

А.И. Григорьев, С.О. Ширяева

ОБ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОБЪЕМНО ЗАРЯЖЕННОЙ СТРУИ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ

*Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
ул. Советская, 14, г. Ярославль, 150000, Россия, shir@uniyar.ac.ru*

Введение. Феномен электродиспергирования жидкости широко используется в технике и технологии (см., например, [1–6] и приведенную там литературу). Закономерности реализации капиллярно-электростатической неустойчивости и распада на капли заряженных струй жидкости подробно исследованы как экспериментально, так и теоретически [1–6]. Тем не менее некоторые вопросы, связанные с обсуждаемым феноменом, остались за рамками проведенных исследований. В частности, сказанное относится к особенностям распада на отдельные капли весьма сильно заряженных струй, которые обошли вниманием теоретики, а экспериментаторы [7–8] лишь отметили факт необычной феноменологии распада струи при больших плотностях поверхностного заряда, не предложив никакой физической трактовки наблюдаемому феномену. Согласно данным экспериментов [7–8] сильно заряженные струи, выбрасываемые с вершины мениска жидкости на вершине капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему, разветвляются, выбрасывая с боковой поверхности дочерние струйки, как ветки дерева от ствола, и распадаются на капли именно дочерние струйки. Ветвление струи происходит путем выбрасывания хаотическим образом с поверхности основной струи под углом к ее оси нескольких существенно более тонких струек, распадающихся на мелкие капельки. Физическое истолкование описанной картины распада сильно заряженных струй дано в [9].

Хорошо известно, что при достаточно больших напряженностях электрического поля у поверхности идеально проводящей жидкости – сферической капли [10–11] или плоской поверхности – жидкости [12–13] претерпевают неустойчивость по отношению к отрицательному давлению электрического поля, на них образуются эмиттирующие выступы, называемые «конусами Тейлора» [14]. С вершин конусов Тейлора выбрасываются тонкие сильно заряженные струйки жидкости, распадающиеся на отдельные капельки, уносящие избыточный заряд с поверхности последней [15]. Именно такой механизм избавления от избыточного заряда предложен в [9] и для струи идеально проводящей жидкости при достаточно больших напряженностях электрического поля у ее поверхности. В настоящей работе предполагается исследовать возможность реализации электростатической неустойчивости боковой поверхности струи объемно заряженной диэлектрической жидкости.

Формулировка задачи. Пусть дана бесконечная, движущаяся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью U_0 цилиндрическая с радиусом R струя идеальной несжимаемой жидкости с массовой плотностью ρ , диэлектрической проницаемостью ϵ_{in} и коэффициентом поверхностного натяжения σ , имеющая радиус R . Окружающее струю пространство характеризуется диэлектрической проницаемостью ϵ_{ex} и пренебрежимо малой массовой плотностью. Примем, что струя заряжена и что в рамках модели "вмороженного" заряда он распределен равномерно по объему с плотностью μ , при этом на единицу длины струи приходится заряд $\eta \equiv \pi R^2 \mu$.

Поскольку мы рассматриваем бесконечную струю, то для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью U_0 .

Очевидно, что в такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $U(r, t)$ полностью определяется возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными осцилляциями ее поверхности и является величиной такого же порядка малости, что и амплитуда колебаний. Будем искать критические условия реализации неустойчивости капиллярных колебаний поверхности такой струи.

Все расчеты проведем в цилиндрической системе координат с осью OZ , совпадающей с осью симметрии струи, ее орт n_z которой направлен вдоль вектора скорости U_0 . В безразмерных переменных, в которых радиус струи R , плотность жидкости ρ и коэффициент поверхностного натяжения σ выбраны в качестве основных масштабов ($R = \rho = \sigma = 1$), уравнение свободной поверхности струи, подверженной произвольным осцилляциям малой амплитуды, может быть записано в виде

$$r = 1 + \varepsilon \cdot \xi(\varphi, z, t),$$

где ε – амплитуда колебаний ($\varepsilon \ll 1$); $\xi(\varphi, z, t)$ – возмущение поверхности струи $|\xi(\varphi, z, t)| \sim 1$, вызванное капиллярными волнами на ее поверхности, порождаемыми уже тепловым движением молекул жидкости.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярных осцилляций струи состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U = -\frac{1}{\rho} \nabla P; \quad \text{div} U = 0.$$

На поверхности струи ($r = R + \xi$) должны выполняться:

– кинематическое граничное условие

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{F=0} = 0,$$

– динамическое граничное условие

$$-(P - P_{\text{атм}}) + \text{div} \bar{n} - P_q = 0.$$

На оси струи поле скоростей U должно быть ограничено:

$$r \rightarrow 0: \quad |U| < \infty.$$

$P_{\text{атм}}$ – давление атмосферы; $U(r, t)$, $P(r, t)$ – поле скоростей и поле давлений внутри струи; P_q – давление электростатического поля на поверхность струи, которое вычисляется из краевой задачи для электрических потенциалов внутри Φ^{in} и вне Φ^{ex} струи соответственно:

$$\Delta \Phi^{in} = -4\pi \frac{\mu}{\varepsilon_{in}}, \quad \Delta \Phi^{ex} = 0,$$

$$\begin{aligned} r = R + \xi: \quad \Phi^{in} &= \Phi^{ex}, & \varepsilon_{in} \bar{n} \cdot \nabla \Phi_{in} &= \varepsilon_{ex} \bar{n} \cdot \nabla \Phi_{ex}, \\ r \rightarrow 0: \quad \Phi^{in} &\rightarrow 0, & r \rightarrow \infty: \quad \Phi^{ex} &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отметим, что в модели диэлектрической струи заряд "вморожен" в жидкость и на поверхности нет свободных зарядов. Поэтому зависимость электрического потенциала Φ от времени полностью определяется изменением во времени формы поверхности струи, а зависимость от пространственных переменных потенциалов внутри Φ^{in} и вне струи Φ^{ex} может быть найдена из решения выписанной электростатической задачи.

Кроме выписанных условий должно выполняться требование постоянства объема участка струи, длина которого равна длине волны λ :

$$\int_{z_0}^{z_0 + \lambda} \int_0^{1 + \xi} \int_0^{2\pi} dz r dr d\varphi = \pi \lambda.$$

Дисперсионное уравнение. Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$\begin{aligned} \xi(\varphi, z, t) &= C_1 \cdot \exp[i(kz - \omega t + m\varphi)]; \\ \psi(\vec{r}, t) &= C_2 \cdot I_m(kr) \cdot \exp[i(kz - \omega t + m\varphi)]; \\ \Phi_{in}(\vec{r}, t) &= C_3 \cdot I_m(kr) \cdot \exp[i(kz - \omega t + m\varphi)]; \\ \Phi_{ex}(\vec{r}, t) &= C_4 \cdot K_m(kr) \cdot \exp[i(kz - \omega t + m\varphi)]. \end{aligned} \quad (1)$$

$I_m(k)$ и $K_m(k)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; m – азимутальный параметр; C_j – неопределенные константы. Не останавливаясь подробно на процедуре отыскания решения, детально разобранной в [6, 16], выпишем сразу дисперсионное уравнение задачи для азимутального числа $m = 2$:

$$\omega^2 = g(k) \left[3 + k^2 + W F(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) \right]; \quad W \equiv \pi \mu^2 \equiv \eta^2 / \pi; \quad (2)$$

$$F(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) \equiv \frac{1}{(\varepsilon_{in} \cdot g(k) - \varepsilon_{ex} \cdot h(k)) \varepsilon_{in} \varepsilon_{ex}} \left[(\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex})^2 g(k) h(k) + \right. \\ \left. + \varepsilon_{in} (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}) g(k) + 3 \varepsilon_{ex} (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ex}) h(k) + 4 \varepsilon_{in} \varepsilon_{ex} \right];$$

$$g(k) \equiv 2 + \frac{k I_3(k)}{I_2(k)}; \quad h(k) \equiv 2 - \frac{k K_3(k)}{K_2(k)}.$$

Зарядовый параметр W определяется как отношение давления электрического поля собственного заряда на поверхность струи к давлению сил поверхностного натяжения под ее цилиндрической поверхностью. Поскольку W выражается через заряд, приходящийся на единицу длины струи, и в математическую формулировку задачи не входят никакие физические характеристики его переноса, то полученное дисперсионное уравнение может быть использовано и для исследования волн на однородно заряженной поверхности идеально проводящей струи при выполнении в дисперсионном уравнении предельного перехода $\varepsilon_{in} \rightarrow \infty$. В проводимом анализе, выполняемом с «физической» степенью точности, условие $\varepsilon_{in} \rightarrow \infty$ можно заменить на более слабое: $\varepsilon_{in} \gg 1$. В итоге дисперсионное уравнение (2) может применяться для анализа электростатической неустойчивости боковой поверхности струи с любой конечной электропроводностью.

Анализ полученных результатов. Из дисперсионного уравнения (2) видно, что поскольку множитель $g(k)$ всегда положителен, то независимо от величины параметра W поверхность струи устойчива по отношению к виртуальным волновым деформациям с $m = 2$, когда выражение, стоящее в квадратных скобках, в правой части дисперсионного уравнения, положительно. Появление комплексно сопряженных решений дисперсионного уравнения, соответствующих неустойчивым волнам, связано с прохождением правой части дисперсионного уравнения через ноль в область отрицательных значений, что возможно при $F_\mu(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex}) < 0$ и при достаточно больших значениях параметра W , когда выполняется соотношение

$$W \geq \frac{3 + k^2}{|F(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex})|}. \quad (3)$$

Из рис. 1 видно, что функция $F_{\mu}(k, \varepsilon_{in}, \varepsilon_{ex})$ всегда отрицательна и для реализации электростатической неустойчивости достаточно, чтобы зарядовый параметр удовлетворял соотношению (3). В этом случае дисперсионное уравнение будет иметь два мнимых комплексно сопряженных корня. Корень с положительным знаком при мнимой единице будет соответствовать появлению винтообразных волновых возмущений с $m=2$ на поверхности струи. Амплитуда таких возмущений будет экспоненциально нарастать со временем, и с их вершин будут выброшены дочерние струйки, распадающиеся на отдельные капельки в полном соответствии с теорией [6, 9] и данными экспериментов [7–8].

На рис. 2 приведены зависимости квадрата частоты от волнового числа волны на поверхности струи $\omega^2 = \omega^2(k)$, рассчитанные при $m=2$ и $\varepsilon_{ex}=1$ для различных значений диэлектрической проницаемости жидкости ε_{in} и зарядового параметра W . Неустойчивым волнам с $m=2$ на поверхности струи соответствуют состояния с $\omega^2 < 0$. Кривые, касающиеся оси абсцисс при заданной диэлектрической проницаемости ε_{in} , соответствуют критическому для начала реализации зарядовому параметру W^* . Из рис. 2 видно, что W^* с увеличением диэлектрической проницаемости жидкости изменяется немонотонно: W^* по мере увеличения ε_{in} сначала немного растет, достигая, как показывает расчет, максимума ($W^* \approx 3,52$) при $\varepsilon_{in} \approx 3,1$, а затем уменьшается до $W^* \approx 2,89$ при $\varepsilon_{in} = 80$. Волновое число, соответствующее точке касания кривой $\omega^2 = \omega^2(k)$ оси абсцисс, при этом растет. Для фиксированных значений зарядового параметра W величина инкремента наиболее неустойчивой волны и соответствующего ей волнового числа увеличивается с ростом диэлектрической проницаемости жидкости ε_{in} . Этот вывод подтверждается и результатами расчетов, проиллюстрированных рис. 3, где приведены поверхности, определяющие положение границ области реализации электростатической неустойчивости струи в пространстве параметров $\{k, \varepsilon_{in}, W\}$, пересеченные плоскостью $W = W_c = \text{const}$. Из рис. 3 видно, что площадь геометрического места точек, на котором при заданном W_c реализуется электростатическая неустойчивость боковой поверхности струи, зарождающаяся при $\varepsilon_{ex}=1$, $W=2,89$ в окрестность точки $\varepsilon_{in}=80$ и $k \approx 0,78$, увеличивается с ростом W_c , расширяясь в обе стороны по k и в сторону уменьшения ε_{in} (при принятом ограничении ε_{in} сверху значением $\varepsilon_{in}=80$). При $W=3,04$ левый по k край области реализации электростатической неустойчивости выходит при $\varepsilon_{in}=80$ на значение $k=0$. При $W=3,13$ передний по ε_{in} край области реализации электростатической неустойчивости выходит на значения $\varepsilon_{in} < 20$. Расчеты показывают, что при $W=3,25$ электростатическая неустойчивость может реализоваться уже при $\varepsilon_{in}=10$ в диапазоне значений волновых чисел $0 \leq k \leq 1$.

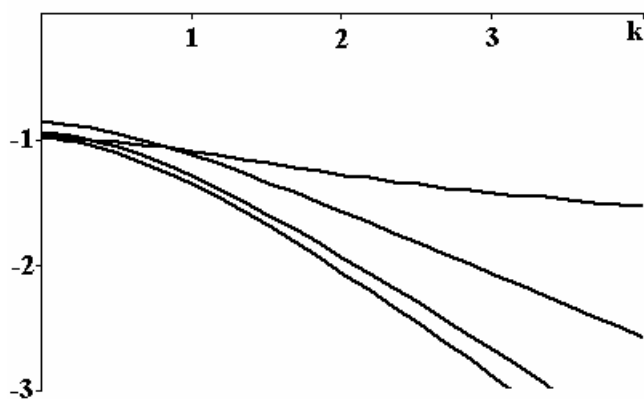


Рис. 1. Зависимости $F_{\mu} = F_{\mu}(k)$ при $\varepsilon_{ex}=1$ и различных диэлектрических проницаемостях ε_{in} струи. По правому краю сверху вниз: $\varepsilon_{in}=1,048$ – жидкий гелий; $\varepsilon_{in}=5$; $\varepsilon_{in}=20$; $\varepsilon_{in}=80$

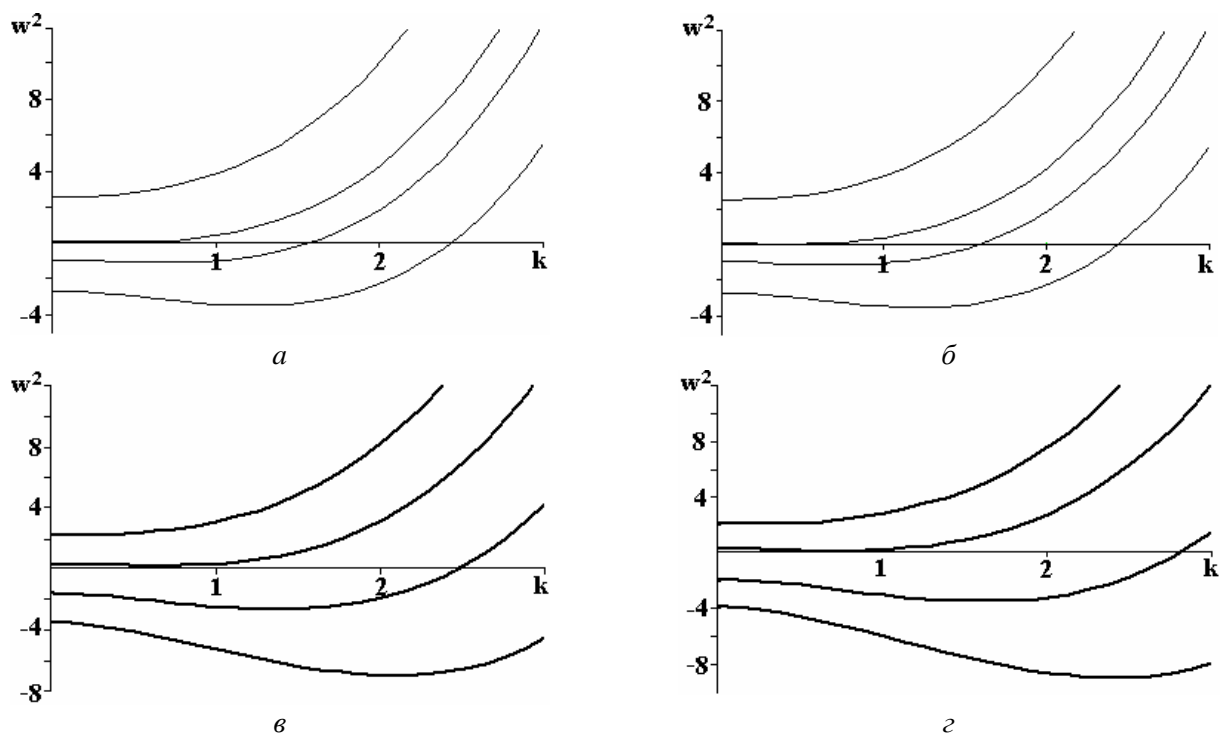


Рис. 2. Зависимости квадрата частоты от волнового числа волны на поверхности струи, рассчитанные при $\epsilon_{ex}=1$ для: а) $\epsilon_{in}=1,048$, $W=2$; $W=3$; $W=4$; $W=5$; б) $\epsilon_{in}=5$, $W=2$; $W=3,41$; $W=4$; $W=5$; в) $\epsilon_{in}=20$, $W=2$; $W=3$; $W=4$; $W=5$; г) $\epsilon_{in}=80$, $W=2$; $W=2,89$; $W=4$; $W=5$.

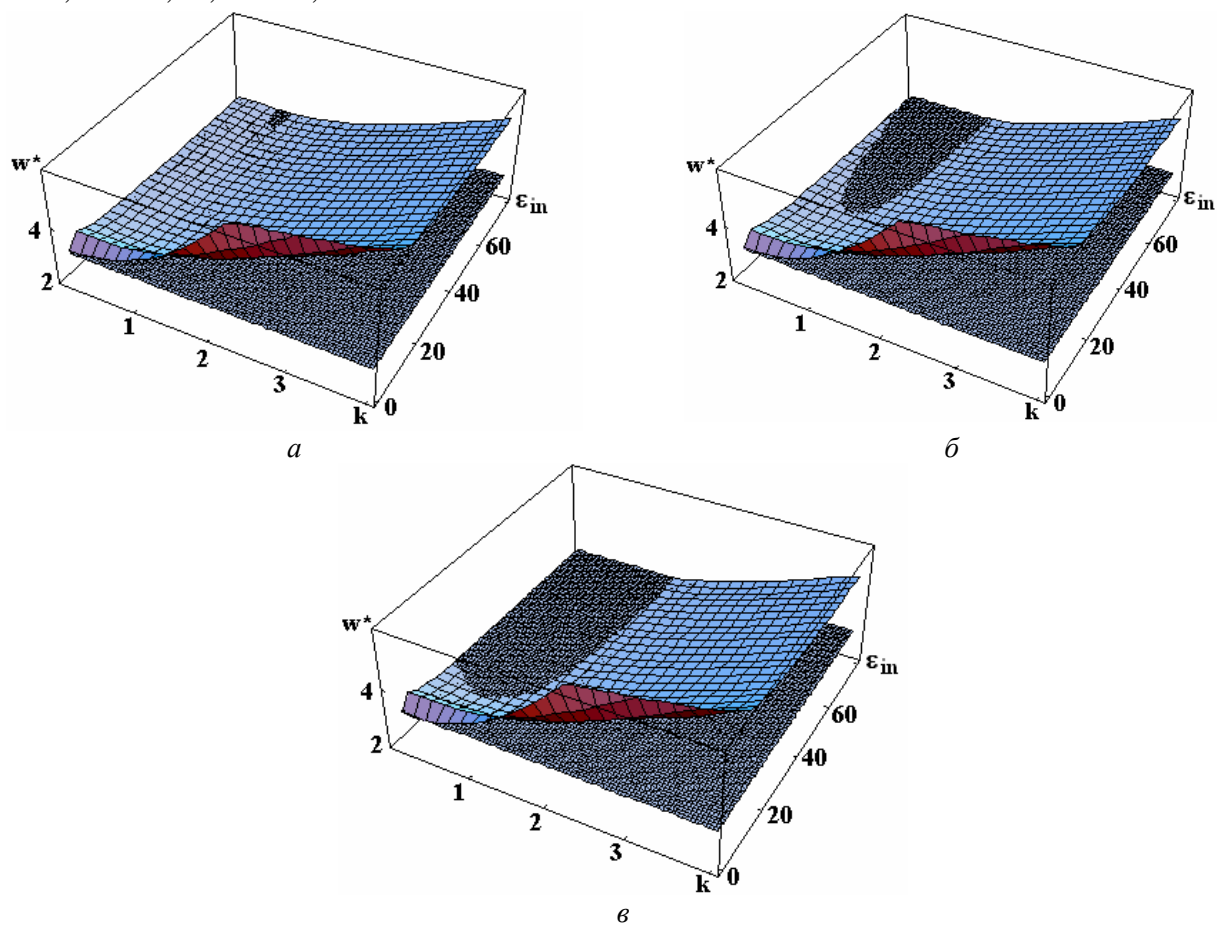


Рис. 3. Поверхность, определяющая положение границ области реализации электростатической неустойчивости струи в пространстве параметров $\{k, \epsilon_{in}, W\}$, пересеченная плоскостью: а) $W=2,955$; б) $W=3,04$; в) $W=3,13$

Ограничения, связанные с разрядными явлениями. То обстоятельство, что электростатическая неустойчивость боковой поверхности струи в широком диапазоне значений диэлектрической проницаемости жидкости реализуется при весьма больших значениях зарядового параметра ($2,89 < W < 3,25$), приводит к необходимости исследования возможности зажигания коронного разряда на поверхности струи. Точнее говоря, следует задаться вопросом, какие ограничения на радиусы струй и величины коэффициентов поверхностного натяжения диспергируемых жидкостей накладывает возможность зажигания коронного разряда.

Напряженность поля на поверхности объемно заряженного цилиндра радиуса R определяется известным выражением $E \equiv 2\pi\mu R/\varepsilon_{ex}$. Коронный же разряд у гладкой цилиндрической поверхности в воздухе при нормальном атмосферном давлении в радиальном электростатическом поле зажигается согласно эмпирической формуле Пика [17] при $E_{cr} \approx 31 \cdot (1 + 0,308/\sqrt{R})$ кВ/см, где R измерено в сантиметрах.

В размерном виде параметр W записывается как $W \equiv \pi\mu^2 R^3/\sigma \equiv E^2 R/4\pi\sigma$. Подставив сюда найденное по формуле Пика предельное для зажигания коронного разряда в окрестности струи радиуса R значение напряженности поля, можно найти максимально допустимую величину зарядового параметра (вычисляемого в Гауссовой системе единиц):

$$W_{cr} \equiv \frac{\left[31 \cdot \left(1 + \frac{0,308}{300 \cdot \sqrt{R}} \right) \right]^2 R}{4\pi\sigma}.$$

На рис. 4 приведены результаты расчета по этому соотношению в виде зависимости $W_{cr} = W_{cr}(R, \sigma)$, пересеченные плоскостью $W = \text{const}$. Разрядные явления при заданном $W = \text{const}$ не влияют на развитие гидродинамических явлений на поверхности струи на геометрическом месте точек, на котором поверхность $W_{cr} = W_{cr}(R, \sigma)$ расположена выше плоскости $W = \text{const}$ и существенна там, где поверхность $W_{cr} = W_{cr}(R, \sigma)$ уходит под плоскость $W = \text{const}$. Из рис. 4 видно, что при изменении зарядового параметра в диапазоне $2,955 \leq W \leq 3,13$ коронный разряд на боковой поверхности струи не будет препятствовать реализации электростатической неустойчивости для струй жидкостей с достаточными радиусами: $R > 25 \div 30 \mu\text{m}$ в широком диапазоне изменения величины коэффициента поверхностного натяжения ($1 < \varepsilon_{in} < 70$).

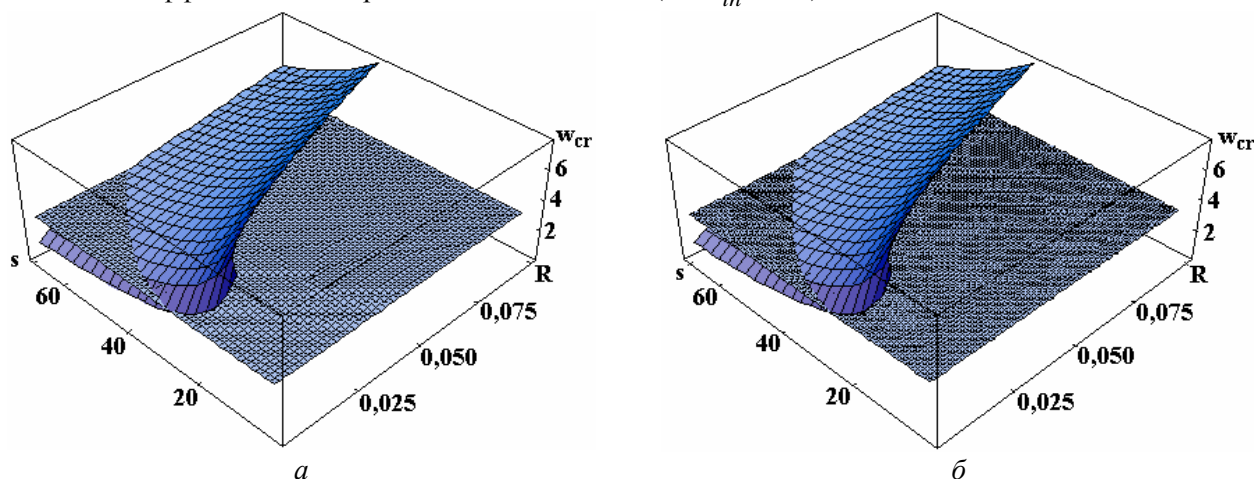


Рис. 4. Зависимость критического значения безразмерного зарядового параметра W_{cr} от величины коэффициента поверхностного натяжения жидкости σ , измеренного в dyne/cm , и радиуса струи R , измеренного в см, пересеченная плоскостью: а) $W = 2,955$; б) $W = 3,13$

Закключение. На основе анализа дисперсионного уравнения для осесимметричных капиллярных волн с азимутальным числом $m = 2$ на поверхности сильно объемно заряженной цилиндрической струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости показано, что для

жидкостей с диэлектрическими проницаемостями, изменяющимися в широком диапазоне значений от $\epsilon_{in} = 1,048$ для жидкого гелия до $\epsilon_{in} = 80$ воды, может иметь место электростатическая неустойчивость боковой поверхности струи. Разрядные явления на боковой поверхности сильно заряженной струи, связанные с возможностью зажигания у поверхности струи коронного разряда, существенны для тонких струй с радиусами, которые меньше ≈ 25 .

Работа выполнена в рамках тематического плана университета при поддержке грантов: губернатора Ярославской области, Рособразования №2.1.1/3776, РФФИ № 09-01-00084 и № 09-08-00148.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бураев Т.К., Верещагин И.П., Пашин Н.М. Исследование процесса распыления жидкостей в электрическом поле // Сб. Сильные электрические поля в технологических процессах. М.: Энергия, 1979. № 3. С. 87–105.
2. Ентов В.М., Ярин А.Л. Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей // ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. "Механика жидкости и газа". 1984. Т.17. С.112–197.
3. Григорьев А.И. Неустойчивости заряженных капель в электрических полях // Электронная обработка материалов. 2000. № 6. С. 3–22.
4. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
5. Григорьев А.И., Ширяева С.О., Воронина Н.В., Егорова Е.В. Об осцилляциях и спонтанном распаде заряженных жидких струй // Электронная обработка материалов. 2006. № 6. С. 15–27.
6. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд. ЯрГУ, 2007. 340 с.
7. Cloupeau M., Prunet Foch B. Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes // J. Electrostatics. 1990. V.25. P. 165–184.
8. Jaworek A., Krupa A. Classification of the modes of EHD spraying // J. Aerosol Sci. 1999. V.30. № 7. P.873–893.
9. Григорьев А.И. Электростатическая неустойчивость сильно заряженной струи электропроводной жидкости // ЖТФ. 2009. Т.79. Вып. 4. С. 35–46.
10. Rayleigh, Lord. On equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // Phil. Mag. 1882. V.14. P.184-186.
11. Григорьев А.И. О механизме неустойчивости заряженной проводящей капли // ЖТФ. 1986. Т.56. Вып.7. С. 1272–1278.
12. Tonks L.A. A theory of liquid surface rupture by uniform electric field // Phys. Rev. 1935. V.48. P. 562–568.
13. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме // ЖЭТФ. 1936. Т.6. № 4. С. 348–350.
14. Taylor G.I. Disintegration of water drops in an electric field // Proc. R. Soc., London. 1964. V.A280. P.383–397.
15. Григорьев А.И., Ширяева С.О. Закономерности рэлеевского распада заряженной капли // ЖТФ. 1991. Т.61. Вып. 3. С. 19–28.
16. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В. Об устойчивости неосесимметричных мод объемно заряженной струи вязкой диэлектрической жидкости // ЖТФ. 2003. Т.73. Вып. 11. С. 22–30.
17. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.

Поступила 07.05.09

Summary

On the base of dispersion equation for capillary waves on a surface of volumetrically charged jet of dielectric liquids analysis was found that for liquids with small permittivity can occur electrostatic instability of a jet surface.