточно плотных и теплопроводных сред в сильном электрическом поле, которые выписываются в настоящей работе, следует учитывать влияние вязкости, например по [6]. В таких полях молекулы жидкостей типа трансформаторного масла, а также, возможно, имеющихся в них примесей частично распадаются на ионы. Также считается, что

Доклад на Международном симпозиуме по электрическим методам обработки материалов к 100-летию академика Б.Р. Лазаренко.

© Апфельбаум М.С., Электронная обработка материалов, 2011, 47(1), 43–52.

свободные электроны в рассматриваемых средах (достаточно плотных) до образования в них электрических дуг и их электрического пробоя в основном прилипают к нейтральным молекулам. Поэтому дополнительная макроскопическая электронная компонента при описываемом теоретическом моделировании предпробойных явлений в этих средах нами не исследуется. При этом считаем, что на величину искомых ампер-временных характеристик и энергетического выделения влияют только ионные компоненты.

В случае плоского высоковольтного конденсатора квазистационарная экспоненциальная вольт-амперная характеристика достаточно легко получается из френкелевской формулы для проводимости и соответствующего уравнения сохранения заряда в дифференциальной форме. В случае сферического конденсатора распределение установившегося потенциала электрического поля в его межэлектродном промежутке удовлетворяет получаемому из этого закона сохранения заряда и френкелевской проводимости достаточно сложному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с интегральным условием равенства разности этих потенциалов на обкладках конденсатора приложенному напряжению.

Из аналитического решения этого уравнения, полученного нами, в частности в [5], и удовлетворяющего такому условию, следуют омическая линейность вольт-амперной характеристики в слабых полях и её квадратичность в предпробойных, наблюдаемые при их сильной неоднородности. Полученное решение описывает также более точно, чем униполярные решения систем уравнений для таких полей в случае разреженных газов типа таунсендовского, переходной от линейного к квадратичному участок вольт-амперной характеристики. В этом решении вместо таунсендовской эмпирической константы напряжения зажигания короны для расчёта таких характеристик используется справочная или аккуратно определяемая по измерениям омических вольт-амперных характеристик, а в некоторых случаях рассчитываемая по составу молекул среды константа её низковольтной проводимости. В полученной теоретической высоковольтной вольт-амперной характеристике учтено, в отличие от соответствующих таунсендовских, влияние температуры и зарядового состава молекул среды, частично диссоциирующей на ионы, на эти предпробойные характеристики. Константу напряжения “зажигания короны“ для рассматриваемых сред менее целесообразно использовать при получении расчётных вольт-амперных характеристик, чем для слабоионизованных разреженных газов, так как трудно измерять это не всегда наблюдаемое напряжение в достаточно плотных, вязких и теплопроводных средах. Актуальными являются задачи расчёта ионизационного выделения энергии, приводящего к образованию разрядных дуг в таких средах и к их пробоям в окрестностях высоковольтных электродов. Для высоковольтного электрода, близкого к точечному, такая энергия ранее уже рассчитывалась [5] без учёта вклада энергии в неквазилинейных пограничных слоях. Актуальными являются задачи расчёта такой энергии для диагностики электрических пробоев вплоть до аварий в маслонаполненных трансформаторах. Ниже будут получены аналитическое решение электрогидродинамических дифференциальных уравнений для такой нестационарной задачи в случае плоско-параллельных электродов с межэлектродным расстоянием $d \ll \sqrt{S}$ (здесь S – площадь поверхности пластины конденсатора) и численное решение уравнений электродинамического приближения для аналогичной задачи в случае коаксиальных цилиндрических электродов с межэлектродным расстоянием гораздо меньшим, чем длина их образующих. По результатам решений будет оценено время, за которое происходит выделение энергии в нагретом цилиндрическом слое масла в трансформаторе у его поверхности (в технической литературе, как правило, поверхность трансформатора считается цилиндрической, но при этом подразумевается соответствующая математическая аппроксимация реальной поверхности трансформатора). Кроме того, будет описано теоретическое моделирование охлаждения трансформаторов с использованием выписанной системы макроскопических уравнений и оценен порядок величины энергии, выделяемой теплоносителем.

Теоретическая модель и макроскопические уравнения

Для объёмных концентраций зарядов и, возможно, имеющихся примесей выполняются следующие неравенства в случае слабопроводящих сред:

$$\begin{cases} n_{\pm} \ll n_a; \\ n_p \ll n_a. \end{cases} \quad (1)$$

Считаем, что объёмная скорость ионизации с последующим прилипанием свободных электронов к молекулам рассматриваемых теплоносителей в зависимости от состава их частичной диссоциации (случай очищенного трансформаторного масла) или частичной диссоциации имеющихся примесей – это термодинамическая непрерывная функция объёмных концентраций сложных по со-

ставу молекул среды и таких примесей, а также температуры и напряжённости электрического поля. Рекомбинацию зарядов ввиду, как правило, прилипания свободных электронов в рассматриваемых жидкостях к их молекулам предполагаем только ионной:

$$W_I = W_I(n_+, n_-, T, |E|) = W_I(n_+, n_-, T, 0) f(|E|) \quad (2)$$

$$\begin{cases} W_r = K_r n_+ n_- \\ K_r = Z \frac{(b_+ + b_-) |e|}{\varepsilon \varepsilon_0} \end{cases} \quad (3)$$

Выражение, используемое нами для K_r , в 1903 году получено Ланжевенем. Онзагер, на основе методов физической кинетики, обосновал в [3] слабое влияние электрических полей вплоть до полей пробоя на величину ионного коэффициента рекомбинации. В [3] описано и достаточно сильное влияние электрического поля на величину константы (коэффициента) диссоциации рассматриваемых слабых жидких электролитов. При этом для коэффициента рекомбинации в [3] было также получено второе из уравнений (3). А для монотонно возрастающей зависимости константы диссоциации от модуля напряжённости макроскопического электрического поля – выражение в виде аналитической и в нуле функции Бесселя первого порядка мнимого аргумента, близкой в предпробойных полях к неаналитической в нуле френкелевской экспоненте от корня этого модуля.

Для коэффициента диффузии свободных зарядов используем соотношение Нернста-Таунсенда-Эйнштейна:

$$D_{\pm} = \frac{k_B T b_{\pm}}{Z |e|} \quad (4)$$

Вид непрерывной скалярной функции f векторного аргумента в (2) используем с учётом вышеизложенного, по Френкелю [2]:

$$f(\vec{E}) = \exp\left(\beta \left|\vec{E}\right|^{\frac{1}{2}}\right); \quad \beta = \frac{|Ze|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi \varepsilon \varepsilon_0 k_B T}} \quad (5)$$

С учётом (1)–(5) уравнения зарядообразования до пробоя выглядят согласно [5] так:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla q) - \frac{k_B T b}{Z |e|} \Delta q + (\vec{E}, \nabla \sigma) = -\frac{q \sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad \Delta \phi = -\frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0} \quad (6A)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla \sigma) + b^2 (\vec{E}, \nabla q) - \frac{k_B T b}{Z |e|} \Delta \sigma - \frac{\sigma^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \exp\left(\beta \left|\vec{E}\right|^{1/2}\right) \exp\left[\frac{A}{k_B T_0} \left(1 - \frac{T_0}{T}\right)\right] + \frac{\sigma^2}{\varepsilon \varepsilon_0} = 0 \quad (6B)$$

Систему электродинамических уравнений (6), где учтены диффузионный и конвективный переносы ионных компонент в движущейся среде и уравнение Пуассона для потенциала макроскопического электрического поля, следует замкнуть термогидродинамическими уравнениями для её нейтральной компоненты, близкими к уравнениям для всей смеси при выполнении соотношений (1). При этом дифференциальное уравнение, описывающее неразрывность массы несжимаемых сред, имеет вид [6]:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (7)$$

Это уравнение учитывалось нами при выводе уравнений (6). К (7), согласно [6], следует добавить уравнение движения, уравнение сохранения энергии и уравнение состояния масла (при охлаждении трансформаторов достаточно использовать линейное уравнение состояния Буссинеска для зависимости плотности от T ввиду малости коэффициента теплового расширения вязких сред по сравнению с коэффициентом теплового расширения разреженных газов). А вместо уравнения сохранения энергии можно использовать стандартное уравнение притока тепла [6], не учитывая слабого джоулева нагрева и влияния энергии электрической поляризации, а также диссипации энергии, обусловленной вязкостью жидкости и ионно-молекулярной диффузией. Поле сил электрической поляризации связанных зарядов только перераспределяет давление рассматриваемой среды. Это позволяет для теоретического моделирования охлаждения трансформаторов использовать вместо импульсного уравнения уравнение переноса вихрей [6]:

$$\vec{\chi} = \text{rot} \vec{V} \quad (8)$$

$$\rho \frac{d\vec{\chi}}{dt} - \rho(\vec{\chi}, \nabla) \vec{V} - \rho v \Delta \vec{\chi} = [\nabla q, \vec{E}]. \quad (9)$$

В начальный момент времени:

$$q(t=0) = V(t=0) = 0; \quad \sigma(t=0) = \sigma_0. \quad (10)$$

Аналитическое решение для квазистационарного распределения потенциала уединённой высоковольтной сферы выписанных выше уравнений в изотермическом случае получено нами, например, в [5] при выведенных из них там же условий квазинейтральности рассматриваемых слабопроводящих сред. Оно выглядит таким образом:

$$\phi(r) = \left(\frac{I}{4\pi\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{8}{\beta} - \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\tau\sigma_0} \left(|\vec{E}|^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{\beta} \right)} \right] \text{sign}(\phi(r_0));$$

$$|\vec{E}| \exp\left(\frac{\beta}{2} |\vec{E}|^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{I}{4\pi\sigma_0 r^2}; \quad |\phi(r_0)| = U.$$

$$\phi(r) = \left(\frac{I}{4\pi\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{8}{\beta} - \sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\tau\sigma_0} \left(|\vec{E}|^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{\beta} \right)} \right] \text{sign}(\phi(r_0));$$

$$|\vec{E}| \exp\left(\frac{\beta}{2} |\vec{E}|^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{I}{4\pi\sigma_0 r^2}; \quad |\phi(r_0)| = U. \quad (11)$$

Аналогично выглядит решение в случае сферического высоковольтного конденсатора с заданной квазистационарной разностью потенциалов U между его обкладками. Линейность вольт-амперной характеристики слабых полей и квадратичность сильно неоднородных предпробойных получаются из (11) соответствующими предельными переходами. Распределение предпробойного квазистационарного потенциала сферической симметрии по (11) сильно отличается от лапласовского ввиду влияния на самосогласованное поле поля образующегося объёмного заряда.

В случае же плоского высоковольтного конденсатора электрическое поле вне приэлектродных погранслоёв нарушения квазинейтральности электрических зарядов при соответствующих малых параметрах, выписанных нами ранее (например, в [5]), остаётся однородным. Это получается из закона сохранения заряда. А зависящая от граничных условий на электродах неоднородность пространственного распределения полей образуется при наложении предпробойного напряжения наряду с объёмным зарядом только в таких слоях. Отметим, что толщина таких слоёв может расти при увеличении величин выписанных ранее [5, 8, 9] критериев подобия. А при их малости результаты разных экспериментов в поле плоского конденсатора подтверждают формулу расчета квазистационарной изотермической предпробойной вольт-амперной характеристики в условиях френкелевской формулы (5). Теоретически она получается из (5) и из интеграла одномерного уравнения сохранения заряда в дифференциальной форме, которое следует из (6) при условиях стационарной квазинейтральности. Тогда в случае определения константы такого интегрирования по измеряемому электрическому току эта зависимость выглядит следующим образом:

$$\sigma_0 \frac{U}{d} \exp\left[\frac{\beta}{2} \left(\frac{U}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] = \frac{I}{S}. \quad (12)$$

Нестационарные решения и их применение для расчёта предпробойных ампер-временных характеристик и энергии, выделяемой теплоносителем при охлаждении трансформаторов

Независимо от вихревых характеристик предпробойных течений рассматриваемых сред в межэлектродном промежутке плоского конденсатора электродинамическим уравнениям (6) и начальным условиям (10) удовлетворяет достаточно простое частное решение:

$$I = \sigma SU / d, q = 0, |\vec{E}| = U / d,$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \left[\sigma_0\tau + \varepsilon\varepsilon_0 - (\varepsilon\varepsilon_0 - \sigma_0\tau) e^{-2t/\tau} \right]}{\tau \left[\sigma_0\tau + \varepsilon\varepsilon_0 + (\varepsilon\varepsilon_0 - \sigma_0\tau) e^{-2t/\tau} \right]},$$

$$\tau = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma_0 \exp\left(0,5\beta|\vec{E}|^{1/2}\right)}. \quad (13)$$

Такое решение получено обычным интегрированием уравнения (6В) по времени и в предположении его независимости от декартовой координаты x в одномерном случае. Решения уравнений (6), удовлетворяющие электрохимическим (в случае диссоциации) или ионизационным граничным условиям на пластинах конденсатора, близки за пределами неквазинейтральных погранслоёв (13). Теоретически это может быть обосновано описанными, например в [7], методами асимптотических погранслойных разложений по малым параметрам, соответствующим режимам квазинейтральности, при членах уравнений (6) со старшими пространственными производными.

Скорости предпробойных течений рассматриваемой слабопроводящей среды при этом могут быть и малыми, и соизмеримыми по сравнению со скоростями дрейфа ионов в электрическом поле. Выражения для таких критериев подобия описываемых явлений получены нами, например в [5, 8]. Там же проведены оценки величин этих параметров для исследуемых предпробойных режимов. При этом показано, что для достаточно широкого класса сред условия электрической (плазменной) квази-нейтральности могут выполняться и при наложении сильных электрических полей. Нетрудно показать по [5, 8], что эти условия выполняются и для масляного теплоносителя в предпробойном неоднородном электрическом поле, генерируемом трансформатором.

Тогда, независимо от граничных условий на электродах, ампер-временную характеристику плоского конденсатора в случае источника постоянного по времени высокого напряжения или по [4] источника тока низкой частоты можно в одномерном приближении рассчитывать по (13). Из (13) следует, что с ростом приложенного напряжения (до пробоя) усиливаются и временные отклонения предпробойных токов до установления. Кроме того, из (13), как и следовало ожидать, формула Френкеля [2] с функцией f , определяемой по (5), описывающая зависимость квазистационарной проводимости от напряжённости поля, получается в виде временного асимптотического приближения. Выходит, что для идеальных диэлектриков указанная известная формула становится практически неприменимой, ибо время релаксации объёмного заряда при этом становится достаточно большим. В решении (13) фигурирует время протекания химических реакций и установления проводимости, равное половине времени релаксации такого заряда. Поэтому временем накопления энергии, обусловленной предпробойной ионизацией (диссоциацией) в рассматриваемых теплоносителях, является максвелловское время релаксации объёмного заряда. Большая величина этой энергии приводит к электрическим пробоям, например в трансформаторах.

Как следует из результатов [8], в условиях квазинейтральности формулу (13) можно получить также при разных величинах подвижностей положительных и отрицательных зарядов. Аналитического аналога формулы (13) в случае цилиндрического и сферического конденсаторов, а тем более для двумерных конфигураций высоковольтных электродов типа “провод над плоскостью” и трёхмерных типа “игла-плоскость” из уравнений (6) получить не удастся даже без учёта влияния гидродинамики на электродинамические характеристики. В этих случаях расчёт ампер-временных характеристик до установления можно проводить численно, используя упрощённую для решения внешних по [7] задач систему уравнений (6) с начальными условиями (10).

Аналог формулы (13) для сильных неоднородных электрических полей любой сложной конфигурации был получен в [9] только при условиях слабого влияния на них поля образующегося объёмного заряда. Для получения же простейшего численного решения в случае цилиндрической симметрии, близкой к поверхности маслonaполненного трансформатора, и последующих расчётов нелинейных вольт-амперных и предпробойных ампер-временных характеристик нами использовалась система нестационарных одномерных электродинамических уравнений, получаемая из уравнений (6) с применением в одномерных случаях уравнения Гаусса для напряжённости электрического поля цилиндрической симметрии вместо уравнения Пуассона для её потенциала:

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{E \cdot \partial \sigma}{\partial r} &= -\frac{q \cdot \sigma}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \frac{\sigma_0^2 \cdot \exp(\beta \cdot E^{1/2}) - \sigma^2}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}, \\ \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r} &= \frac{q}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}.\end{aligned}\tag{14}$$

При получении системы уравнений (14) в левых частях (6) сохранены члены, описывающие нестационарные изменения квазинейтральной проводимости. При этом можно анализировать и образование объемного заряда с его ростом от нулевого в начальный момент времени до квазистационарного. Ранее на возможность образования установившегося заряда указал Остроумов [10], но математически замкнутая система уравнений, описывающая такое образование, выведена нами, например в [9]. А при получении одномерных уравнений (14) учтены оценки энергии активации A частично диссоциирующих молекул масла, свидетельствующие о слабом влиянии разности температур, возникающих при предпробойном нагреве трансформаторов, на проводимость масляного теплоносителя. При этом неизотермическая экспонента из (6В) в (14) не учитывается (считается пренебрежимо малой по сравнению с френкелевской). Исключенные, как и в [11], члены с пространственными старшими производными влияют при выполнении критерия квазинейтральности только на изменение искомых распределений электродинамических характеристик в неквазинейтральных тонких слоях у границ объёмов, заполненных рассматриваемыми средами. При получении численного решения системы уравнений (14) использовались начальные условия (10) для проводимости и плотности объемного заряда, а также условие лапласовости электрического поля цилиндрической симметрии в начальный момент времени:

$$E(r, 0) = \frac{U}{r \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}.\tag{15}$$

В (15), в отличие от аналогичных задач, решённых численно в наших предыдущих работах [12, 13], r_1 и r_2 – внутренний и внешний радиусы не цилиндрического высоковольтного конденсатора, заполненного рассматриваемой средой, а соответствующего слоя жидкости (масла в трансформаторе у его поверхности, охлаждаемого таким маслом). Алгоритм и программа численных расчётов приведенных выше уравнений, используемые для анализа предпробойных процессов в масляном теплоносителе, выбирались, как и в предыдущих работах. Разработка алгоритма проводилась с шагом пространственно-временной сетки по радиальной координате гораздо больших размеров неквазинейтральных погранслоёв, образующихся как в сильном электрическом поле, так и в ионной диффузии. Расчёты велись от внутренней цилиндрической поверхности рассматриваемого слоя к внешней в предположении, что эта поверхность заряжена положительно. При смене знака заряда этой поверхности задача расчёта выделения энергии в таком слое сводится к предыдущей со сменой знака по распределениям напряженности поля и плотности объемного заряда. Такое утверждение для нестационарных задач рассматриваемого типа показано численно в [11]. А именно в [11] с использованием обобщений уравнений типа (14) на неизотермический случай это показано при решении аналогичной нестационарной задачи об электрическом поле в окрестности остывающей дисперсной сферической частицы. Но, в отличие от той неизотермической задачи, при решении описываемой в настоящей работе нестационарный интеграл сохранения заряда:

$$\varepsilon \varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E = \frac{I}{2\pi r l}\tag{16}$$

не удаётся использовать для понижения порядка системы уравнений (14).

При расчетах, результаты которых будут представлены ниже, интеграл (16) использовался для контроля численного счета разностных уравнений, получаемых из дифференциальных уравнений (14) в безразмерной форме. Кроме того, по (16) определялась искомая зависимость электрического тока от времени до установления. В (16) l – длина образующей рассматриваемого цилиндрического слоя ($l = 1,626$ м для поверхности цилиндра (см. рисунок), которой может быть аппроксимирована поверхность трансформатора). Строго говоря, следует рассматривать неодномерную задачу, но для

анализа предпробойного охлаждения трансформаторов достаточно одномерного приближения с учётом только изменений по r (см. рисунок). Переход к безразмерным уравнениям осуществлялся изменением искомых и исходных величин следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{t} &= \frac{t}{\tau}, \quad \tilde{E} = \frac{Ed}{U}, \quad q = \frac{qd^2}{\varepsilon\varepsilon_0 U}, \\ \tilde{\beta} &= \beta \left(\frac{U}{d} \right)^{1/2}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{d}, \\ \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_0 \exp\left(\frac{\tilde{\beta}}{2}\right)}.\end{aligned}\tag{17}$$

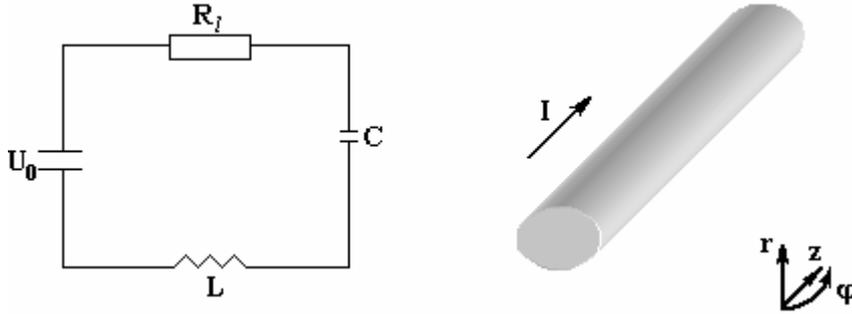


Схема обозначений для численных расчётов уравнений одномерного приближения (18) (пояснения – в тексте)

Тогда получаемая из (14) система безразмерных уравнений выглядит так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{E}}{\tilde{r}} &= \tilde{q}, \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{t}} + \frac{E \partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{r}} &= -\tilde{q} \tilde{\sigma}, \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} &= \exp\left\{ \tilde{\beta} \left(\sqrt{\tilde{E}} - 1 \right) \right\} - \tilde{\sigma}^2.\end{aligned}\tag{18}$$

Начальные условия для безразмерных переменных следующие:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(\tilde{r}, 0) &= \exp\left(\frac{\tilde{\beta}}{2}\right), \\ \tilde{q}(\tilde{r}, 0) &= 0, \\ \tilde{E}(\tilde{r}, 0) &= \frac{1}{\tilde{r} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}.\end{aligned}\tag{19}$$

Интеграл (16) в безразмерном имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\sigma} \tilde{E} &= \frac{\tilde{I}}{\tilde{r}}, \\ \tilde{I} &= \frac{I}{2\pi l \sigma_0 U \exp\left(\frac{\tilde{\beta}}{2}\right)}.\end{aligned}\tag{20}$$

Из аналогичной задачи для плоского конденсатора и её аналитического решения (13) следует, что установление проводимости происходит при временах, равных половине времени релаксации объёмного заряда и самосогласованного с этим зарядом предпробойного неоднородного электрического поля низкой частоты. Поэтому для получения искомого численного решения выбирался шаг во времени $\Delta \tilde{t} = 0,02$. Установление происходило примерно за 50 шагов. Для проведения конкретных численных расчетов по радиальной координате выбирался слой у поверхности трансформатора с внутренним радиусом 0,25 м и внешним, равным радиусу поверхности трансформатора (0,42 м). То есть считалось, что охлаждаемый слой у поверхности трансформатора, заполненного маслом, можно аппроксимировать цилиндрическим слоем толщины d ($d = r_2 - r_1$). При расчётах из справочников выбирались диэлектрическая проницаемость среды (2,24) и её низковольтная проводимость: 10^{-11} См/м при $T = 400$ К, то есть в рассматриваемом нагретом слое масла. Для теоретического анализа охлаждения трансформатора с учётом влияния на него предпробойных электрогидродинамических течений следует вводить дополнительные к критериям Re и Pr электрогидродинамические критерии подобия. Такой критерий электрогидродинамического взаимодействия будет введен по аналогии с критерием магнитогидродинамического взаимодействия (числом Гартмана) ниже. При описываемых расчётах для случая цилиндрической симметрии модуль генерируемого трансформатором эффективного (среднего по величине в случае гармонических колебаний) напряжения выбирался 100 кВ.

При счете по пространственной координате шаг равнялся 0,1. Дифференциальные уравнения (18) заменялись, как и в [9], соответствующими разностными по [14]. По полученным численным решениям этих уравнений определялись временные изменения полного тока до квазистационарности при низких частотах. Результаты расчетов на первых шагах во времени были проведены ранее в [8, 9]. В этих работах уже описано отличие результатов по расчетам q и E для начальных лапласовских высоковольтных полей плоского и цилиндрического конденсаторов.

Кроме того, в [9] отличие искомым электродинамических характеристик в случае однородности предпробойного приложенного поля от случая его сильной неоднородности проанализировано и в случае установившихся q и E . Отличие же структуры течений в сильном неоднородном приложенном поле от ячеистых течений в плоском конденсаторе также описано нами ранее. При этом в неоднородном поле знак образующегося заряда вне неквазинейтральных слоёв совпадает со знаком поверхности трансформатора. И течения направлены от неё независимо от её знака. Поэтому при генерации полей достаточно низкой частоты предложенную нами теорию можно применять для охлаждения трансформаторов. Помимо того, в настоящей работе, исходя из полученных аналитических и численных решений, опишем, как и в [13], сходство искомым характеристик для случая однородного и сильно неоднородного приложенных полей. Оно состоит в достаточно быстрой в обоих случаях временной эволюции и достаточно быстрого накопления энергии, приводящего к электрическим пробоям в трансформаторах. Из формулы (13) следует, что время выделения такой энергии для трансформаторного масла составляет доли секунды. Отметим, что счетная устойчивость описанной в настоящей статье разностной схемы нами не исследовалась. Но это может быть сделано по аналогии с анализом устойчивости [14] для близких одномерных задач. Изменение $\tilde{\sigma}$ обусловлено влиянием предпробойного поля на скорость реакции диссоциации (ионизации) рассматриваемых сред. При этом для исходных данных, при которых проводились численные расчеты (их схема описана выше), достаточно быстрое установление проводимости происходило за достаточно малое время (тоже доли секунды). После такого времени установления получается уравнение сохранения заряда:

$$|\tilde{E}| \exp\left(\frac{\beta}{2} |\tilde{E}|^2\right) = \frac{I}{2\pi\sigma_0 l r}. \quad (21)$$

В (21) I – квазистационарный ток в случае низких частот в соответствии с [4].

Тогда интегральный заряд вне приэлектродных слоев нарушения квазинейтральности

$$Q = \int_V q dV, \quad (22)$$

где q определяется из последнего уравнения (14) и уравнения (21). При этом получается:

$$Q = \tau I \left[\exp\left(\frac{-\beta\sqrt{E_2}}{2}\right) - \exp\left(\frac{-\beta\sqrt{E_1}}{2}\right) \right]; E_1 = E(r_1), E_2 = E(r_2). \quad (23)$$

По (23) для данных, при которых проводились описанные численные расчеты установления, по порядку величины для трансформаторного масла можно достичь $Q = 10^{-4}$ кулон даже без учёта объ-

ёмного заряда, образующегося в неквази нейтральных погранслоях, для дуговой электрон-ионной плазмы такие слои известны как легмюровские [15]. Этот теоретический результат свидетельствует о высокой степени зарядки в высоковольтных установках. В частности, в трансформаторах, что подтверждается экспериментально для больших объёмов масла в трансформаторах, генерирующих эффективное напряжение до 100 кВ, порядок накапливаемой в нагретом слое масла у его поверхности энергии рассчитываемой, как и в [5] ($A=QU$), достигает 0,001 МДж без учёта энергии, выделяемой в легмюровских пограничных слоях нарушения квази нейтральности [15], а также без учёта энергии джоулева нагрева. Удельная плотность выделяемой энергии в случае трансформаторного масла по порядку величины для трансформаторов, рассчитанных на более высокие напряжения, получается близкой к порядку взрывных [16]. При этом энергия определялась, как и в [5]. Более точное аналитическое интегрирование плотности энергии по [17] приводит к небольшому поправочному множителю для случая сферической симметрии в предпробойных полях. Поэтому для рассматриваемого приближённого случая цилиндрической симметрии, близкого к сферической, достаточно определять искомую энергию, как QU (как указывалось выше, в случае сильного неоднородного электрического поля, как и в [5], считаем, что время, за которое в теплоносителе накапливается энергия, определяется временем релаксации объёмного заряда в среде, а не временем протекания соответствующих химических реакций [16]). При этом расчёт выделения в жидкости энергии, обусловленного предпробойными электродинамическими и ионизационными процессами по предложенной нами модели, можно использовать для диагностики электрического пробоя как одного из типов взрыва с соответствующим временным накоплением энергии, наблюдаемого в высоковольтных устройствах, в частности трансформаторах.

Отметим, что такие коэффициенты, как константа диссоциации или ионизации, можно определять не по Аррениусу, а рассчитывать методами физической кинетики с более сложным выделением искомой энергии пробоя. При этом анализ предпробойного охлаждения трансформаторов, проведенный в [18] по системе уравнений (6)–(9), тоже можно проводить. Покажем это.

При расчётах методами физической кинетики получится функция f , отличная от френкелевской экспоненты (в частности, онзагеровская функция Бесселя [3], аналитическая и в нуле). Но при этом уточнение формулы

$$Nu=C, \quad (24)$$

имеющейся как в многочисленной технической литературе, так и в [6], полученное нами в [18]:

$$Nu=C+kU, \quad (25)$$

остаётся применимым. Действительно, формула (24) выведена в [6] методами подобия и размерностей с малыми Re использованием (6)–(9) без учёта течений теплоносителя, обусловленных сильным электрическим полем. Поэтому при наличии таких течений в трансформаторе на его охлаждение следует учитывать зависимость Nu от электрогидродинамического аналога магнитогидродинамического числа Гартмана. В [18] был введен параметр электрогидродинамического взаимодействия, показавший, что он пропорционален генерируемому трансформатором эффективному электрическому напряжению. Этот критерий является отношением не амперовых, как в магнитной гидродинамике, а кулоновских сил к силам вязкого трения. При этом плотность таких сил следует определять из (6) в начальные моменты времени. На такую плотность конкретный вид f влияет слабо. Кроме того, на ней слабо сказывается и учёт влияния электрического поля на коэффициент рекомбинации по [19], где получены соответствующие поправки к формуле Ланжевена-Онзагера (3). Это и приводит к (25) в случае малости дополнительного к Re и Pg электрогидродинамического критерия подобия

$$1 \gg Eh \sim U \quad (26)$$

для описанных выше расчётов трансформатора на 100–500 кВ. В формулу (25), в которой k зависит [18] от вязкости, теплопроводности и плотности, можно использовать масла. А для трансформаторов на более высокое эффективное электрическое напряжение $Eh \sim 1$ и $Eh \gg 1$ не следует ограничиваться только первым приближением тэйлоровского ряда. В таких случаях линейная зависимость (25) неприменима. Не применима она и для импульсных трансформаторов, ибо при их охлаждении объёмный заряд в масле накапливаться не успевает [8–10].

Трансформаторы переменного тока чаще применяются в промышленности и быту, чем импульсные, что позволяет рекомендовать предлагаемое теоретическое моделирование (в частности, формулу (25)) для использования при анализе их эффективности.

Основные обозначения: U – генерируемое электрическое напряжение; d – межэлектродное расстояние; e – заряд протона; k_B – постоянная Больцмана; D – коэффициент диффузии; b – коэффи-

циент подвижности; q – объемная плотность заряда; V – скорость движения среды; n – концентрация; E – напряженность электрического поля; S – площадь поверхности электрода; r – радиальная координата; t – время; τ – время релаксации заряда; χ – завихренность; ε – диэлектрическая проницаемость; I – сила электрического тока; T – абсолютная температура; f – функция скалярного или векторного аргумента; W – объёмная скорость образования зарядов или нейтралов; Z – валентность иона; σ – проводимость среды; Nu – число Нуссельта; Pr – число Прандтля; Re – число Рейнольдса; A – энергия, работа; Ha – число Гартмана (критерий магнитогидродинамического взаимодействия); Ek – критерий электрогидродинамического взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Poole H.H. On the dielectric constant and electrical conductivity of mica in intense field. *Philosophical magazine*. 1916, S. 6, **2**(187), 112–129.
2. Френкель Я.И. К теории электрического пробоя в диэлектриках и электронных полупроводниках. *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1938, **8**(12), 1291–2001.
3. Onsager L. Deviation from Ohm's law in a weak electrolytes. *Journal of chemical physics*. 1934, (2), 599–611.
4. Апфельбаум М.С. О применении резольвентных операторов в электрогидродинамике. *Электронная обработка материалов*. 1987, (2), 59–61.
5. Апфельбаум М.С. Задача о точечном электровзрыве слабопроводящих сред. *Электронная обработка материалов*. 2000, (6), 31–42.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика*. **6**. Гидромеханика. М., 1989.
7. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические разложения решений сингулярно возмущённых уравнений*. М., 1973.
8. Апфельбаум М.С., Козыренко В.Е. Физическое моделирование и расчёт электрогидродинамических течений. *Электрохимия*. 1991, (7), 855–863.
9. Апфельбаум М.С. Ионизация и течение слабопроводящей жидкости в неоднородном электрическом поле. *Электронная обработка материалов*. 1988, (1), 60–65.
10. Остроумов Г.А. *Взаимодействие электрических и гидродинамических полей*. М., 1979.
11. Apfelbaum M.S., Apfelbaum E.M. On electric field distribution in the vicinity of particles in a weakly ionized disperse medium. *Chem.Phys. Report*. 2000, **18**, 2313–2328.
12. Apfelbaum M.S. One-dimensional stationary problems of calculating pre-breakdown volt/ampere characteristics of weakly ionized media. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2005, **41**(2), 55–59.
13. Apfelbaum M.S. One-dimensional nonstationary calculation of prebreakdown electrodynamic characteristics of weakly ionized media. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2008, **44**(3), 195–202.
14. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. М., 1970.
15. Tonks L., Langmuir I. A general theory of the plasma of an arc. *Physical review*. 1929, **14**, 876–922.
16. Apfelbaum M.S. On a prebreakdown electrodynamic energy model for weakly ionized media. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2009, **45**(4), 38–46.
17. Apfelbaum M.S. The prebreakdown electrohydrodynamic equations for liquid insulators. *Proceedings of 7th international conference: "Modern problems of electrodynamics and electrohydrodynamics of liquids"*, Saint-Petersburg, 2003, 9–13.
18. Apfelbaum M.S. On theoretical modeling of transformer cooling. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2010, **46**(4), 336–338.
19. Жакин А.И. Ионная электропроводность и комплексообразование в жидких диэлектриках. *Успехи физических наук*. 2003, (5), 51–68.

Поступила 24.08.10

Summary

A theoretical model of electrohydrodynamic pre-breakdown phenomena in a weakly conductive media is proposed. Differential equations and initial conditions for describing this model are written. The analytical and numerical solutions of these equations are given. The breakdown energy value for oil in transformer is calculated.