

## ОДНОМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА ПРЕДПРОБОЙНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛАБОИОНИЗОВАННЫХ СРЕД

*Институт теплофизики экстремальных состояний  
объединенного института высоких температур Российской академии наук,  
ул. Ижорская, д. 13, строение 2, г. Москва, 125412, Россия, [msa@ihed.ras.ru](mailto:msa@ihed.ras.ru)*

### **Введение**

Достаточно сильные отклонения от закона Ома для твердых слабопроводящих сред в предпробойных постоянных по времени приложенных полях плоского конденсатора экспериментально обнаружил Пуль [1]. Позже нелинейные отклонения от этого закона как в однородном, так и в сильно неоднородном предпробойном приложенном электрическом поле наблюдались для жидких и газообразных слабопроводящих сред.

Теоретически рост проводимости рассматриваемых сред с ростом модуля напряженности электрического поля обосновал Френкель [2], используя уравнение Аррениусовского типа для объемной скорости ионизации с учетом снижения потенциала такой ионизации сильным электрическим полем. Аналогичное снижение работы выхода в предпробойном поле определено Шоттки Онзагером, получившим математически близкое к френкелевскому выражение для зависимости предпробойной скорости диссоциации слабых электролитов от модуля напряженности электрического поля методами физической кинетики. Однако при получении аналитически по таким скоростям стационарных зависимостей проводимости от ограниченной полем пробоя величины напряженности электрического поля Онзагером и Френкелем не учитывалось влияние дрейфа зарядов в этом поле, их гидродинамического (газодинамического) переноса (отметим, что твердые слабопроводящие среды в настоящей статье не рассматриваются) и обусловленной градиентом их объемных концентраций диффузии на пространственное распределение этих концентраций. Не исследовались в их работах, а также в ряде других (более поздних) временные изменения предпробойных электродинамических характеристик, наблюдаемые в опытах с высоковольтным источником постоянного приложенного напряжения режимов (случай использования источника переменного по времени высокого напряжения с теоретическим описанием соответствующих экспериментов в настоящей работе тоже не рассматривается).

Автором настоящей статьи из выведенных им ранее электрогидродинамических дифференциальных уравнений предпробойного образования зарядов в слабопроводящих средах показано (например, в [3, 4]), что для применения формул Френкеля и Онзагера при расчете установившейся проводимости исследуемых сред достаточно сохранения условия их электрической (плазменной) квазинейтральности. При этом плотность образующегося в предпробойных полях объемного заряда должна быть гораздо меньше плазменной плотности самонейтрализующегося фона зарядов разных знаков. Тогда по [4] система электродинамических уравнений зарядообразования может решаться независимо от системы гидродинамических при соизмеримости скоростей течений среды и дрейфа ионов в электрическом поле, причем в гидродинамических уравнениях движения достаточно плотных и теплопроводных сред в сильном электрическом поле, которые тоже отмечаются в настоящей работе, влияние вязкости следует учитывать, например, согласно [5]. Считается также, что свободные электроны в таких средах в основном прилипают к нейтралам, поэтому дополнительная макроскопическая электронная компонента в данной статье не рассматривается.

В случае плоского высоковольтного конденсатора стационарная (установившаяся) экспоненциальная вольт-амперная характеристика достаточно легко получается из френкелевской формулы для проводимости и уравнения сохранения заряда в дифференциальной форме. В случае сферического конденсатора распределение установившегося потенциала электрического поля в его межэлект-

родном промежутке удовлетворяет получаемому из этого закона сохранения заряда и френкелевской проводимости достаточно сложному обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка с условием равенства разности этих потенциалов на обкладках конденсатора приложенному напряжению.

Из аналитического решения этого уравнения, полученного нами впервые в [4] и удовлетворяющего такому условию, следуют омическая линейность вольт-амперной характеристики в слабых полях и ее квадратичность в предпробойных, наблюдаемые в сильно неоднородных полях. Полученное решение описывает также математически и физически более строго, чем униполярные решения в случае разреженных газов типа Таунсендовского, переходной от линейного к квадратичному участок вольт-амперной характеристики. Именно вместо эмпирической константы напряжения зажигания короны, в данном случае в предпробойной зависимости тока от напряжения имеется справочная или аккуратно определяемая по вольт-амперным характеристикам, а в некоторых случаях рассчитываемая по составу молекул среды константа – ее низковольтная проводимость. Кроме того, в полученной автором теоретической высоковольтной вольт-амперной характеристике учтено, в отличие от Таунсендовских, влияние температуры и зарядового состава молекул среды на эти предпробойные характеристики. Отметим также, что константу типа напряжения зажигания короны для рассматриваемых сред использовать при получении расчетных вольт-амперных характеристик менее целесообразно, чем для разреженных газов, ввиду имеющихся трудностей по экспериментальной регистрации такого напряжения в достаточно плотных, вязких и теплопроводных средах.

При наблюдаемых отклонениях от закона Ома актуальными являются и решаемые в настоящей работе нестационарные задачи расчета таких электродинамических характеристик, как высоковольтные проводимость и ампер-временные характеристики до установления токов (случай источника переменного по времени приложенного высокого напряжения не рассматривается). Результаты измерений таких характеристик описаны, например, в [6]. Ниже будут получены аналитическое решение электрогидродинамических дифференциальных уравнений для такой нестационарной задачи в случае плоско-параллельных электродов с межэлектродным расстоянием  $d \ll \sqrt{S}$  (здесь  $S$  – площадь поверхности пластины конденсатора) и численное решение уравнений электродинамического приближения для аналогичной задачи в случае коаксиальных цилиндрических электродов с межэлектродным расстоянием гораздо меньшим, чем длина  $l$  их образующих. Из расчетов полных электрических токов по полученным решениям выходит, что с ростом приложенного напряжения (до пробойного) усиливаются их временные изменения до установления, что согласуется с результатами измерений [6].

### Теоретическая модель и исходные уравнения

Для объемных концентраций зарядов и, возможно, имеющихся примесей в случае слабопроводящих сред выполняются следующие неравенства:

$$\begin{cases} n_{\pm} \ll n_a; \\ n_p \ll n_a. \end{cases} \quad (1)$$

Первое из них (1) можно считать одним из условий слабой ионизации или диссоциации, а следовательно, и проводимости рассматриваемых сред. Предполагаем, что скорость объемной ионизации или диссоциации в таких средах является известной термодинамической функцией концентрации их нейтральных молекул и примесей, а также температуры и величины напряженности электрического поля. Кроме того, рекомбинацию зарядов предполагаем только двухчастичной:

$$W_1 = W_1(n_a, n_p, T, |\vec{E}|) = W_1(n_a, n_p, T, 0) f(|\vec{E}|); \quad (2)$$

$$\begin{cases} W_r = K_r n_+ n_-, \\ K_r = \frac{(b_+ + b_-) |e|}{\varepsilon \varepsilon_0}. \end{cases} \quad (3)$$

Выражение, используемое для  $K_r$  при отсутствии приложенных электрических полей, было получено Ланжевром. Онзагер с помощью методов физической кинетики обосновал слабое влияние макроскопических электрических полей вплоть до полей пробоя на величину ионного коэффициента рекомбинации, определяемого по (3), а также их достаточно сильное влияние на величину константы (коэффициента) диссоциации рассматриваемых им слабых жидких электролитов. При этом для коэффициента рекомбинации им также получено второе из уравнений (3), а для монотонно возрастаю-

щей зависимости константы диссоциации от модуля напряженности макроскопического электрического поля выражение в виде аналитической и в нуле функции Бесселя первого порядка мнимого аргумента, близкой в предпробойных полях к неаналитической в нуле экспоненте от корня этого модуля, полученной Френкелем из уравнения аррениусовского типа в [2]. Здесь рассматривается, помимо диссоциации молекул с ионными связями, и ионизация сред с прилипанием электронов к молекулам с ковалентными связями.

Для коэффициента диффузии свободных зарядов запишем соотношение Нернста-Таунсенда-Эйнштейна:

$$D_{\pm} = \frac{k_B T b_{\pm}}{|e|}. \quad (4)$$

Для непрерывной, скалярной функции  $f$  векторного аргумента, вводимой в (2) и описывающей зависимость скорости роста объемной ионизации или диссоциации молекул очищенной среды либо диссоциации примесей, имеющих в неочищенной среде, от модуля напряженности электрического поля, используем, как и в предыдущих работах, выражение, полученное Френкелем [2]:

$$f(\vec{E}) = \exp(\beta |\vec{E}|^{1/2}); \quad \beta = \frac{|e|^{3/2}}{\sqrt{\pi \varepsilon \varepsilon_0} k_B T}. \quad (5)$$

В этих условиях уравнения зарядообразования согласно [4] выглядят так:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla q) - \frac{k_B T b}{|e|} \Delta q + (\vec{E}, \nabla \sigma) = -\frac{q \sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad \Delta \phi = -\frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (6A)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla \sigma) + b^2 (\vec{E}, \nabla q) - \frac{k_B T b}{|e|} \Delta \sigma - \frac{\sigma_0^2}{\varepsilon \varepsilon_0} \exp(\beta |\vec{E}|^{1/2}) + \frac{\sigma^2}{\varepsilon \varepsilon_0} = 0. \quad (6B)$$

Систему электродинамических уравнений (6), где учтены диффузионный и конвективный переносы ионных компонент в движущейся среде и уравнение Пуассона для потенциала макроскопического электрического поля, следует замкнуть математически гидродинамическими или газодинамическими уравнениями для ее нейтральной компоненты, близкими к уравнениям для всей смеси при выполнении соотношений (1). При этом дифференциальное уравнение сохранения массы несжимаемых сред в достаточно близких к изотермическим условиям имеет вид [5]:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0. \quad (7)$$

К уравнению неразрывности (7), согласно, например [5], следует добавить в случае несжимаемости рассматриваемых достаточно вязких и плотных сред уравнение сохранения импульса, не рассматривая при этом уравнения сохранения энергии ввиду слабых Джоулева нагрева и диссипации энергии из-за вязкости. Выпишем импульсное уравнение в виде уравнения переноса вихрей [5], считая, что безвихревое поле сил электрической поляризации связанных зарядов только перераспределяет давление рассматриваемой среды:

$$\vec{\chi} = \operatorname{rot} \vec{V}, \quad (8)$$

$$\rho \frac{d\vec{\chi}}{dt} - \rho (\vec{\chi}, \nabla) \vec{V} - \rho \nu \Delta \vec{\chi} = [\nabla q, \vec{E}]. \quad (9)$$

Начальные общие условия для выписываемых уравнений следующие:

$$q(t=0) = V(t=0) = 0; \quad \sigma(t=0) = \sigma_0. \quad (10)$$

Аналитическое решение для установившегося распределения потенциала высоковольтной сферы выписанных выше уравнений получено в [4] при выведенных там же условиях квазинейтральности рассматриваемых слабопроводящих сред. Уравнение примет вид

$$\phi(r) = \left( \frac{I}{4\pi \sigma_0} \right)^{1/2} \left[ \frac{8}{\beta} - \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\tau \sigma_0}} \left( |\vec{E}|^{1/2} + \frac{8}{\beta} \right) \right] \cdot \operatorname{sign}(\phi(r_0)). \quad (11)$$

$$|\vec{E}| \exp\left(\frac{\beta}{2} |\vec{E}|^{1/2}\right) = \frac{I}{4\pi \sigma_0 r^2}; \quad |\phi(r_0)| = U.$$

Аналогично выглядит решение в случае сферического высоковольтного конденсатора с заданной разностью потенциалов  $U$  между его обкладками. Вышеупомянутая линейность вольт-амперной характеристики слабых полей и квадратичность сильно неоднородных предпробойных получаются из (11) соответствующими предельными переходами. Распределение же предпробойного установившегося потенциала сферической симметрии по (11) сильно отличается от лапласовского ввиду влияния поля объемного заряда. Вместе с тем в случае плоского высоковольтного конденсатора электрическое поле вне приэлектродных погранслоев, где нарушается квазинейтральность электрических зарядов, остается однородным, что получается из закона сохранения заряда. Зависящая от граничных условий на электродах неоднородность пространственного распределения полей наряду с объемным зарядом образуется при наложении предпробойного напряжения только в таких слоях. Для этих случаев результаты разных экспериментов в поле плоского конденсатора подтверждают формулу расчета стационарной (установившейся) предпробойной вольт-амперной характеристики в условиях френкелевской квазинейтральности рассматриваемых сред, которая теоретически получается из соответствующего интеграла одномерного уравнения сохранения заряда в дифференциальной форме. Тогда в случае определения константы такого интегрирования по электрическому току эта зависимость имеет следующий вид:

$$\sigma_0 \frac{U}{d} \exp \left[ \frac{\beta}{2} \left( \frac{U}{d} \right)^2 \right] = \frac{I}{S}. \quad (12)$$

Нестационарные решения: аналитическое для случая плоского высоковольтного конденсатора и численное для цилиндрического.

Независимо от вихревых характеристик предпробойных (рис. 1) течений рассматриваемых сред в межэлектродном промежутке плоского конденсатора электродинамическим уравнениям (6) и начальным к этим уравнениям условиям (10) удовлетворяет достаточно простое частное решение:

$$\begin{aligned} I &= \sigma S U / d, \quad q = 0, \quad |\vec{E}| = U / d, \\ \sigma &= \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \left[ \sigma_0 \tau + \varepsilon \varepsilon_0 - (\varepsilon \varepsilon_0 - \sigma_0 \tau) e^{-2t/x} \right]}{\tau \left[ \sigma_0 \tau + \varepsilon \varepsilon_0 + (\varepsilon \varepsilon_0 - \sigma_0 \tau) e^{-2t/x} \right]}, \\ \tau &= \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\sigma_0 \exp \left( 0,5 \beta |\vec{E}|^{1/2} \right)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Решения уравнений (6), удовлетворяющие электрохимическим (в случае диссоциации) или ионизационным граничным условиям на пластинах конденсатора, а также интегральному условию независимости разности потенциалов между обкладками пластин от времени, близки за пределами неквазинейтральных погранслоев к решению (13). Теоретически это может быть обосновано описанными, например в [9], методами асимптотических погранслоевых разложений по малым параметрам, соответствующим режимам квазинейтральности, при членах уравнений (6) со старшими пространственными производными. Скорости предпробойных течений слабопроводящей среды при этом могут быть и малыми, и соизмеримыми по сравнению со скоростями дрейфа ионов в электрическом поле. Выражения для таких критериев подобия описываемых явлений выписаны, например, в [4, 7, 8]. Там же проведены оценки величин этих параметров для исследуемых предпробойных режимов. При этом показано, что для достаточно широкого класса сред условия электрической (плазменной) квазинейтральности могут выполняться и при наложении сильных электрических полей. Тогда независимо от характеристик ячеистых вихревых электрогидродинамических течений в межэлектродном промежутке (рис. 1) и граничных условий на электродах ампер-временную характеристику плоского конденсатора в случае источника постоянного по времени высокого напряжения можно в одномерном приближении рассчитывать по (13). Из (13) следует, что с ростом приложенного напряжения (до пробоя) усиливаются и временные отклонения предпробойных токов до установления, что согласуется с результатами опытов [6]. При установлении из (13), как и следовало ожидать, для проводимости соответствующим предельным переходом по времени к бесконечности получается известная формула Френкеля, в которой скалярная непрерывная функция  $f$ , введенная в (1) для описания скорости роста

предпробойной ионизации (диссоциации), определяется по (5). При этом формула (12) для стационарной вольт-амперной характеристики следует в соответствии с законом сохранения заряда именно из нее. Кроме того, из (13) следует, что при переходе от слабопроводящих сред к идеальным диэлектрикам эта известная формула перестает быть практически применимой, ибо максвелловское время релаксации среды при этом становится достаточно большим.

Как следует из результатов [7], в условиях квазинейтральности формулу (13) можно получить также при разных подвижностях положительных и отрицательных зарядов. Аналитического аналога формулы (13) в случае цилиндрического и сферического конденсаторов, а тем более для двумерных конфигураций высоковольтных электродов типа “провод над плоскостью” и трехмерных типа “игла-плоскость” из уравнений (6) получить не удастся даже без учета влияния гидродинамики на электродинамические характеристики. В этих случаях расчет ампер-временных характеристик до установления можно проводить численно, используя упрощенную для внешних задач по [9] систему уравнений (6) с начальными условиями (10). Аналог же формулы (13) для сильных неоднородных электрических полей любой сложной конфигурации может быть получен только при сохранении их лапласовости (при этом соответствующая (13) общая формула, в которой  $f$  определяется не обязательно по (5), была выписана в предыдущей статье [8]).

Для получения простейшего численного решения в случае цилиндрического конденсатора и последующих расчетов соответствующих ампер-временных характеристик использовалась система нестационарных одномерных электродинамических уравнений [10], получаемая из векторных уравнений (6А) с применением в одномерных случаях уравнения Гаусса для напряженности электрического поля цилиндрической симметрии вместо уравнения Пуассона для ее потенциала:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{E \cdot \partial \sigma}{\partial r} &= -\frac{q \cdot \sigma}{\epsilon \epsilon_0}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= \frac{\sigma_0^2 \exp\left(\beta \cdot E^2\right) - \sigma^2}{\epsilon \epsilon_0}, \\ \frac{\partial E}{\partial r} + \frac{E}{r} &= \frac{q}{\epsilon \epsilon_0}. \end{aligned} \quad (14)$$

При получении системы уравнений (14) в левых частях (6А) сохранены члены, описывающие нестационарные изменения квазинейтральной проводимости от низковольтной к высоковольтной френкелевской, впервые полученной в [2], и образование объемного заряда от нулевого к установившемуся. Исключенные члены с пространственными старшими производными влияют при выполнении критерия квазинейтральности только на изменение искомых распределений электродинамических характеристик в неквазинейтральных, приэлектродных пограничных слоях. При получении численного решения системы уравнений (14) использовались начальные условия (10) для проводимости и плотности объемного заряда, а также условия лапласовости электрического поля цилиндрического конденсатора в начальный момент времени:

$$E(r, 0) = \frac{U}{r \cdot \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)}. \quad (15)$$

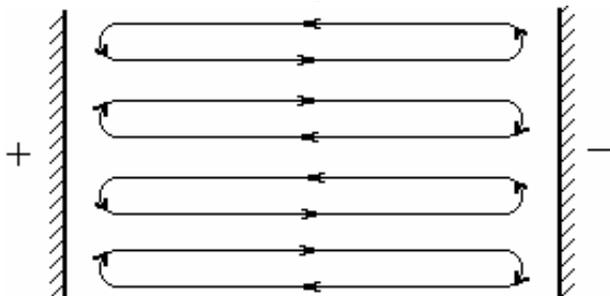


Рис. 1. Простейшая схема предпробойных течений слабопроводящих сред в межэлектродном промежутке плоского конденсатора

В (15)  $r_1$  и  $r_2$  – внутренний и внешний радиусы коаксиальных цилиндров. При выборе шага сетки по радиальной координате считалось, что толщины образующихся погранслоев нарушения квазинейтральности малы по сравнению с этим шагом. При этом счет проводился от внутреннего цилиндра к внешнему. Внутренний электрод считался анодом (при смене его знака задача сводится к предыдущей со сменой знака по напряженности поля и плотности объемного заряда). Последнее утверждение обосновано численно в [11], где с использованием обобщений уравнений типа (14) на неизотермический случай рассматривалась аналогичная нестационарная задача об электрическом поле в окрестности остывающей дисперсной сферической частицы. Но в отличие от той неизотермической задачи при решении описываемой в настоящей работе изотермической нестационарной интеграл уравнения сохранения заряда при комнатных температурах  $T$

$$\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E = \frac{I}{2\pi r l} \quad (16)$$

не удастся использовать для понижения порядка системы уравнений (14). При расчетах, результаты которых будут представлены ниже, интеграл (16) использовался для контроля численного счета разностных уравнений, получаемых из дифференциальных уравнений (14) в безразмерной форме. Кроме того, по (16) определялась искомая зависимость тока от времени до установления. Переход к безразмерным уравнениям осуществлялся при следующем обезразмеривании искомых и исходных величин:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{\tau}, \tilde{E} = \frac{Ed}{U}, \tilde{q} = \frac{qd^2}{\varepsilon\varepsilon_0 U}, \\ \tilde{\beta} &= \beta \left( \frac{U}{d} \right)^{1/2}, \tilde{r} = \frac{r}{d}, \\ \tilde{\sigma} &= \frac{\sigma}{\sigma_0 \exp\left(\frac{\tilde{\beta}}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда получаемая из (14) система обезразмеренных уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{E}}{\tilde{r}} &= \tilde{q}, \\ \frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\tilde{E} \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{r}} &= -\tilde{q} \tilde{\sigma}, \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} &= \exp\left\{ \tilde{\beta} \left( \sqrt{\tilde{E}} - 1 \right) \right\} - \tilde{\sigma}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Обезразмеренные начальные условия примут вид

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\tilde{r}, 0) &= \exp\left(\frac{\tilde{\beta}}{2}\right), \\ \tilde{q}(\tilde{r}, 0) &= 0, \\ \tilde{E}(\tilde{r}, 0) &= \frac{1}{\tilde{r} \ln\left(\frac{\tilde{r}_1}{\tilde{r}_2}\right)}. \end{aligned} \quad (19)$$

Кроме того, для получения ампер-временных характеристик высоковольтного цилиндрического конденсатора, заполненного рассматриваемой средой, по численному решению уравнений (18) с начальными условиями (19) предварительно обезразмеривался интеграл (16), который выглядит так:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\sigma} \tilde{E} = \frac{\tilde{I}}{\tilde{r}},$$

$$\tilde{I} = \frac{I}{2\pi l \sigma_0 U \exp\left(\frac{\tilde{\beta}}{2}\right)}. \quad (20)$$

Из аналогичной задачи для плоского конденсатора и ее аналитического решения (13) следует, что установление происходит при  $\tilde{t} \approx 1$ . Поэтому для получения искомого численного решения выбирался шаг по времени  $\Delta \tilde{t} = 0,02$ . Установление происходило примерно за 50 шагов. Для проведения конкретных численных расчетов по радиальной координате выбирался такой же высоковольтный цилиндрический конденсатор длиной 5 см, что и для предыдущих расчетов [12] его вольт-амперных характеристик после установления, а именно с внутренним радиусом 1,2 мм и внешним – 2 мм ( $d = r_2 - r_1$ ). Такими же, как и в [12], выбирались диэлектрическая проницаемость среды (2,24) и ее низковольтная проводимость ( $_{10-11} \frac{\text{Sm}}{\text{m}}$ ). Среди сред с такой низковольтной проводимостью и диэлектрической проницаемостью можно указать, например, очищенное трансформаторное масло.

Температура ввиду слабого Джоулевого нагрева считалась комнатной. Приложенное к конденсатору напряжение выбиралось равным 10 кВ. При счете по пространственной координате шаг выбирался равным 0,1. Дифференциальные уравнения (18) заменялись соответствующими разностными. Отметим, что ранее [3, 8] при описании физического механизма образования объемного заряда в высоковольтном поле цилиндрической симметрии такие разностные уравнения и их нестационарные решения для первых шагов по  $t$  уже выписывались и поэтому здесь не приводятся. По таким разностным уравнениям на каждом следующем временном шаге рассчитывались сначала пространственное распределение проводимости, затем плотности объемного заряда, после чего распределение напряженности электрического поля в межэлектродном промежутке. Рассчитывались из уравнения Гаусса. После выполнения этих расчетов на каждом временном шаге по разностному аналогу интеграла (20) рассчитывались временные изменения полного тока до установления. На каждом шаге пересчитывались соответствующие матричные массивы пространственно-временных распределений искомых переменных. После чего они подставлялись в разностный аналог интеграла (20). Отметим, что результаты расчетов на первых шагах по времени уже описывались в [3, 8]. При этом там описано отличие результатов по расчетам  $q$  и  $E$  для начальных лапласовских высоковольтных полей плоского и цилиндрического конденсаторов. Кроме того, в [3, 8] отличие искомых электродинамических характеристик в случае однородности предпробойного приложенного поля от случая его сильной неоднородности проанализировано в [8] и при установившихся  $q$  и  $E$ . Отличие же структуры течений в сильном неоднородном приложенном поле от ячеистых течений в плоском конденсаторе также описано ранее. Поэтому в настоящей работе, исходя из полученных аналитических и численных решений, опишем сходство искомых характеристик для случая однородного и сильно неоднородного приложенных полей. Оно состоит в достаточно быстрой в обоих случаях временной эволюции низковольтной проводимости к установившейся высоковольтной. Это следует как из формулы (13), касающейся  $\sigma$  при плоском конденсаторе, так и из графика рис. 2 в случае цилиндрического. На графике рис.2 представлено пространственно-временное изменение  $\sigma$ , построенное по результатам описанных выше численных расчетов. Отметим, что счетная устойчивость описанной в настоящей статье разностной схемы не исследовалась. Но это может быть сделано по аналогии с анализом устойчивости [14] для близких одномерных задач. Изменение  $\tilde{\sigma}$  обусловлено влиянием предпробойного поля на скорость реакции диссоциации (ионизации) рассматриваемых сред. При этом для исходных данных, при которых проводились численные расчеты, схема которых описана выше, достаточно быстрое установление проводимости происходит за время, близкое к 1 с. Такие же времена установления проводимости получаются и из аналитического решения (13). Кроме того, это сходство касается и ампер-временных характеристик.

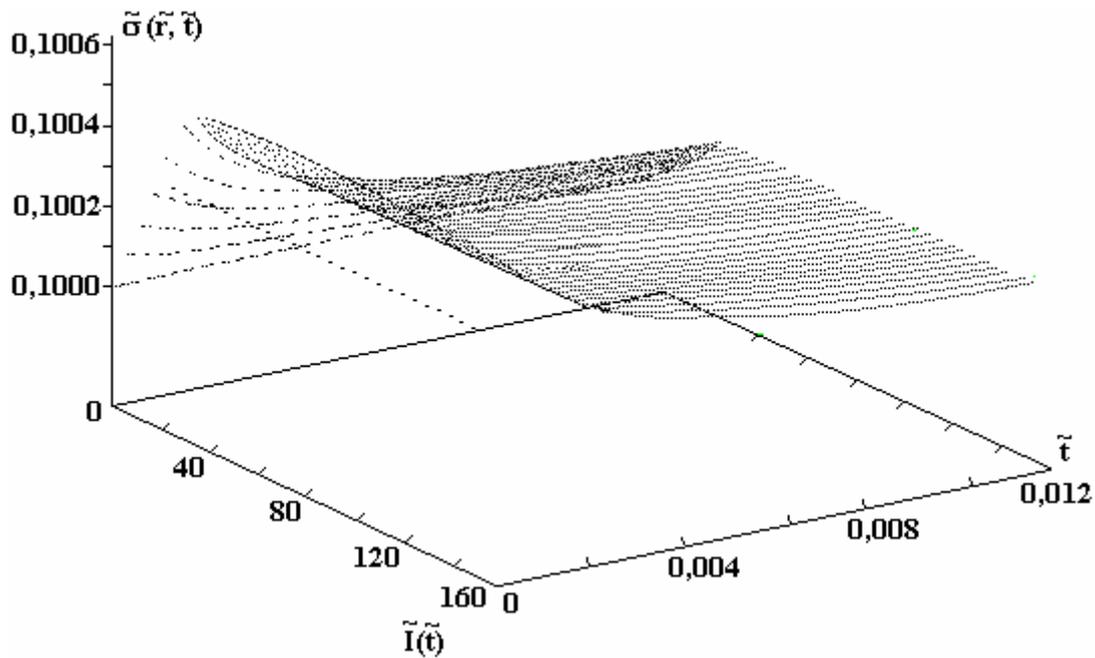


Рис. 2. Пространственно-временное распределение предпробойной проводимости слабопроводящей среды в межэлектродном промежутке цилиндрического конденсатора (пояснения в тексте)

На графике рис. 3 представлена временная эволюция предпробойного тока до установления с учетом результатов численных расчетов уравнений (18) и их интеграла (20). Этот график геометрически близок к кривым предпробойных нестационарных токов плоского конденсатора, построенных по формуле (13) и представленных в предыдущей работе [13]. Такие графики свидетельствуют о монотонности роста предпробойного тока от времени до его установления, начиная с подачи высокого напряжения от источника постоянного тока на электроды. Среда при этом достаточно сильно электризуется. Степень же ее зарядки можно определить по установившемуся току. А именно по аналогии с (11), (12) для распределения напряженности поля цилиндрической симметрии из закона сохранения заряда следует формула:

$$|\bar{E}| \exp\left(\frac{\beta}{2} |\bar{E}|^2\right) = \frac{I}{2\pi\sigma_0 lr}, \quad (21)$$

где  $I$  – установившийся ток.

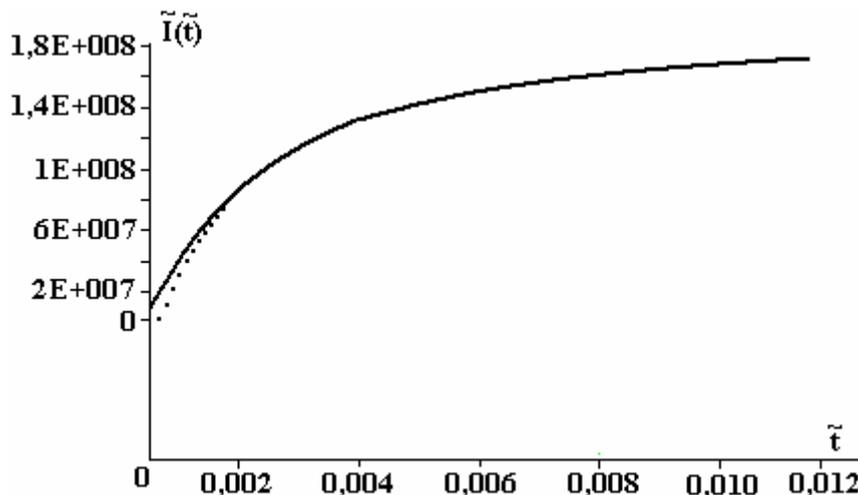


Рис. 3. Предпробойная ампер-временная характеристика цилиндрического конденсатора, заполненного слабопроводящей средой (пояснения в тексте)

Интегральный заряд  $Q$  вне приэлектродных слоев нарушения квазинейтральности:

$$Q = \int_V q dV, \quad (22)$$

где  $q$  определяется из последнего уравнения (14), и (21) вычисляется аналитически. При этом получается

$$Q = \tau I [\exp(\frac{-\beta\sqrt{E_2}}{2}) - \exp(\frac{-\beta\sqrt{E_1}}{2})]; E_1 = E(r_1), E_2 = E(r_2). \quad (23)$$

Тогда по (23) для данных, при которых проводились описанные численные расчеты при установлении, получается  $Q \approx 10^{-9}$  Кл. Этот теоретический результат свидетельствует о высокой степени зарядки в высоковольтных установках, что подтверждается экспериментально. Поэтому при разработке конструкций таких установок для внедрения следует предусматривать дополнительные устройства нейтрализации такого заряда или его отводки.

В заключение автор благодарит своего дипломника Б.А. Шутова за помощь при проведении численных расчетов в случае цилиндрического конденсатора.

Основные обозначения:

$\sigma_0$  – низковольтная проводимость среды;

$U$  – приложенное электрическое напряжение;

$d$  – межэлектродное расстояние;

$e$  – заряд протона или иона;

$k_B$  – постоянная Больцмана;

$D$  – коэффициент диффузии;

$b$  – коэффициент подвижности;

$q$  – объемная плотность заряда;

$V$  – скорость движения среды;

$n$  – концентрация;

$E$  – напряженность электрического поля;

$S$  – площадь поверхности электрода;

$r$  – радиальная координата;

$t$  – время;

$\tau$  – время релаксации заряда;

$\chi$  – завихренность;

$\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость;

$I$  – сила электрического тока;

$T$  – абсолютная температура;

$f$  – функция скалярного или векторного аргумента;

$W$  – объемная скорость образования зарядов или нейтралов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Poole H.H.* On the dielectric constant and electrical conductivity of mica in intense field // *Philosophical magazine*. 1916. S. 6. V. 2. N 187. P. 112–129.
2. *Френкель Я.И.* К теории электрического пробоя в диэлектриках и электронных полупроводниках // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 1938. Т. 8. Вып. 12. С. 1291–2001.
3. *Апфельбаум М.С.* Уравнения равновесной ионизации продуктов горения в электрическом поле // *Физика горения и взрыва*. 1988. № 2. С. 60–65.
4. *Апфельбаум М.С.* Об одной расчетной схеме электрогидродинамических течений // *Электрохимия*, 1986. Вып. 11. С. 1463–1471.
5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидромеханика. М., 1989.
6. *Dikarev B., Karasev G., Romanets R., Shimon N.* Modeling and experimental research of the non-stationary processes of conduction and space charge accumulation in dielectric liquids // *Proceedings of the 13th ICDL, Nara*, 1999. P. 33–36.
7. *Апфельбаум М.С., Козыренко В.Е.* Физическое моделирование и расчёт электрогидродинамических течений // *Электрохимия*. 1991. Вып. 7. С. 855–863.

8. *Апфельбаум М.С.* Ионизация и течение слабопроводящей жидкости в неоднородном электрическом поле // *Электронная обработка материалов*. 1988. № 1. С. 60–65.
9. *Найфэ А.Х.* Введение в методы возмущений. М., 1984.
10. *Остроумов Г.А.* Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М., 1979.
11. *Apfelbaum M.S., Apfelbaum E.M.* On electric field distribution in the vicinity of particles in a weakly ionized disperse medium // *Chem.Phys. Report*. 2000. Vol. 18. P. 2313–2328.
12. *Апфельбаум М.С.* Одномерные стационарные задачи расчета предпробойных вольт-амперных характеристик слабоионизованных сред // *Электронная обработка материалов*. 2005. № 2. С. 50–53.
13. *Апфельбаум М.С.* Одномерные задачи расчета предпробойных ампер-временных характеристик слабоионизованных сред // *Электронная обработка материалов*. 2006. № 1. С. 37–43.
14. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М., 1970.

### **Summary**

A theoretical model of electrohydrodynamic pre-breakdown phenomena in a weakly ionized media is proposed. Differential equations and initial conditions for describing are written. The 1D analytical and numerical solutions of these equations for calculations current time characteristics are given.

---