

## К РАСЧЕТУ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ У ПОВЕРХНОСТИ НЕЛИНЕЙНО-ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ В ОДНОРОДНОМ ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ ЗАРЯЖЕННОЙ КАПЛИ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, [grig@uniyar.ac.ru](mailto:grig@uniyar.ac.ru)*

**Введение.** Исследованию устойчивости линейных и нелинейных осцилляций заряженных капель во внешних электрических полях уделяется большое внимание в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, обзоры [1–3] и указанную там литературу). Заряженная капля является главным объектом изучения в грозовых облаках [4–5], в жидкометаллических источниках ионов [6–7], устройствах для масс-спектрометрии термически нестабильных и нелетучих жидкостей [8–9], при распылении лакокрасочных материалов, горючего и инсектицидов [10].

Однако наибольший интерес заряженная капля во внешнем электрическом поле представляет для теории грозового электричества как в связи с процессами микроразделения зарядов, так и в феномене реализации разряда молнии [11–15]. Согласно существующим представлениям, инициирование разряда молнии связано с мощной электронной лавиной (переходящей в стример), зарождающейся при коронном разряде с группы близко расположенных капель или тающих градин, свободно падающих в грозовом облаке [11–13]. Однако натурные измерения в грозовых облаках внутриоблачных электрических полей и зарядов на каплях и градинах показывают (см., например, [14, гл.10]), что напряженности электрического поля и величины зарядов на каплях и градинах не достаточно велики как для реализации электростатической неустойчивости поверхности жидкости по отношению к собственному и индуцированному электрическим зарядам [1], так и для зажигания коронного разряда. Измеряемые напряженности внутриоблачных электрических полей и заряды капель и градин слишком малы, чтобы суммарная напряжённость электростатического поля индуцированного и собственного зарядов у невозмущенной сферической поверхности капли или обводненной градины в облаке достигла величины  $\sim 20$  кВ/см, при которой на высоте 4–5 км (где давление воздуха изменяется в диапазоне 460–400 mm Hg), на уровне мокрого роста града и интенсивного разделения электрических зарядов, возможно зажигание коронного разряда [15, стр.507]. В то же время известно, что деформация заряженной свободной поверхности жидкости во внешнем электрическом поле, приводящая к локальному увеличению кривизны поверхности, вызывает и локальное увеличение напряженности электрического поля, пропорциональное амплитуде деформации [1, 16–17], которая в непосредственной окрестности капли может превысить критическую для зажигания коронного разряда величину.

В работах [18, 19] было показано, что напряженность электрического поля, необходимая для зажигания коронного разряда, может наблюдаться у вершин нелинейно-осциллирующих слабо заряженных капель. Следует отметить, что задачи о расчете напряженности электрического поля в окрестности нелинейно-осциллирующей капли уже решались (см., например, [18–20]). Однако в них фигурировало либо только внешнее электрическое поле, либо только заряд, тогда как в реальных условиях присутствует и то и другое [14].

**1. Постановка задачи.** Будем решать задачу о нахождении напряженности электрического поля вблизи поверхности нелинейно-осциллирующей сферической идеальной несжимаемой проводящей капли (радиуса  $R$ , плотностью  $\rho$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  и зарядом  $Q$ ), находящейся в однородном электростатическом поле с напряженностью  $E_0$ . Все рассмотрение проведем на упрощенной модели, полагая, что капля движется относительно среды параллельно внешнему электрическому полю, но саму среду и ее аэродинамическое сопротивление движению капли во внимание принимать не будем. Роль среды в предлагаемой модели сведем к обеспечению капле равномерного и прямолинейного движения, а все рассмотрение проведем в сферической

системе координат, связанной с центром масс капли, в безразмерных переменных, в которых  $R = \sigma = \rho = 1$ . Примем, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ) равновесная сферическая форма свободной поверхности слоя жидкости претерпела виртуальную осесимметричную деформацию конечной амплитуды, существенно меньшей радиуса  $R$ , пропорциональную одной из мод капиллярных осцилляций капли. Уравнение свободной поверхности жидкости запишется в виде

$$F(r, \vartheta, t) = r - 1 - \xi(\vartheta, t) = 0, \quad |\xi| \ll 1. \quad (1)$$

Течение жидкости в капле будем полагать потенциальным, т.е. примем, что поле скоростей  $V(r, t)$  волнового движения в жидкости полностью определяется потенциалом поля скоростей  $\psi(r, t)$  известным соотношением:  $V(r, t) \equiv \nabla\psi(r, t)$ .

Математическая формулировка задачи расчета нелинейных осцилляций капли состоит из уравнений Лапласа для потенциала поля скоростей  $\psi(r, t)$  и электростатического потенциала  $\Phi(r, t)$ :

$$\Delta\psi(r, t) = 0; \quad \Delta\Phi(r, t) = 0;$$

а также граничных условий к ним на свободной поверхности жидкости:

кинематического

$$r = 1 + \xi; \quad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \frac{\partial\xi}{\partial\vartheta};$$

динамического

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + \Delta p + p_E - p_\sigma = 0;$$

$$p_E \equiv (\nabla\Phi)^2 / 8\pi; \quad p_\sigma \equiv \text{div } n;$$

постоянства электрического потенциала свободной поверхности жидкости

$$\Phi(r, t) = \Phi_S(t);$$

а также граничных условий на бесконечности

$$r \rightarrow \infty: \quad -\nabla\Phi(r, t) \rightarrow E_0;$$

и в центре капли

$$r = 0: \quad \nabla\psi \rightarrow 0.$$

В выписанных соотношениях  $\Delta p$  – перепад постоянных давлений внутри и вне жидкости в состоянии равновесия;  $p_E$  – давление электрического поля собственного заряда и внешнего поля на свободную поверхность капли;  $p_\sigma$  – лапласовское давление;  $n \equiv \nabla F(r, \vartheta, t) / |\nabla F(r, \vartheta, t)|$  – единичный вектор внешней нормали к поверхности слоя жидкости;  $\Phi_S(t)$  – постоянный вдоль свободной поверхности жидкости электрический потенциал.

Кроме перечисленных выше граничных условий следует учесть также условия:

– неизменности собственного электрического заряда системы

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (n \cdot \nabla\Phi) dS = Q; \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\vartheta, t); \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \end{cases}$$

неизменности объема жидкости

$$\int_V r^2 dr d\mu d\varphi = -\frac{4}{3}\pi; \quad V = \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 + \xi(\vartheta, t); \\ 0 \leq \vartheta \leq \pi; \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad \mu \equiv \cos \vartheta;$$

неподвижности центра масс капли

$$\int_V r d\mu d\varphi = 0.$$

Начальные условия к поставленной задаче сформулируем в виде задания начальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы свободной поверхности капли и равенства нулю начальной скорости движения свободной поверхности:

$$t = 0: \quad \xi(\vartheta, t) = \xi_0 \cdot P_0(\mu) + \xi_1 \cdot P_1(\mu) + \varepsilon \cdot P_k(\mu); \quad (k \geq 2); \quad \frac{\partial \xi(\vartheta, t)}{\partial t} = 0.$$

Здесь  $\varepsilon$  – безразмерная амплитуда начальной деформации, являющаяся малым параметром задачи;  $P_k(\mu)$  – полином Лежандра  $k$ -го порядка;  $\xi_0$  и  $\xi_1$  – константы, определяемые условиями неизменности объема жидкого слоя и неподвижности центра масс системы.

Несложно показать, что если в начальный момент времени возбуждена только одна мода с номером  $k$ , то

$$\xi_0 = -\varepsilon^2 \frac{1}{(2k+1)} + O(\varepsilon^3); \quad \xi_1 = 0 + O(\varepsilon^3).$$

**2. Решение задачи.** Сформулированную задачу в квадратичном по  $\varepsilon$  приближении будем решать методом многих временных масштабов [21], как это ранее делалось при решении подобных задач [18–20]. Для этого искомые функции  $\xi(\vartheta, t)$ ,  $\Psi(r, t)$ ,  $\Phi(r, t)$ , которые представим в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра  $\varepsilon$ , считаются зависящими не просто от времени  $t$ , но и от разных его масштабов  $T_m$ , определенных соотношением  $T_m \equiv \varepsilon^m \cdot t$ :

$$\xi(\vartheta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, \dots); \quad \Psi(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \psi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots);$$

$$\Phi(r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \Phi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots). \quad (2)$$

Производные по времени вычисляются по правилу [21]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3). \quad (3)$$

Подставляя разложения (2)–(3) в сформулированную краевую задачу и приравнивая в каждом из соотношений слагаемые одного порядка малости, легко получим набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций  $\xi^{(m)}$ ,  $\psi^{(m)}$ ,  $\Phi^{(m)}$ , которые для  $m \geq 1$  будем искать в виде рядов по полиномам Лежандра:

$$\xi^{(m)}(\vartheta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) P_n(\mu).$$

$$\psi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^n P_n(\mu).$$

$$\Phi^{(m)}(r, \vartheta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1} P_n(\mu).$$

**3. Отыскание решений различных порядков малости.** Не останавливаясь подробно на математической процедуре отыскания решения, детально описанной в [18–21], приведем сразу окончательное решение сформулированной задачи:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \varepsilon \xi^{(1)}(\vartheta, t) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\vartheta, t) + O(\varepsilon^3 t) = \\ &= \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(1)}(T_0) P_n(\mu) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(T_0) P_n(\mu) + O(\varepsilon^3 t); \\ \Psi &= \varepsilon \psi^{(1)} + \varepsilon^2 \psi^{(2)} \equiv \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left( G_n^{(1)}(T_0) + \varepsilon G_n^{(2)}(T_0) \right) r^n P_n(\mu) + O(\varepsilon^3 t); \\ \Phi &= \Phi^{(0)} + \varepsilon \Phi^{(1)} + \varepsilon^2 \Phi^{(2)} \equiv \\ &\equiv \frac{Q}{r} - E_0 r \mu (1 - r^{-3}) + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left( F_n^{(1)}(T_0) + \varepsilon F_n^{(2)}(T_0) \right) r^{-(n+1)} P_n(\mu) + O(\varepsilon^3 t), \end{aligned}$$

где

$$M_0^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0; \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0;$$

$n \geq 2$ ;

$$\begin{aligned} A_n M_{n-2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) + B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} + \frac{\partial^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} + \\ + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) + C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} + D_n M_{n+2}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$A_n = -w \frac{n^2(n-1)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)}; \quad B_n = -\sqrt{wW} \frac{n(n+1)(2n-1)}{(2n+3)};$$

$$C_n = -\sqrt{wW} \frac{n^2(2n-3)}{(2n-1)}; \quad D_n = -w \frac{n^2(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}; \quad w = \frac{9E_0^2}{4\pi}; \quad W = \frac{Q^2}{4\pi};$$

$$\omega_n^2 = n(n-1)(n+2) - w \frac{n^2(4n^3 + 2n^2 - 6n - 1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} - n(n-1)W;$$

$$G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{1}{n} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0};$$

$$F_0^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0; \quad F_1^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \equiv 0;$$

$$F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = Q M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) +$$

$$+ 3E_0 \left( \frac{n}{2n-1} M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) + \frac{n+1}{2n+3} M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \right); \quad n \geq 2;$$

$$\Phi_S^{(1)} \equiv 0; \quad \Phi^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) r^{-(n+1)} P_n(\cos \theta);$$

$$M_0^{(2)}(T_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left( M_n^{(1)}(T_0) \right)^2;$$

$$A_n M_{n-2}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) + B_n \frac{\partial M_{n-1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} + \frac{\partial^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) + C_n \frac{\partial M_{n+1}^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} + D_n M_{n+2}^{(2)}(T_0, T_1, \dots) = H_n(T_0); \quad n \geq 1; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} H_n(T_0) = & \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ M_m^{(1)}(T_0) M_l^{(1)}(T_0) \left\{ K_{m,l,n} \left( 2n \left[ l(l+1) - 1 \right] + \right. \right. \right. \\ & + We \frac{n(13m(m+1)-7)}{(2m-1)(2m+3)} + W \frac{n}{2} [m(2n-2m+l-7)+l+3] \left. \right\} + \\ & + \frac{11nWe}{2(2m+1)} \left[ \frac{m(m-1)}{(2m-1)} K_{m-2,l,n} + \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)} K_{m+2,l,n} \right] - \\ & - \frac{n\sqrt{WeW}}{(2m+1)} \left[ K_{m+1,l,n} (m+1) \left( (m+2)^2 - 11 \right) + K_{m-1,l,n} m \left( (m+3)^2 - 15 \right) \right] + \\ & + nm\sqrt{WeW} \left[ \frac{(n+1)(n+2)}{2n+3} K_{m,l,n+1} + \frac{n^2}{2n-1} K_{m,l,n-1} \right] + W \frac{n}{2} \alpha_{m,l,n-1} \left. \right\} + \\ & + \left( \frac{nm}{(2m-1)} M_{m-1}^{(1)}(T_0) + \frac{n(m+1)}{(2m+3)} M_{m+1}^{(1)}(T_0) \right) M_l^{(1)}(T_0) \times \\ & \times \left\{ mWe \left[ \frac{n^2}{2m-1} K_{m,l,n-1} + \frac{(n+1)(n+2)}{2m+3} K_{m,l,n+1} \right] - \right. \\ & - We \frac{m+1}{2m+3} \left[ (m+2)^2 K_{m+1,l,n} + m(m+5) K_{m-1,l,n} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{WeW} \left[ (l-7+m(2n-7-2m+l)) K_{m,l,n} + \alpha_{m,l,n} \right] \left. \right\} + \\ & + \frac{n}{2} \left[ (m+1)(l+1) K_{m,l,n} + \alpha_{m,l,n} \right] \left( \frac{lM_{l-1}^{(1)}(T_0)}{(2l-1)} + \frac{(l+1)M_{l+1}^{(1)}(T_0)}{(2l+3)} \right) \times \\ & \times \left\{ \sqrt{WeW} M_m^{(1)}(T_0) + We \left( \frac{mM_{m-1}^{(1)}(T_0)}{2m-1} + \frac{(m+1)M_{m+1}^{(1)}(T_0)}{2m+3} \right) \right\} + \\ & + \frac{\partial^2 M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0^2} M_l^{(1)}(T_0) \left[ (m-n-1) K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{m} \right] + \\ & + \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \frac{\partial M_l^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} \left[ \left( m-1-\frac{n}{2} \right) K_{m,l,n} - \frac{n+2l}{2ml} \alpha_{m,l,n} \right] + \\ & + K_{m,l,n} \equiv \left[ C_{m0l0}^{n0} \right]^2; \quad \alpha_{m,l,n} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{m0l0}^{n0} \cdot C_{m-1l0}^{n0}; \end{aligned}$$

$$G_n^{(2)}(T_0) = \frac{1}{n} \left( \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0)}{\partial T_0} - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left[ (m-1) K_{m,l,n} - \frac{\alpha_{m,l,n}}{m} \right] \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0) \right);$$

$$\Phi_S^{(2)} \equiv 0; \quad F_0^{(2)}(T_0) = 0;$$

$$F_n^{(2)}(T_0) = Q M_n^{(2)}(T_0) + 3E_0 \left( \frac{n}{2n-1} M_{n-1}^{(2)}(T_0) + \frac{n+1}{2n+3} M_{n+1}^{(2)}(T_0) \right) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \left[ 3E_0 \left( \frac{m^2}{2m-1} M_{m-1}^{(1)}(T_0) + \frac{m(m+1)}{2m+3} M_{m+1}^{(1)}(T_0) \right) + m Q M_m^{(1)}(T_0) \right] \times$$

$$\times K_{m,l,n} M_l^{(1)}(T_0); \quad n \geq 1.$$

$C_{m0l0}^{n0}$  и  $C_{m-1l0}^{n0}$  – коэффициенты Клебша-Гордана.

Как видно из выписанных выражений, коэффициенты  $F_n^{(j)}(T_0, T_1, \dots)$ ,  $G_n^{(j)}(T_0, T_1, \dots)$  выражаются через  $M_n^{(j)}(T_0, T_1, \dots)$ , которые определяются путем численного решения связанных систем дифференциальных уравнений (4)–(5).

**4. Расчет напряженности электрического поля у поверхности заряженной градины.** Выражение для напряженности электростатического поля  $E(r, t) \equiv -\nabla\Phi(r, t)$  в окрестности свободной поверхности нелинейно-осциллирующего заряженного жидкого слоя имеет вид

$$r \geq 1 + \xi(\mathcal{G}, t): \quad E = E^{(0)} + \varepsilon \sum_{m \in \Omega} E_m^{(1)} + \varepsilon^2 \sum_{n=0} E_n^{(2)};$$

$$E^{(0)} = e_r \left( E_0 \mu \left( 1 + \frac{2}{r^3} \right) + \frac{Q}{r^2} \right) + e_g \left( E_0 \sqrt{1 - \mu^2} \left( 1 + \frac{1}{r^3} \right) \right);$$

$$E^{(1)} = e_r \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) F_n^{(1)} r^{-(n+2)} P_n(\mu) - e_g \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(1)} r^{-(n+2)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mathcal{G}};$$

$$E^{(2)} = e_r \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) F_n^{(2)} r^{-(n+2)} P_n(\mu) - e_g \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(2)} r^{-(n+2)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mathcal{G}}, \quad (6)$$

где  $e_r$  и  $e_v$  – орты сферической системы координат. Из полученного выражения найдем напряженность электрического поля на невозмущенной сферической поверхности свободной поверхности жидкого слоя. Для этого разложим (6) в окрестности равновесной сферической формы по амплитуде деформации. На ней же определим производные по координатам:

$$E(r, \mathcal{G}, t) \Big|_{r=1+\xi} \approx \left[ E(r, \mathcal{G}, t) + \xi \frac{\partial E(r, \mathcal{G}, t)}{\partial r} + \frac{1}{2} \xi^2 \frac{\partial^2 E(r, \mathcal{G}, t)}{\partial r^2} \right] \Big|_{r=1} =$$

$$= e_r \{ 3E_0 \mu + Q \} + \varepsilon e_r \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1+n) F_n^{(1)} - 2(3E_0 \mu + Q) M_n^{(1)} \right\} P_n(\mu) -$$

$$- \varepsilon e_g \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ F_n^{(1)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mathcal{G}} + 3E_0 \sqrt{1 - \mu^2} M_n^{(1)} P_n(\mu) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& +\varepsilon^2 e_r \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1+n)F_n^{(2)} - 2(3E_0\mu + Q)M_n^{(2)} \right\} P_n(\mu) + \\
& +\varepsilon^2 e_r \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ 3(4E_0\mu + Q)M_m^{(1)}M_l^{(2)} - (m+1)(m+2)M_m^{(1)}F_l^{(1)} \right] P_m(\mu)P_l(\mu) + \\
& +\varepsilon^2 e_g \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(2)} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mathcal{G}} + 3E_0\sqrt{1-\mu^2}M_n^{(2)}P_n(\mu) + \\
& +\varepsilon^2 e_g \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[ (m+2)F_m^{(1)} \frac{\partial P_m(\mu)}{\partial \mathcal{G}} + 6E_0\sqrt{1-\mu^2}M_l^{(1)}P_m(\mu) \right] M_l^{(1)}P_l(\mu). \tag{7}
\end{aligned}$$

Чтобы найти нормальную компоненту электрического поля в окрестности свободной поверхности нелинейно-осциллирующего жидкого слоя  $E_n = n \cdot E$ , выпишем в явном виде аналитическое выражение для вектора нормали к свободной поверхности жидкого слоя:

$$n \equiv \nabla F(r, \mathcal{G}, t) / |\nabla F(r, \mathcal{G}, t)| \equiv n_r \cdot e_r + n_g \cdot e_g. \tag{8}$$

С точностью до слагаемых второго порядка малости по  $\varepsilon$  вблизи свободной поверхности проекции  $n_r$  и  $n_g$  на орты сферической системы координат  $e_r$  и  $e_g$  вектора нормали определяются выражениями:

$$\begin{aligned}
r = l: \quad n_r &= 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left( \partial_{\mathcal{G}} \xi^{(1)} \right)^2 = 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left( \cos(\omega_k t) \frac{\partial P_k(\mu)}{\partial \mathcal{G}} \right)^2; \\
n_g &= -\varepsilon \partial_{\mathcal{G}} \xi^{(1)} + \varepsilon^2 \left( \xi^{(1)} \partial_{\mathcal{G}} \xi^{(1)} + \partial_{\mathcal{G}} \xi^{(2)} \right) = -\varepsilon \cos(\omega_k t) \frac{\partial P_k(\mu)}{\partial \mathcal{G}} + \\
& + \varepsilon^2 \left( \left[ \cos(\omega_k t) \right]^2 P_k(\mu) \frac{\partial P_k(\mu)}{\partial \mathcal{G}} + \sum_{j=0}^k M_{2j}^{(2)}(t) \frac{\partial P_{2j}(\mu)}{\partial \mathcal{G}} \right).
\end{aligned}$$

Скалярное произведение выражений (7) и (8) с учетом  $n_r$  и  $n_g$  даст выражение для нормальной компоненты электрического поля на поверхности градины:

$$\begin{aligned}
E_n &= 3E_0\mu + Q + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1+n)F_n^{(1)} - 2(3E_0\mu + Q)M_n^{(1)} \right\} P_n(\mu) + \\
& + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (1+n)F_n^{(2)} - 2(3E_0\mu + Q)M_n^{(2)} \right\} P_n(\mu) + \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \left[ 3(4E_0\mu + Q)M_m^{(1)}M_l^{(2)} - (m+1)(m+2)M_m^{(1)}F_l^{(1)} \right] K_{m,l,n} + \right. \\
& \quad \left. + \left[ F_m^{(1)}M_l^{(2)} - (3E_0\mu + Q)M_m^{(1)}M_l^{(1)} \right] \alpha_{m,l,n} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3m(m+1)}{2m+1} E_0 M_m^{(1)} M_l^{(1)} \left[ \alpha_{m+1,l,n} - \alpha_{m-1,l,n} \right] \right\} P_n(\mu). \tag{9}
\end{aligned}$$

**5. Обсуждение полученных результатов.** На рис. 1 и 2 приведены результаты расчета по соотношению (9). На всех рисунках прямая линия  $E = 2,5$ , параллельная оси абсцисс, соответствует безразмерной напряженности электростатического поля 20 кВ/см, критической для зажигания коронного разряда в грозовом облаке, на высоте  $\approx 4 \div 5$  км.

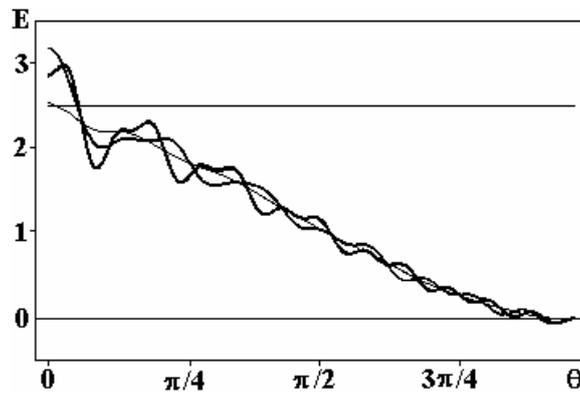


Рис. 1. Зависимость от полярного угла  $\vartheta$  величины безразмерной напряженности электрического поля на поверхности капли в момент времени  $t=1$  для различных мод, определяющих начальную деформацию:  $k=8$  (тонкая кривая),  $k=10$  (кривая средней толщины),  $k=12$  (толстая кривая).  $W=0,1$ ,  $w=0,1$ ,  $\varepsilon=0,1$

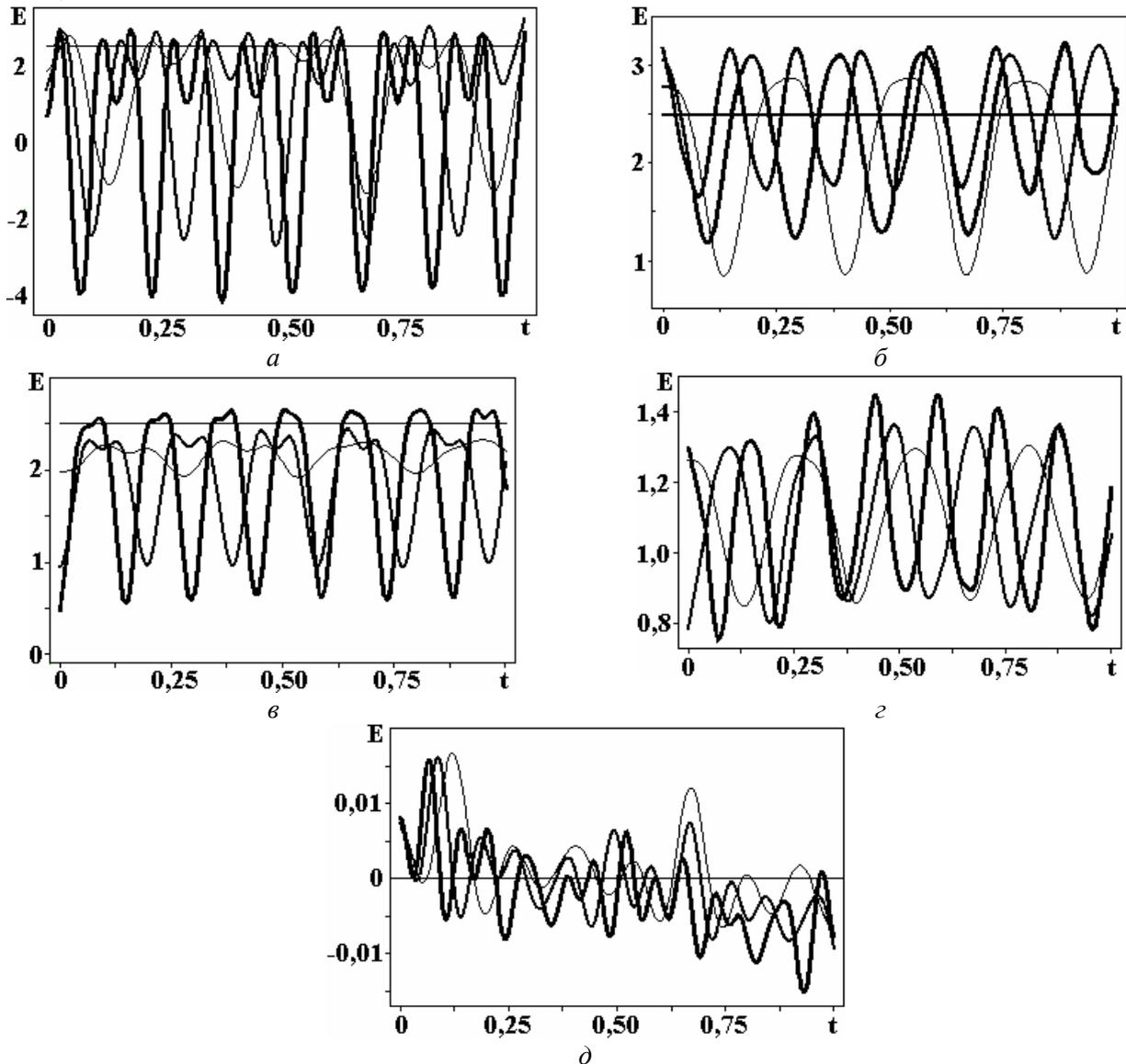


Рис. 2. Зависимость от безразмерного времени величины безразмерной напряженности электрического поля в окрестности свободной поверхности капли для различных мод, определяющих начальную деформацию:  $k=8$  (тонкая кривая),  $k=10$  (кривая средней толщины),  $k=12$  (толстая кривая). При  $W=0,1$ ,  $w=0,1$ ,  $\varepsilon=0,1$  и различных углах  $\vartheta$  к оси симметрии капли: а)  $0$ , б)  $0,15$ , в)  $0,3$ , г)  $\pi/2$ , д)  $\pi$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) // Изв. РАН. МЖГ. 1994 № 3. С. 3–22.
2. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А. Нелинейные осцилляции заряженных капель (обзор). Часть 1. // Электронная обработка материалов. 2005. № 3. С. 25–35.
3. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромыслов В.А. Нелинейные осцилляции заряженных капель (обзор). Часть 2. // Электронная обработка материалов. 2005. № 4. С. 24–34.
4. Мучник В.М., Фишман Б.Е. Электризация грубодисперсных аэрозолей в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 280 с.
5. Мазин И.П., Шметер С.М. Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 280 с.
6. Дудников В.Г., Шабалин А.Л. Электрогидродинамические источники ионных пучков (обзор) // Препринт 87-63 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск, 1987. 66 с.
7. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Электрогидродинамические аспекты функционирования жидкометаллических источников ионов // 1992. ЖТФ. Т.62. Вып.12. С. 9–20.
8. Галль Л.Н., Краснов В.Н. и др. Электрогидродинамический ввод жидких веществ в масс-спектрометр // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 8. С. 1559–1571.
9. Золотой Н.Б., Карпов Г.В., Скурат В.Е. О механизмах образования ионов и ионных кластеров из заряженных капель // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 2. С. 315–323.
10. Кожевников В.И., Фукс Н.А. Электрогидродинамическое распыление жидкости (обзор) // Успехи химии. 1976. Т. 45. № 12. С. 2274–2284.
11. Дьячук В.А., Мучник В.А. Коронный разряд с обводненной градины, основной механизм инициирования молнии // ДАН СССР. 1979. Т.248. № 1. С. 60–63.
12. Бейтуганов М. Н. Об обусловливаемых сильными электрическими полями физических явлениях в облаках // Метеорология и гидрология. 1989. № 9. С. 49.
13. Grigor'ev A. I., Shiryayeva S. O. The possible physical mechanism of initiation and growth of lightning // Physica Scripta. 1996. V. 54. P. 660–666.
14. Облака и облачная атмосфера. Справочник / И.П. Мазин, А.Х. Хргиан, И.М. Имянитов. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
15. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.
16. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф. О некоторых закономерностях реализации неустойчивости плоской заряженной поверхности жидкости // ЖТФ. 1999. Т.69. Вып. 7. С. 15–22.
17. Григорьев А.И. О некоторых закономерностях реализации неустойчивости сильно заряженной вязкой капли // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 10. С. 1–7.
18. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В. О возможности зажигания коронного разряда в окрестности нелинейно-осциллирующей слабо заряженной капли // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 31–36.
19. Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. О возможности зажигания коронного разряда у поверхности нелинейно-осциллирующего жидкого слоя на поверхности заряженной градины // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 11. С. 10–19.
20. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. О возможности зажигания коронного разряда в окрестности нелинейно-осциллирующей во внешнем электростатическом поле электропроводной капли // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 40–47.
21. Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1983. 455 с.

*Поступила 25.08.09*

## Summary

The derivation of nonlinear oscillation charged drop in external uniform electrostatic field problem is found. The electric field intensity near the drop surface is found. It is found that the value of the electric field intensity near the drop surface is sufficient for corona discharge ignition.