С.А. Баранов[*,**]

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА МИКРО- И НАНОПРОВОДА В ОБЛАСТИ СВЕРХВЫСОКИХ ЧАСТОТ

[*]Институт прикладной физики АН Республики Молдова,
ул. Академией , 5, г. Кишинев, MD–20028 , Республика Молдова
***Приднестровский государственный университет им. Т.Г.Шевченко,*
ул. 25 Октября, 128 , г. Тирасполь, Республика Молдова, baranov@phys.asm.md

Введение

Современные технологии позволяют получать микро- и нанообъекты, в частности в виде микро- и нанопроводов (МНП). Изучение электродинамических свойств таких проводов (МНП) сложно из-за их микроскопических размеров. Поэтому возрастает роль бесконтактных методов исследования электродинамических свойств МНП, которые разработаны для области сверхвысоких частот (СВЧ).

Кроме того, применение микро- и нанопроводов для получения метаматериалов непосредственно связано, в частности, с практическими применениями этих материалов, которые обычно имеют уникальные высокочастотные свойства (см., например, [1–3]). С помощью микро- и нанопроводов изготовляются уникальные радиопоглощающие экраны (управляемые внешними полями). Возможно также создание материалов с отрицательной дисперсией [4, 5] и других устройств, работающих в данном диапазоне электромагнитного поля.

В работе исследуются теоретические подходы, позволяющие анализировать экспериментальные результаты. Отметим, что данные теоретические подходы развивались впервые в работе [6], результаты которой здесь обсуждаются. Получены и новые результаты, позволяющие анализировать эксперименты по изучению высокочастотных свойств нано- и микропроводов.

Определение импеданса провода в случае отсутствия частотной дисперсии магнитной проницаемости

В проводнике переменный ток, в отличие от постоянного, распределяется неравномерно по его сечению, а концентрируется по поверхности. Это явление называется скин-эффектом и влечет за собой изменение эффективного сопротивления и самоиндукции. Ниже приведем решение уравнений Максвелла для цилиндрических проводников, но начнем с простейшего анализа полуплоскости.

Будем исходить из уравнений для электромагнитного поля (уравнений Максвелла) в системе СГС:

$$rot\quad E = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\ , \tag{1}$$

$$rot\quad H = \frac{4\pi\sigma}{c}E + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}\,, \tag{2}$$

где σ – удельная проводимость, μ – магнитная проницаемость (c – скорость света в пустоте).

Плотность тока смещения в проводниках мала по сравнению с плотностью токов проводимости, поэтому во втором уравнении, пренебрегая вторым членом, получим

$$\nabla^2 E = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t};$$
$$\nabla^2 H = \frac{4\pi\sigma\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\quad . \tag{3}$$

Для монохроматического поля частоты ω:

$$\nabla^2 E = 2ip^2 E, \tag{4}$$

где

$$p^2 = \frac{2\pi\mu\sigma\omega}{c^2} \quad .$$

В упрощенном случае, когда бесконечный однородный проводник занимает полупространство так, что его поверхность совпадает с плоскостью $z = 0$, электрическое поле, а следовательно, и ток направлены вдоль оси $X : (E_Y = E_Z = 0)$. Пусть E зависит от расстояния рассматриваемой точки проводника от его поверхности, но не зависит от X, Y.

В этом случае из (3) несложно получить уравнение

$$\nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = 2ip^2 E_x \tag{5}$$

общее решение которого:

$$E_x = Ae^{kz} + Be^{-kz}.$$

Для этого уравнения (ниже и для более сложных случаев) мы будем использовать комплексный вектор k, модуль которого будем обозначать p:

$$k = p(1+i) \; .$$

Выберем только затухающее решение:

$$E_x = Be^{-pz} e^{i(\omega t - pz)} \quad . \tag{6}$$

Используя действительную часть данного решения, получим решение в привычном виде:

$$E_x = Be^{-pz} \cos(\omega t - pz). \tag{7}$$

Плотность тока выражается формулой

$$j_x = j_0 e^{-pz} \cos(\omega t - pz). \tag{8}$$

Следовательно, по мере проникновения в глубь проводника фаза электрического вектора изменяется линейно, а амплитуда убывает по экспоненциальному закону. При этом основную часть тока можно считать сосредоточенной в поверхностном слое, величина которого

$$\delta = 1/p \; .$$

На этой глубине плотность тока уже в e раз меньше плотности тока у поверхности проводника. Введенные параметры (δ, k, p) можно использовать для анализа цилиндрических проводников, а выводы качественного поведения электромагнитного поля также полезны для анализа более сложного случая. Отметим, что для сравнения часто используют указанные параметры для немагнитных образцов (когда магнитная проницаемость $\mu = 1$), и в этом случае будем обозначать их – δ_0, k_0, p_0.

В цилиндрическом проводнике, переменный ток также концентрируется на его поверхности тем сильнее, чем больше частота тока. Концентрация тока на поверхности влечет за собой изменение сопротивления и самоиндукции, а следовательно, эти изменения величины зависят от частоты тока. Если весь ток концентрируется в поверхностном слое цилиндрического провода, то сопротивление последнего должно приближаться к сопротивлению цилиндрической поверхности, обладающей стенками соответствующей толщины (порядка δ). По мере увеличения частоты толщина проводящего слоя уменьшается, поэтому сопротивление проводника должно увеличиваться. Так как анализ плоскости для нас интересен только в сравнении с цилиндрическим проводником, то перейдем к этому случаю.

Рассмотрим цилиндрический проводник радиуса $r_0 \equiv r_{ж}$. Введем цилиндрическую систему координат, ось которой совпадает с осью цилиндрического провода. За направление поля E примем направление по оси провода. Напряженность E равна проекции E на ось z по модулю, зависит только от координаты r. В этом случае уравнения типа (3)–(5) записываются в виде

$$\frac{d^2 E}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dE}{dr} - 2ip^2 E = 0. \tag{9}$$

Существует только одно решение (с точностью до произвольного постоянного множителя) уравнения, которое остается конечным на оси провода: это решение носит название функции Бесселя нулевого порядка от аргумента $pr\sqrt{-2i}$:

$$E = const\ J_0\left(pr\sqrt{-2i}\right). \tag{10}$$

Асимптотические выражения имеют вид, если

$$pr_0 << 1, \text{ или } r_0 << \delta,$$

то

$$J_0\left(pr\sqrt{-2i}\right) \cong 1 + \frac{i\left(pr_0\right)^2}{2} - \frac{\left(pr_0\right)^4}{4}\ , \tag{11}$$

и если

$$pr_0 >> 1, \quad \text{или } r_0 >> \delta,$$

то

$$J_0\left(pr\sqrt{-2i}\right) \cong A\frac{e^{pr_0 - i\left(pr_0 - \pi/8\right)}}{\sqrt{2\pi pr_0}}. \tag{12}$$

Амплитуда действительной части плотности тока будет возрастать при удалении от оси тока пропорционально:

$$1 + \frac{\left(pr\right)^4}{16}.$$

В случае больших частот и толстых проводов $pr_0 >> 1$ можно использовать приближенное выражение:

$$E \sim \text{const}\ \frac{e^{pr - i\left(pr - \pi/8\right)}}{\sqrt{r}}. \tag{13}$$

При достаточном удалении от провода это выражение можно экстраполировать в виде (чтобы сравнить этот результат с формулами (6) и (7))

$$E_z \sim Ae^{-p\left(r_0 - r\right)}\cos\left(\omega t + \pi/8 - pr\right). \tag{14}$$

Асимптотическая формула для тока выразится

$$j \approx Ce^{-p\left(r_0 - r\right)}\cos\left(\omega t + \pi/8 - pr\right). \tag{15}$$

Как видно из формулы (15), плотность тока экспоненциально убывает по мере удаления от поверхности проводника в глубь проводника, то есть основная часть тока сосредоточивается в поверхностном слое, что полностью соответствует аналогичной формуле (8).

Для напряженности электрического поля в общем виде

$$E_z = \text{const}\ J_0\left(kr\right)e^{-i\omega t} \tag{16a}$$

(для удобства опять используется комплексный волновой вектор $k = (1 + i)\ p = (1 + i)/\delta$).

Для напряженности магнитного поля, используя уравнение Максвелла (формулы (1), (2)), получаем:

$$\frac{i\omega}{c}H_\varphi = rot_\varphi E = -\frac{\partial E_z}{\partial r}.$$

Так как

$$J_0'\left(x\right) = -J_1\left(x\right),$$

то окончательно для напряженности магнитного поля

$$H_{\varphi} = -i \quad \text{const}\sqrt{\frac{4\pi\sigma \quad i}{\omega}} J_1(kr) e^{-i\omega t}. \tag{16b}$$

Отметим, что одинаковый множитель const входит в электрическое и магнитное поле. На поверхности проводника можно считать, что

$$H = \frac{2I}{cr_0} \quad .$$

В принципе, можно выразить величину данной константы через электрический ток *I*. (Последнее эквивалентно так называемому граничному условию Леонтовича – Щукина и не всегда справедливо для малых частиц.)

Запишем результат для отношения электрического поля к магнитному, которое определяет погонное комплексное сопротивление провода (то есть комплексное сопротивление единицы длины провода):

$$Z = \left(\frac{k}{2\pi\sigma r_0}\right)\frac{J_0(kr_0)}{J_1(kr_0)} = R_{пов.} k \frac{J_0(kr_0)}{J_1(kr_0)} = R_{погонное}\left(\frac{kr_0}{2}\right)\frac{J_0(kr_0)}{J_1(kr_0)} \tag{17}$$

где введено понятие удельного поверхностного либо погонного сопротивления на постоянном токе:

$$R_{пов.} = \frac{1}{2\pi r_0 \sigma} \quad ; \qquad R_{погонное} = \frac{1}{\pi r_0^{\,2} \sigma} \tag{18}$$

Полученная формула (17), вообще говоря, не зависит от граничных условий и имеет достаточно общий характер для микро- и нанопроводов.

Формула (17) (см., например, [6–9]) очень популярна для экспериментальных анализов, но область ее применимости ограничена не учетом магнитного резонанса, который часто имеет место в ферромагнитных материалах. Ниже рассмотрим теорию с учетом ферромагнитного резонанса (ФМР).

Линеаризованные уравнения Ландау и Лившица для аморфного ферромагнетика

Ферромагнитные свойства вещества описываются уравнением Ландау - Лифшица:

$$\frac{dM}{dt} = -\gamma\left[M \times \hat{H}\right], \tag{19}$$

где: γ – гиромагнитное отношение, $\hat{H} = H_{обм} + H_{аниз} + H_{внешн}$; $H_{обм} = \alpha \quad \nabla^2 M$; $H_{аниз}$ – внутреннее поле, которое является полем анизотропии и которое в случае аморфного ферромагнетика пропорционально механическим напряжениям и магнитострикции $H_{внешн}$ – внешнее магнитное поле.

Для линеаризации уравнения рассмотрим намагниченность системы в виде постоянной и маленькой переменной (зависящей от времени) части:

$$M = M_0 + m(t). \tag{20}$$

Будем пренебрегать членами второго порядка малости, считая, что внешнее поле

$$H_{внешн} = H_0 + h(t) \tag{21}$$

также состоит из постоянной и маленькой переменной (зависящей от времени) части.

Представим линеаризованный вариант уравнения (19) в декартовых координатах, полагая:

$$m(t) \approx me^{-i\omega t}, \tag{22}$$

где введен двухкомпонентный вектор $-m(m_x,\ m_y)$.

Тогда уравнение (21) имеет вид

$$\begin{aligned} i\omega \quad m_x &= -\gamma \quad \hat{H} \quad m_y - \gamma \quad M_0 h_y; \\ -i\omega \quad m_y &= \gamma \quad \hat{H} \quad m_x + \gamma \quad M_0 \quad h_y. \end{aligned} \tag{23}$$

.

Уравнения (14) можно диагонализировать, введя координаты с векторами:

$$a_{\pm} = x \pm iy\,. \tag{24}$$

Используя их свойства, получим для вектора намагниченности

$$M_{\pm} = \frac{\omega_M}{\omega_H \pm \omega}\,. \tag{25}$$

Здесь

$$\omega_M = \gamma \quad M_0;\ \omega_H = \gamma \quad \hat{H}\,. \tag{26}$$

Введем резонансную и нерезонансную магнитные проницаемости:

$$\mu_{\pm} \sim \frac{\omega_M}{\omega_H \pm \omega}. \tag{27}$$

Учет релаксационных явлений осуществим заменой ω на $\tilde{\omega} \to \omega - i\gamma,$ где γ отвечает за ширину ферромагнитного резонанса.

Дисперсия цилиндрических волн в аморфном проводе

Начнем с преобразований уравнений Максвелла во вращающейся системе координат. Рассмотрим формулу

$$\nabla \times [\nabla \times H] = \nabla(\nabla \cdot H) - \nabla^2 H\,.$$

Первый член в правой части этой формулы в неподвижной системе равен нулю, однако во вращающейся системе его необходимо учитывать.

Запишем уравнение Максвелла во вращающейся системе координат:

$$B_- = i\mu_0 \quad \frac{\delta_0^2}{4} \quad \left(\nabla^- \nabla^- H_+ - \nabla^+ \nabla^- H_-\right);$$

$$B_+ = i\mu_0 \frac{\delta_0^2}{4}\left(\nabla^+ \nabla^+ H_- - \nabla^+ \nabla^- H_+\right)\quad . \tag{28}$$

Общее решение уравнений представим в виде ряда по собственным функциям оператора ∇^2 в цилиндрической системе координат (выбираем лишь функции, которые не расходятся, при $r \to 0$). Такие функции имеют вид

$$f_n(kr) = e^{in\varphi} J_n(kr)\ , \tag{29}$$

k – константа распространения.

Существует предельный случай перехода к формулам (16a, b), когда:

$$E \sim J_0(k_0 r);$$

$$H \sim J_1(k_0 r)\ . \tag{30}$$

Представим набла оператор в виде

$$\nabla^{\pm} = \frac{\partial}{\partial x} \pm i\frac{\partial}{\partial y}\,.$$

Данный оператор в сферической системе координат

$$\nabla^{\pm} = \frac{\partial}{\partial r} e^{\pm i\varphi} \pm \frac{i}{r} e^{\pm i\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi}\,.$$

Тогда, пользуясь соотношениями для функций Бесселя: $\rho \quad J_n'(\rho) = -n \quad J_n(\rho) + \rho \quad J_{n-1}(\rho)$,

$$\rho \quad J_n'(\rho) = n \quad J_n(\rho) - \rho \quad J_{n+1}(\rho),$$

получаем

$$\nabla^{\pm} f_n(kr) = \pm n f_{n\pm1}(kr)\,. \tag{31}$$

Введенные набла операторы являются аналогами операторов рождения и уничтожения.

Пользуясь свойствами функций (их ортогональностью), представим разложение H, B в ряд по собственным функциям, где значение параметра волнового вектора K еще не определено (он здесь представлен, как неопределенный параметр задачи), а n изменяется от 1 до бесконечности.

$$H_{\pm} = \sum_n H_n^{\pm}\ f_{n\pm1}(kr); \quad B_{\pm} = \sum_n B_n^{\pm}\ f_{n\pm1}(kr).$$

Для амплитуды разложения получим (введя пока еще не определенный безразмерный волновой вектор K)

$$B_{n\pm} = iK^2\left(H_n^+ + H_n^-\right); \quad B_{n\pm} = \mu_\pm \cdot H_n^\pm; \quad K^2 = \mu_0 \delta_0^2 \frac{k^2}{4}. \tag{32}$$

Для однородной системы имеет место нетривиальное решение лишь в случае, если определитель системы равен нулю. Получаем уравнение на определение параметра K:

$$\begin{vmatrix} iK^2 + \mu_+ & iK^2 \\ iK^2 & iK^2 + \mu_- \end{vmatrix} = 0. \tag{33}$$

Отсюда:

$$\mu_-\mu_+ + iK^2\left(\mu_+ + \mu_-\right) = 0 \ . \tag{34}$$

Уравнение дисперсии относительно параметра K, если его расшифровать, представляет собой бикубическое уравнение. Следовательно, оно описывает три вида дисперсии. Это дисперсия основных, спиновых и поверхностных волн (спиновые и поверхностные волны ниже обсуждаться не будут).

Если характерные размеры объекта меньше длины волны, то (соответственно условию Леонтовича - Щукина) можно ввести понятие импеданса $Z(\omega)$, который характеризует соотношение между модами E и H, на границе проводника в виде

$$E_\omega = Z(\omega)\cdot H_\omega . \tag{35}$$

Для нахождения $Z(\omega)$ пишутся известные граничные условия, которые в нашем случае выражаются в виде условий непрерывности H_φ и E_z на границе проводника (необходимо перейти в цилиндрическую систему координат). Из-за громоздкости этих соотношений, приводить их здесь не будем.

Так как каждая из n-мод в линейном приближении независима, то:

$$Z = \sum_n Z_n . \tag{36}$$

Для каждой волны

$$K_j \ \ (j = 1,2,3); \ E_n = \sum_j A_j b_j \ ; Z_n H_n = \sum_j B_j b_j \ .$$

Отметим, что E_n и H_n связаны уравнением Максвелла и внешнее поле $E_n = H_n$. Для полноты задачи необходимо задать вектор $B_{n,r}$ (или $M_{n,r}$) на границе, учитывая поверхностный магнетизм: $\dfrac{\partial M_r^\pm}{\partial r} - K' M_r^\pm = 0 \ ; K' = \dfrac{K_S}{A}$, K_S – анизотропия поверхностного магнетизма (A – обменное взаимодействие).

Получим решение для Z_n:

$$Z_n = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} H_n & B_j & . & . \\ 0 & A_j & . & . \\ 0 & X_j & . & . \\ 0 & Y_j & . & . \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} H_n & 0 & 0 & 0 \\ A_j & B_j & . & . \\ . & X_j & . & . \\ . & Y_j & . & . \end{vmatrix}.$$

Поэтому $$Z_n = \frac{\begin{vmatrix} B_j & . & . \\ X_j & . & . \\ Y_j & . & . \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_j & . & . \\ X_j & . & . \\ Y_j & . & . \end{vmatrix}}.$$

Коэффициенты $A, B... \; X, Y$ имеют вид:

$$A_{jn} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu_{-j}} J_{n-1}\left(k_j r\right) - \frac{1}{\mu_{+j}} J_{n+1}\left(k_j r\right)\right];$$

$$B_{jn} = \rho \frac{k_j}{\mu_{эфф.j}} J_n\left(k_j r\right);$$

$$X_j^n = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_{-j}}\right) C_{jn};$$

$$Y_j^n = \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu_{+j}}\right) C_{jn};$$

$$C_{jn} = k_j J'_{n-1}\left(k_j r\right) - K' J_{n-1}\left(k_j r\right).$$

Если пренебречь всеми модами j, кроме основного однородного резонанса, то

$$Z_n \sim \rho \quad k_4 \frac{J_{n-1}\left(k_4 r\right)}{J_n\left(k_4 r\right)}.$$

В случае, когда скин-слой много меньше радиуса, можно получить известную формулу для плоскости, когда:

$$Z \sim \rho k;$$

где

$$k \approx \mu^{\frac{1}{2}}.$$

Именно в этом приближении производились основные исследования ФМР в стандартных радиоспектроскопах.

Влияние на резонанс спиновых и поверхностных волн рассмотрим в другом сообщении.

Выводы

1. Рассмотрена теория скин-эффекта на примере ферромагнитного материала при учете ферромагнитного резонанса в случае цилиндрических образцов.

2. Получена теоретическая зависимость волнового сопротивления микро- и нанопровода от его магнитной проницаемости, частоты электромагнитного поля, проводимости и радиуса провода.

3. Полученный результат позволяет анализировать эксперименты по изучению высокочастотных свойств ферромагнитных микро- и нанопроводов, что представляет очень важную проблему в свете изучения магнитных свойств метаматериалов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баранов С.А., Зотов С.К., Ларин В.С., Торкунов А.В.* Особенности естественного ферромагнитного резонанса в аморфном микропроводе // ФММ. 1991. Т.69. В. 12. С. 172–173.
2. *Баранов С.А., Бержанский В.Н., Зотов С.К. и др.* Ферромагнитный резонанс в аморфных магнитных проводах // ФММ. 1989. Т.67. В. 1. С. 73–78.

3. *Баранов С.А., Стоянов С.С.*, Исследование микропровода методом ферромагнитного резонанса // Электронная обработка материалов. 2006. № 3. С.191–195.
4. *Baranov S. A., Colpacovithi I., Kleimenov V., Bugakov V., Usenco V.* Composite on the basis of microwire with negative value of permeability in microwave range of frequencies // Moldavian Journal of the Physical Sciences. 2003. V.2. No 2. P. 174–176.
5. *Баранов С.А., Усенко В.П.* Композит из микропровода с отрицательной рефракцией // Электронная обработка материалов. 2003. № 5. С. 89–90.
6. *Kraus L.* Theory of ferromagnetic resonances in thin wires // Czechoslovak journal of physics. 1982. V. B 32. P.1264–1282.
7. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1957. С. 253.
8. *Zuberek R., Szymezak H., Gutowski M., Zhukov A., Zhukova V., Usov N.A., Garcia K., Vazquez M.* // JMMM. 2007. V. **316** . P. 890–894.
9. *Reynet O., Adenot A.-L., Deprot S., Acher O.* Effect of the magnetic properties of the inclusions on the high-frequency dielectric response // Phys. Rev. 2002. V. **B 66** , 094412–094420.

Поступила 03.08.09

Summary

The theory of skin-effect on an example of an amorphous ferromagnetic material is presented at the account of a ferromagnetic resonance. Theoretical dependence of impedance of a microwire is received from its magnetic permeability. The received result allows analyzing experiments on studying high-frequency properties of an amorphous microwire.