

## ВРАЩЕНИЕ СЛАБОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В СКРЕЩЕННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

\*Государственный аграрный университет Молдовы,  
ул. Мирчеица, 44, г. Кишинев, MD-2049, Республика Молдова

\*\*Институт прикладной физики АНМ,  
ул. Академией, 5, г. Кишинев, MD-2028, Республика Молдова, [mbologa@phys.asm.md](mailto:mbologa@phys.asm.md)

**1. Вводные замечания.** Взаимодействия внешних электрических, магнитных или электромагнитных полей с немагнитными жидкостями известны и достаточно хорошо изучены в одном из предельных случаев – большой электрической проводимости жидкости, когда электрическими эффектами (полями) можно пренебречь по сравнению с магнитными – область магнитной гидродинамики (МГД). Менее известен и изучен противоположный случай – малой удельной проводимости, когда магнитными эффектами можно пренебречь. Это область электрической гидродинамики (ЭГД), которая сравнительно недавно (~ 20 лет назад) сформировалась как научное направление. Однако, по существу, неизвестными и неизученными являются случаи промежуточных значений удельной электропроводности жидкостей типа воды (водопродонной или морской) или ее растворов, слабых электролитов и т.п., когда в результате совместного действия электрических и магнитных полей МГД и ЭГД эффекты могут оказаться конкурирующими. Очевидно, соответствующие гидродинамические явления можно назвать электромагнитогидродинамическими (ЭМГД). Этих явлений мы коснулись в работе [1], в частности обсуждены пондеромоторные силы [2], вызывающие ЭМГД эффекты, и отмечено, что в большинстве важных случаях в общем выражении для суммарной электромагнитной силы можно ограничиться чистокулонновской ( $\rho \vec{E}$ ) и амперовой ( $\vec{j} \times \vec{B}$ ) соответствующими:

$$\vec{f} = \vec{f}_e + \vec{f}_m; \quad \vec{f}_e \equiv \rho \vec{E}; \quad \vec{f}_m \equiv \vec{j} \times \vec{B}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность объемных свободных зарядов,  $\vec{j}$  – плотность тока,  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  – напряженность электрического поля и магнитная индукция соответственно.

Критерием ЭГД- или МГД-приближений может служить порядок отношения первого слагаемого ко второму

$$П_{em} \equiv \frac{\tau E}{l_E \cdot B}, \quad (2)$$

где  $\tau \equiv \varepsilon / \sigma$  – время релаксации электрических явлений в среде;  $l_E$  – характерное расстояние, на котором меняется напряженность электрического поля. Если  $П_{em} \gg 1$ , то правомерно “ЭГД-приближение”, в противном случае – “МГД-приближение”. При  $П_{em} \sim 1$  – налицо ЭМГД эффекты.

Для хороших диэлектриков ( $\tau \geq 10^{-1}$  с) ЭГД явления начинают проявляться при  $E \geq 1$  кВ/см =  $10^5$  В/м, и при  $l_E \sim 10^{-2}$  м и  $B \sim 1$  Тл получим  $П_{em} \sim 10^5 \gg 1$  – “ЭГД-приближение” с большой точностью. Аналогично обстоит дело для “МГД-приближения” в проводящих средах типа жидких металлов. Для морской воды удельная электропроводность  $\sigma \approx 3,3$  Ом<sup>-1</sup>·м<sup>-1</sup>,  $\tau \approx 2 \cdot 10^{-10}$  с [3], и при  $E \sim 10^4$  В/м  $П_{em} \sim 1$  при сравнительно слабых магнитных полях  $B \sim 10^{-4}$  Тл.

Эти оценки показывают, что в слабопроводящих жидкостях типа воды возможны смешанные ЭГД и МГД эффекты и они заслуживают внимания, однако в исследовательских целях для начала целесообразно рассмотреть их порознь.

Ниже рассматриваются вращательные движения слабопроводящей жидкости в скрещенных электрическом и магнитном полях, для теоретического описания которых достаточно ограничиться в формулах (1) магнитной составляющей  $\vec{f}_m$ . При этом предполагаемая малая электропроводность среды позволяет считать движение изотермическим, поскольку не учитывается джоулев нагрев. Учет последнего привел бы к появлению и слагаемого  $\vec{f}_e$ , что значительно усложнило бы задачу.

Рассмотрению подлежат две задачи: вращение жидкости в зазоре цилиндрического конденсатора; рис. 2 – вращение жидкости в кювете прямоугольной формы.

**2. Вращение жидкости в зазоре цилиндрического конденсатора.** Пусть жидкость заполняет зазор цилиндрического конденсатора согласно рис. 1. Весь стакан находится в вертикальном постоянном и однородном магнитном поле. Цилиндрический конденсатор подключен к источнику напряжения  $\varphi_s$  полярностью, как показано на рис. 1. На жидкость действует сила, объемная плотность которой равна  $\vec{f} = \vec{f}_m$ :

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}, \quad (3)$$

где плотность тока выражается формулой

$$\vec{j} = \frac{j_s \cdot r_s}{r} \vec{e}_r = \sigma \vec{E} = \frac{\sigma \varphi_s}{r \ln(R/r_s)} \cdot \vec{e}_r, \quad (4)$$

где  $j_s$  – плотность тока на поверхности внутреннего электрода радиуса  $r_s$ ,  $R$  – радиус наружного цилиндра.

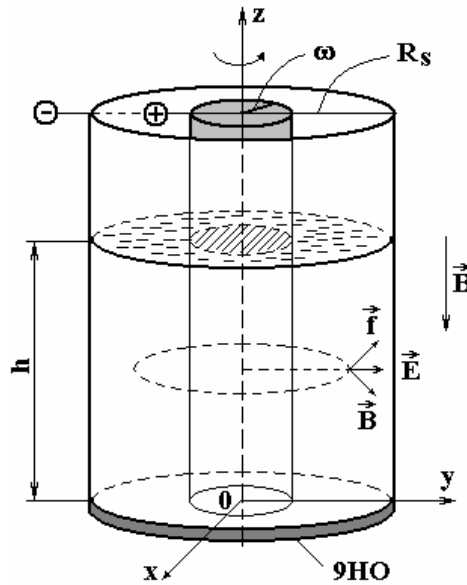


Рис. 1

С учетом (4) из (3) следует:

$$\vec{f} = \frac{\sigma \varphi_s B}{r \ln m} \cdot \vec{e}_\varphi, \quad m \equiv R/r_s. \quad (5)$$

Ввиду азимутального направления силы ищем решение для скорости в виде  $\vec{v} = v_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \equiv v \cdot \vec{e}_\varphi$ , вследствие чего в уравнениях Навье-Стокса выпадает нелинейное слагаемое  $(\vec{v} \nabla) \vec{v}$  и они принимают вид:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + f + \eta \left( \nabla^2 v - \frac{v}{r^2} \right) &= 0; \\ -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\gamma v^2}{r} &= 0; \quad -\frac{\partial P}{\partial z} - \gamma g = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Последнее есть уравнение неразрывности среды, с учетом которого записаны предыдущие. Очевидно, под действием вращающей силы (5) возможно вращение жидкости, причем из соображений симметрии заключаем, что давление  $P$  не будет зависеть от  $\varphi$ , а  $v = v(r, z)$  в силу последнего уравнения (6). Тогда из первого уравнения системы (6) получим

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \upsilon}{\partial r} - \frac{\upsilon}{r^2} = -\frac{A}{r}, \quad (7)$$

где обозначено

$$A \equiv \frac{\sigma \varphi_s B}{\eta \ln m}. \quad (8)$$

Уравнение (7) будем решать в трех вариантах: в предположении неограниченности цилиндра как снизу, так и сверху; при его ограниченности снизу твердым дном, а сверху – свободной поверхностью; цилиндр герметически закрыт и снизу и сверху твердыми диэлектрическими крышками.

**а) Неограниченный цилиндр.** Речь идет о распределении скорости в достаточно длинном цилиндре вдали от торцов, то есть в средней его части. Скорость будет функцией лишь радиальной координаты  $r$ , то есть  $\upsilon = \upsilon(r)$ , а уравнение (7) переходит в обыкновенное:

$$\frac{d^2 \upsilon}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\upsilon}{dr} - \frac{\upsilon}{r^2} = -\frac{A}{r}, \quad (9)$$

причем при соблюдении двух условий (прилипания):

$$\upsilon(r)|_{r=r_s} = 0; \quad \upsilon(r)|_{r=R} = 0. \quad (10)$$

После решения задачи (9)–(10) имеют вид

$$\upsilon(r) = \frac{Ar}{2(m^2 - 1)} \cdot \left( m^2 \ln \frac{R}{r} + \ln \frac{r}{r_s} - \frac{R^2}{r^2} \ln m \right). \quad (11)$$

С точки зрения возможного использования данного течения для прокачки жидкостей (МГД-насос) интерес представляет расход жидкости через продольное аксиальное сечение конденсатора:

$$Q = \iint_{(z,r)} \upsilon(r) dz dr = \int_0^h dz \int_{r_s}^R \upsilon(r) dr$$

или на единицу длины цилиндра

$$q \equiv Q/h = \frac{AR^2}{8} \left( \frac{m^2 - 1}{m^2} - \frac{4 \ln^2 m}{m^2 - 1} \right). \quad (12)$$

Это монотонно возрастающая функция  $q(m)$ , причем при  $m \approx 20$  выражение в круглых скобках составляет  $\approx 0,9$  и стремится к единице при дальнейшем возрастании  $m$ . Существенно, однако, то, что  $q \sim R^2$  – весьма сильная зависимость расхода от радиуса внешнего цилиндра, это вселяет оптимизм относительно насосного эффекта в зависимости от его геометрических параметров.

**б) Ситуация, соответствующая рис. 1.** Уравнение (7) надлежит решить при граничных условиях:

$$\upsilon(r, z)|_{r=r_s} = 0; \quad \upsilon(r, z)|_{r=R} = 0; \quad \upsilon(r, z)|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial z}|_{z=h} = 0. \quad (13)$$

Последнее условие означает отсутствие тангенциальной составляющей тензора напряжений на свободной поверхности жидкости, то есть пренебрежение трением между жидкостью и воздухом.

Решение уравнения (7) будем искать в виде

$$\upsilon(r, z) = u(r) \cdot \chi(r, z), \quad (14)$$

где в качестве  $u(r)$  примем решение (11) предыдущей задачи *a*, а функция  $\chi(r, z)$  играет роль поправочного коэффициента  $0 \leq \chi(r, z) \leq 1$ , причем согласно (13) удовлетворяет граничным условиям:

$$\chi(r, z)|_{z=0} = 0; \quad \frac{\partial \chi(r, z)}{\partial z}|_{z=R} = 0. \quad (15)$$

Подстановка (14) в (7) приводит к уравнению

$$\chi(r, z) \left( u'' + \frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) + u \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + 2u' \cdot \frac{\partial \chi}{\partial r} = -\frac{A}{r}. \quad (16)$$

Учитывая, что  $u(r)$  удовлетворяет уравнению (9), из (16) получим

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot \left[ \ln(ru^2) \right]' = \frac{A}{ru} (\chi - 1). \quad (17)$$

Оценка отдельных членов левой части (17) на основе представлений теории пограничного слоя показывает, что первый член  $\sim \chi / \delta^2$ , а оставшиеся  $\sim \chi / R^2$  (при  $R \gg r_s$ ). Приняв во внимание малость толщины пограничного слоя  $\delta$  на дне цилиндра по сравнению с  $R$  ( $\delta / R \ll 1$ ), приходим к выводу, что в (17) в левой части можно ограничиться лишь первым слагаемым:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \cong \frac{A}{ru} (\chi - 1), \quad (18)$$

где  $(ru)$  играет роль параметра ввиду отсутствия производных по  $r$ . С учетом сказанного общее решение (18) имеет вид

$$\chi(r, z) = 1 + C_1(r) e^{\lambda z} + e_2(r) e^{-\lambda z}, \quad (19)$$

где обозначено

$$\lambda \equiv \sqrt{\frac{A}{ru}}, \quad (20)$$

а  $C_1(r)$  и  $C_2(r)$  – произвольные функции от  $r$ , которые находим из условий (15). Окончательно найдем

$$v(r, z) = u(r) \cdot \left( 1 - e^{-\lambda z} - \frac{sh\lambda z}{ch\lambda h} \cdot e^{-\lambda h} \right), \quad (21)$$

где  $u(r)$  совпадает с (11):

$$u(r) = \frac{Ar}{2(m^2 - 1)} \left( m^2 \ln \frac{R}{r} + \ln \frac{r}{r_s} - \frac{R^2}{r^2} \ln m \right). \quad (22)$$

Необходимо отметить, что вблизи боковых стенок, ввиду  $u(r) \rightarrow 0$ , согласно (21)  $v(r, z) \rightarrow u(r)$ , поскольку  $\lambda \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $v(r, z) \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow r_s$ ,  $R$  в полном согласии с граничными условиями.

На свободной поверхности жидкости ( $z = h$ ) распределение скорости дается зависимостью:

$$v(r, h) = u(r) \cdot \left[ 1 - e^{-\lambda h} (1 + th\lambda h) \right]. \quad (23)$$

В тонких слоях ( $\lambda h \ll 1$ ) с точностью до квадратных членов  $\sim \lambda^2 h^2$  из (23) получим

$$v(r, h) \cong \frac{Ah^2}{2r}, \quad (24)$$

однако в соответствии с предыдущим замечанием вблизи стенок эта зависимость переходит в  $v(r, h) \rightarrow u(r)$ , и, таким образом, констатируем монотонный рост скорости вращения пленки по мере приближения к центру конденсатора.

**в) Конденсатор на торцах закрыт.** Жидкость занимает весь зазор цилиндрического конденсатора. В этой постановке задачи  $C_1(r)$  и  $C_2(r)$  в (19) следует находить из условий:

$$\chi(r, z)|_{z=0} = 0; \quad \chi(r, z)|_{z=h} = 0. \quad (25)$$

Получим

$$v(r, z) = u(r) \cdot \left[ 1 - \frac{sh\lambda(h-z) + sh\lambda z}{sh\lambda h} \right]. \quad (26)$$

Осуществив сдвиг начала координат в центр конденсатора, то есть положив в (26)  $z = z_1 + (h/2)$ , найдем

$$v(r, z_1) = u(r) \cdot \left[ 1 - \frac{ch\lambda z_1}{ch \frac{\lambda h}{2}} \right], \quad (27)$$

откуда следует четность скорости относительно координат  $z_1$ .

Рассматриваемый случай граничных условий (25) является более адекватным в прикладном, “насосном” плане, поскольку конструктивно МГД–устройство является герметичным без воздушных зазоров. Расход жидкости определится по формулам, аналогичным (12) и выше, и с учетом (27):

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-h/2}^{h/2} dz_1 \int_{r_s}^R \left[ u(r) - u(r) \cdot \frac{ch\lambda(r)z_1}{ch \frac{\lambda(r)h}{2}} \right] dr = \int_{-h/2}^{h/2} dz_1 \int_{r_s}^R \chi(r, z_1) u dr = \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} dz_1 \cdot \bar{\chi}(z_1) \cdot q \equiv \kappa \cdot h \cdot q, \end{aligned} \quad (28)$$

где дважды применили теорему о среднем (в первом случае – с весом  $u(r)$ ), причем обозначено

$$\kappa \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\chi}(z_1) dz_1, \quad \in (0; 1). \quad (29)$$

Таким образом, расход с точностью до коэффициента пропорциональности  $\kappa$ , не превышающего единицы и стремящегося к единице по мере увеличения  $h$ , выражается той же формулой (12), что и в случае а) бесконечного цилиндра.

**3. Вращение жидкости в прямоугольной ячейке.** Пусть теперь физическая ситуация соответствует рис. 2, на котором изображена рабочая ячейка прямоугольной формы, горизонтально расположенная во внешнем однородном вертикальном магнитном поле магнитной индукцией  $\vec{B}$ . Ячейка открыта сверху, причем все стенки изготовлены из изолирующего материала, а две, заштрихованные на рис. 2, – металлические, представляющие пластины плоскопараллельного конденсатора, подключенного к внешнему источнику питания напряжением  $\varphi_s$ . При этих условиях жидкость будет в поле объемно распределенных сил (3) плотностью

$$\vec{f} = \sigma \vec{E} \times \vec{B} = \sigma EB \cdot \vec{e}_x, \quad (30)$$

где  $\vec{e}_x$  обозначен орт оси OX; аналогично  $\vec{e}_y, \vec{e}_z$  будет означать орты остальных осей координат (чтобы не путать с плотностью тока  $\vec{i}$  или  $\vec{j}$ ). Полагая, что все величины в (30) постоянные, приходим к выводу, что

$$\vec{f} = f \cdot \vec{e}_x, \quad f = \sigma EB = \text{const}, \quad (31)$$

и эта сила создает градиент давления по направлению оси OX точно так же, как гравитационная сила  $\vec{f}_g = \gamma \vec{g}$  – по вертикали. Однако более общим условием равновесия, вытекающим из общего уравнения равновесия

$$-\nabla p + \vec{f} = 0, \quad (32)$$

является уравнение  $\text{rot} \vec{f} \equiv 0$ , которое применительно к равенствам (30), (31) принимает вид

$$\nabla f \times \vec{e}_x = 0, \quad (33)$$

аналогично гравитационному случаю  $\nabla \gamma \times \vec{g} = 0$ . При этом, как известно [4], из двух возможных направлений  $\text{grad} f$ , а именно параллельное и антипараллельное направлению  $\vec{e}_x$ , то есть силы  $\vec{f}$ , первое отвечает устойчивому, а второе неустойчивому равновесию. Следовательно, движение жидкости возможно, если  $\nabla f \uparrow \downarrow \vec{e}_x$ , что равносильно  $\nabla f \cdot \vec{e}_x < 0$ . В дальнейшем можно руководствоваться аналогией с гравитационной конвекцией, возможной при  $\nabla \gamma \uparrow \downarrow \vec{g}$ . Однако мы рассмотрим одну из простейших задач – течения в достаточно длинной по направлению OX ячейке (рис. 3). Исходя из

уравнения неразрывности  $\nabla \vec{j} = 0$  видим, что  $j = \sigma E = \text{const}$ . Поэтому  $\text{grad} f \neq 0$  может возникнуть лишь за счет неоднородности магнитного поля  $B$ , то есть

$$\nabla f = j \nabla B = j \frac{dB}{dx} \cdot \vec{e}_x \Rightarrow \nabla f \cdot \vec{e}_x < 0 \Leftrightarrow \frac{dB}{dx} < 0. \quad (34)$$

Неоднородность магнитного поля легко создавать, если ячейка помещена в зазоре постоянного магнита (электромагнита), путем частичного извлечения кюветы из поля по тому или иному направлению, в рассматриваемом случае – ОХ по стороне ДС (рис. 3). В выступающей из поля части ячейки (ДС) поле будет слабее и  $dB/dx < 0$  согласно (34). Ситуация напоминает случай подогрева жидкости снизу. Возникновение, по-видимому, ячеистой (в случае, если было бы  $ДС \gg AC$ ) электромагнитной конвекции будет носить пороговый характер. Исходя из аналогий  $jB \sim \gamma g$  можно ввести аналог числа Грасгофа – “магнитное” число Грасгофа:

$$Gr_{em} = \frac{j \cdot \Delta B \cdot l^3}{\gamma \nu^2}, \quad (35)$$

где  $l$  – толщина слоя. Следует заметить, что прямой аналогии со случаем естественной конвекции нет, так как последняя – явление сугубо термическое, в то время как рассматриваемая нами задача “изотермическая”.

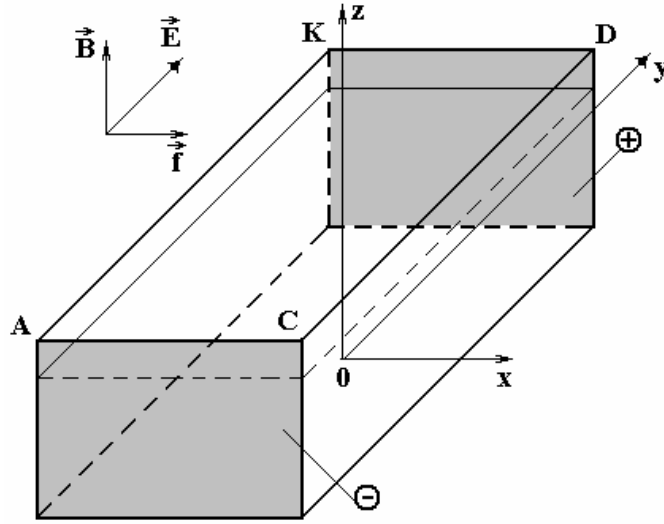


Рис. 2

Пусть теперь рабочая ячейка извлекается из магнитного поля по направлению ОУ. Вычислим  $\text{rot} \vec{f}$ :

$$\nabla \times \vec{f} = \nabla f \times \vec{e}_x = j \frac{dB}{dy} \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -j \frac{dB}{dy} \cdot \vec{e}_z \neq 0. \quad (36)$$

Следовательно, в этом случае вообще равновесия невозможно. Рассмотрим возможное вращательное движение в вытянутом согласно рис. 3 направлении.

Предположим линейный закон убывания  $B$ :

$$B(y) = B_0 \cdot \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{d} \right), \quad -\frac{d}{2} \leq y \leq \frac{d}{2}, \quad (37)$$

где  $d \equiv CD$  – ширина ячейки. При предполагаемом условии  $l \gg d$  и течения согласно рис. 3 распределение скорости в средней части ячейки находим из уравнения

$$\eta \frac{d^2 v}{dy^2} + \sigma E B_0 \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{d} \right) = 0, \quad (38)$$

где пренебрегли градиентом давления ввиду его постоянства, как следствие постоянства на горизонтальной свободной поверхности.

Решением этого уравнения при граничных условиях  $v(\pm d/2) = 0$  является функция

$$v(y) = \frac{\sigma E B_0}{6 \eta d} \left( y^2 - \frac{d^2}{4} \right) y, \quad (39)$$

то есть имеем течение с кубическим профилем, такое течение качественно было подтверждено экспериментально [1].

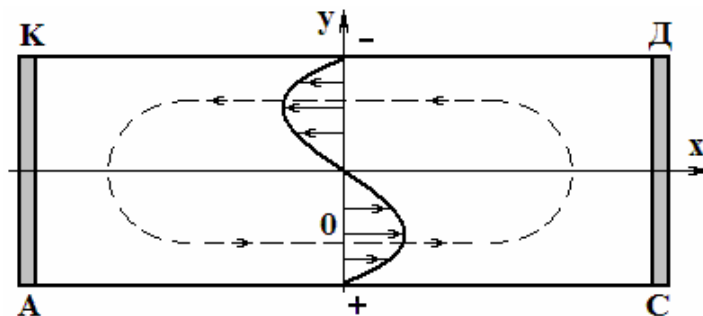


Рис. 3

Заметим, что предполагаемая зависимость (37) – наипростейшая. Очевидно,  $B(y)$  хотя и убывающая, но более сложного вида функция, поэтому и профиль скорости в ячейке может существенно отличаться от кубического.

**Вывод.** Рассмотренные теоретические задачи и их решения могут служить предпосылкой для постановки новых физических экспериментов в исследовательских целях, а также создания новых ЭМГД-устройств для практических нужд. Кроме того, можно продвинуться далее, учитывая на следующем этапе исследований джоулев нагрев и обусловленное этим возникновение объемных электрических зарядов и кулоновских сил  $\rho\vec{E}$ . Однако еще далеко не исчерпаны всевозможные задачи из рассмотренной (МГД) тематики.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гросу Ф.П., Паша Г.Н., Болога М.К. Гидроэлектромагнитные явления в растворах // Электронная обработка материалов. 2008. № 2. С. 55–59.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1957.
3. Енохович А.С. Справочник по физике и технике. М.: Просвещение, 1989.
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972.

Поступила 21.08.09

#### Summary

Two problems about rotation of liquid in crossed electric and magnetic fields in connection with investigation of regularities of interaction of external electric and magnetic fields with weakly conducting liquids like water (running water, sea water) and its solutions ( $\sigma \sim (10^{-2} - 10^2) \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ) are formulated and solved. The first problem deals with the liquid confined in the gap of a vertical cylindrical capacitor, while the second problem deals with the liquid in a rectangular cuvette, two lateral vertical walls of which are used as armatures of a plane-parallel capacitor. In both cases a constant vertical magnetic field is applied to the liquid while constant voltage is supplied at the armatures of the capacitor. Three types of boundary conditions are considered in the first case: capacitor of infinite length; capacitor is confined by a solid bottom from below and has a free boundary at the top; capacitor with closed ends and liquid occupies all of its volume. Obtained results can be used in many practical applications, for example in pumping of weakly conducting liquids.