Об акустическом излучении заряженного пузырька, колеблющегося в диэлектрической жидкости

Н. Ю. Колбнева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
г. Ярославль,150003, Россия, e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.02.2026
После доработки 13.07.2026
Принята к публикации 30.09.2026

В аналитических асимптотических расчетах первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций рассчитана интенсивность акустического излучения, как одиночного парогазового пузырька, так и пузырьковых скоплений в конечном объеме сжимаемой жидкости с учетом двух законов распределения пузырьков по размерам (радиусам): Гаусса и Рэлея. Установлено, что мелкие микронные пузырьки при осцилляциях излучают акустические волны в ультразвуковом диапазоне частот, а крупные микронные – миллиметровые пузырьки – в слышимом звуковом диапазоне частот с меньшей интенсивностью излучения. Наличие электрического заряда у осциллирующего пузырька фиксированного радиуса позволяет понизить частоту излучения до слышимой (при увеличении заряда) и увеличить интенсивность акустического излучения на шесть порядков величины (при уменьшении заряда). Показано, что в случае рэлеевского закона, описывающего спектр размеров пузырьков, интегральная интенсивность излучения группы осциллирующих пузырьков на порядок выше по сравнению с нормальным (гауссовским) законом.

Ключевые слова: парогазовый микропузырек, электрический заряд, сжимаемая жидкость, акустическое излучение, спектр размеров пузырьков

УДК 534-141
https://doi.org/10.52577/eom.2026.62.5.24

ВВЕДЕНИЕ

Микропузырьковые системы в жидкости играют важную роль в решении различных технических и технологических проблем: акустической и гидродинамической кавитации для очистки твердых поверхностей от загрязнений [1], в пищевой промышленности для обработки жидких пищевых сред [2]; электрофлотации при удалении нефтепродуктов со дна водоемов [3]; сонолюминесценции в спектроскопии для идентификации основных веществ в растворах [4]; барботажа в системах охлаждения силовых трансформаторов [5], дистилляции мисцеллы [6]. Кроме того, отметим всё более возрастающий вклад (как положительный, так и отрицательный) пузырьковых систем в медицине [7].

В частности, в ряде теоретических [8, 9] и экспериментальных работ [10, 11] показано, что колеблющиеся в воде воздушные пузырьки являются источниками широкополосного акустического излучения. Такие исследования находят практическое применение в проведении неинвазивной терапии, в осуществлении адресной доставки лекарств в клетки организма [7], а также в гидро-акустическом мониторинге океана [12].

Прежде всего отметим, что проблема эволюции капиллярных колебаний одиночного пузырька в жидкости восходит к классической работе Рэлея [13]. В ней рассматривалась сфера переменного радиуса. Однако хорошо известно, что капиллярные колебания стенки пузырька разделяются на радиальные пульсации, связанные с изменением объема (радиуса) пузырька, и поверхностные осцилляции постоянного равновесного радиуса из-за теплового движения молекул внутренней и внешней сред пузырька [14]. Примечательно, что возможным механизмом объемных пульсаций парогазового пузырька является изменение его внешнего и внутреннего давления, обусловленное испарением и конденсацией пара окружающей жидкости, выделением внутрь пузырька растворенного в жидкости газа [12]. Из общефизических соображений ясно, что колебания стенки пузырька вызывают возмущение давления окружающей сжимаемой жидкости, создающее продольную акустическую волну.

Впрочем, большинство существующих исследований направлены на изучение характеристик акустического излучения пузырьков, совершающих объемные пульсации в жидкости. Вместе с тем в [8] показано, что монопольное излучение, вызванное радиальными пульсациями (возбуждением нулевой моды), превалирует над

излучением дипольного типа при смещении центра пузырька относительно окружающей жидкости (возбуждении первой моды). Так, ещё в [15] предполагалось, что поверхностные осцилляции, обусловленные изменением формы пузырька (начиная со второй моды), не оказывают заметного влияния на создаваемое ими в жидкости звуковое давление. Тем не менее численная оценка акустического излучения от одиночного заряженного парогазового пузырька, осциллирующего в диэлектрической жидкости, нуждается в дополнительной проверке. Очевидно, полученные результаты позволят выявить пробелы в имеющихся представлениях.

В настоящей работе в основу расчета интенсивности акустического излучения положены модель идеального газа и закон сохранения энергии, впервые предложенный в [16] для оценки интенсивности электромагнитного излучения осциллирующей заряженной капли в приближении идеальной жидкости. В линейном анализе из решения дисперсионного уравнения частота осцилляций оказалась комплексной: реальная ее часть отвечает за собственную частоту осцилляций, а мнимая компонента – за декремент затухания, невозможный в идеальной среде. В таком случае убыль механической энергии капиллярных осцилляций капли (пузырька) идет на электромагнитное излучение в случае ускоренного движения электрических зарядов или на акустическое излучение при наличии внешней сжимаемой среды.

Кроме того, развитию идей [16] послужило, прежде всего, указание в работе [17] на расчетную ошибку: в [16] применена неверная асимптотика сферических функций Ханкеля (каждую из которых также называют сферической функцией Бесселя 3-го рода) в ближней зоне электромагнитного поля, что привело к завышенным оценкам характеристик электромагнитного излучения: невязкого декремента затухания и мощности излучения.

ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется неподвижный заряженный сферический пузырек радиуса R, плотностью ρ_1 и зарядом Q, находящийся в безграничной идеальной сжимаемой диэлектрической жидкости, характеризующейся плотностью ρ_2 и диэлектрической проницаемостью ε_{ex}. Пусть σ – коэффициент поверхностного натяжения границы раздела жидкость–газ. Будем считать, что пузырек содержит идеальный газ и насыщенный пар окружающей жидкости. Для качественного рассмотрения задачи положим внутреннюю среду пузырька несжимаемой. Такое допущение справедливо, когда скорость радиально-симметричных пульсаций существенно превосходит скорость звука в парогазовой смеси, заполняющей пузырек. В данных условиях давление насыщенного пара P_V примем постоянным. Учтем, что температура внутри пузырька неизменна и равна температуре окружающей жидкости.

Отметим, что возникновение нескомпенсированного электрического заряда пузырька, как правило, обусловливается двумя механизмами: оседанием на его стенки ионов газа и поступлением на его стенки ионов окружающей жидкости [18].

Первый процесс, как правило, связан с электрическим разрядом в газе при высокой температуре (или при воздействии ультрафиолетового или рентгеновского излучения), обеспечивающим образование полости, заполненной плазмой. Если скорость диффузии носителей электрического заряда (ионов обоих знаков) существенно превосходит скорость их рекомбинации, то часть зарядов осядет на стенки пузырька.

Второй процесс имеет место при пробое диэлектрической жидкости, сопровождающемся электроразрядом в парогазовых микропузырьках, увеличивающихся в размерах. Такие пузырьки возникают как вблизи электродов до приложения электрического поля, так и при протекании тока за счет процессов гидродинамической кавитации, электролиза, вскипания. Таким образом, в результате разряда с катода происходит эмиссия электронов в жидкость, а разряда с анода – ионизация молекул жидкости. В этом случае пузырек заряжается путем поступления на его стенки образовавшихся в жидкости носителей заряда.

Рассмотрение задачи проведем в сферической системе координат (r, θ, φ), начало которой совместим с центром масс пузырька. Для упрощения последующих математических выкладок пренебрежем зависимостью всех физических величин от азимутальной координаты φ, то есть рассмотрим осесимметричный случай.

Движение газа в пузырьке и движение внешней жидкости положим потенциальными, выражая поле скоростей $\vec{V}_j(r,\theta,t)$ через градиент гидродинамических потенциалов $\psi_j(r,\theta,t)$ [19]:

$$\vec{V}_j(r,\theta,t) = \nabla\psi_j(r,\theta,t),\ (j = 1, 2), \qquad (1)$$

где величины с нижним индексом $j = 1$ относятся к газу, а с $j = 2$ – к жидкости.

Искажение равновесной сферической формы ε(θ, t), вызванное тепловым движением, будем считать малым вместе с величинами $\vec{V}_j(r,\theta,t)$, $\psi_j(r,\theta,t)$.

Уравнение поверхности пузырька, совершающего осесимметричные осцилляции, в любой момент времени t представим в виде:

$$r(\theta,t) = R + \xi(\theta,t),$$

где амплитуда поверхностных осцилляций много меньше равновесного радиуса: $\max|\xi|/R \ll 1$.

Электрическое поле, возникающее в окрестности возмущенной заряженной стенки пузырька, изменяется во времени со скоростью, существенно меньшей скорости распространения электромагнитных волн. Сказанное позволяет считать электрическое поле квазистационарным с электрическим потенциалом Φ(r, θ, t), связанным с напряженностью поля $\vec{E}(r,\theta,t)$ соотношением:

$$\vec{E}(r,\theta,t) = -\nabla\Phi(r,\theta,t). \qquad (2)$$

Потенциал на возмущенной поверхности обозначим Φ_S.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая формулировка задачи о поверхностных осцилляциях заряженного парогазового пузыря, излучающего акустические волны в сжимаемой жидкости, состоит из уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial\vec{V}_j(r,\theta,t)}{\partial t} + \left(\vec{V}_j(r,\theta,t),\nabla\right)\times \vec{V}_j(r,\theta,t) = -\frac{1}{\rho_j}\nabla P_j(r,\theta,t), \quad (j = 1, 2) \qquad (3)$$

уравнений непрерывности:

$$\operatorname{div}\vec{V}_1(r,\theta,t) = 0,$$
$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t} + \operatorname{div}\rho_2\vec{V}_2(r,\theta,t) = 0 \qquad (4)$$

уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{E}(r,\theta,t) = 0,\ \operatorname{div}\vec{E}(r,\theta,t) = 0. \qquad (5)$$

В свою очередь при использовании выражения (1), описывающего модель потенциального течения, из (4) несложно прийти к уравнению Лапласа для потенциала ψ_1:

$$\Delta\psi_1(r,\theta,t) = 0 \qquad (6)$$

и волновому уравнению для потенциала ψ_2:

$$\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi_2(r,\theta,t)}{\partial t^2} - \Delta\psi_2(r,\theta,t) = 0. \qquad (7)$$

Из уравнения (3) с учетом (1) найдем соотношения для давления газа в пузыре:

$$P_1 = P_{01} - \rho_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_1(\nabla\psi_1)^2 \qquad (8)$$

и давления в жидкости в окрестности пузыря:

$$P_2 = P_{02} - \rho_2\frac{\partial\psi_2}{\partial t} - \frac{1}{2}\rho_2\times \times(\nabla\psi_2)^2 + \frac{\rho_2}{2\upsilon^2}\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2. \qquad (9)$$

Используя условие (2) потенциальности электрического поля, получим, что первое из уравнений системы (5) удовлетворяется тождественно, а второе уравнение сводится к уравнению Лапласа для электрического потенциала Φ(r, θ, t):

$$\Delta\Phi(r,\theta,t) = 0. \qquad (10)$$

Введем условия ограниченности поля скоростей движения газа $\psi_1(r, \theta, t)$ в центре масс пузыря и потенциала электрического поля Φ(r, θ, t) на бесконечном удалении от стенки пузыря:

$$r \to 0:\ \psi_1(r,\theta,t) \to 0,$$
$$r \to \infty:\ \Phi(r,\theta,t) \to 0, \qquad (11)$$

а также условие излучения Зоммерфельда для гармоник потенциала $\psi_2(r,\theta,t)$ (явный вид $\psi_{2n}(r,\theta,t)$ представлен в формуле (33) ниже):

$$r \to \infty:$$
$$\frac{\partial\psi_{2n}(r,\theta,t)}{\partial r} + ik_n\psi_{2n}(r,\theta,t) = o\left(\frac{1}{r}\right), \qquad (12)$$

что соответствует расходящейся сферической волне, убывающей при $r \to \infty$.

Потребуем выполнения граничных условий на межфазной границе раздела сред

$$F(r,\theta,t) \equiv r - R - \xi(\theta,t) = 0:$$

кинематического:

$$\frac{\partial F(r,\theta,t)}{\partial t} + \left(\vec{V}_j(r,\theta,t),\nabla F(r,\theta,t)\right) = 0, \quad (j = 1, 2) \qquad (13)$$

динамического для нормальной компоненты тензора напряжений:

$$P_V + P_1(r,\theta,t) - P_2(r,\theta,t) + P_Q(r,\theta,t) - P_\sigma(r,\theta,t) = 0 \qquad (14)$$

$$P_Q(r,\theta,t)=\frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi}\left(\nabla\Phi(r,\theta,t)\right)^2,$$

$$P_\sigma(r,\theta,t)=\sigma\operatorname{div}\vec{n}(r,\theta,t)$$

постоянства поверхностного электрического потенциала по координатам r и θ:

$$\Phi(r,\theta,t)=\Phi_s(t). \qquad (15)$$

Дополним выписанную систему уравнений требованиями неизменности полного объема пузыря, отсутствия движения его центра масс при капиллярных осцилляциях и постоянства поверхностного заряда:

$$\int_V r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$\int_V \vec{r}\,r^2 dr\sin\theta d\theta d\varphi=0, \qquad (16)$$

$$V=[0\le r\le R+\xi(\theta,t),\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi],$$

$$-\frac{\varepsilon_{ex}}{4\pi}\oint_S\left(\vec{n},\nabla\Phi\right)dS=Q,$$

$$S=[r=R+\xi(\theta,t),\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi]. \qquad (17)$$

В уравнениях (8), (9), (12), (14), (17) используются следующие обозначения: i – мнимая единица; o и O (см. (12), а также (A1) ниже) – символы Ландау, широко используемые при сравнении и асимптотическом анализе функций по порядкам малости [20]; $k_n=\operatorname{Re}\omega_n/\upsilon$ – волновое число; ω_n – комплексная частота; n – номер колебательной моды, то есть число выпуклостей (впадин) на возмущенной поверхности; υ – скорость распространения звука в жидкости; P_{01} – постоянное давление газа в пузыре; P_{02} – постоянное давление в жидкости в окрестности пузыря; P_Q – давление электрического поля, создаваемого зарядом пузыря; P_σ – давление сил поверхностного натяжения под искаженной волновым движением сферической поверхностью; $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к границе раздела жидкость–газ, вычисляемый по общей формуле $\vec{n}(r,\theta,t)=\nabla F$ при $F(r,\theta,t)=0$, используя которую несложно рассчитать:

$$\vec{n}=\vec{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial\theta}\vec{e}_\theta. \qquad (18)$$

Будем считать, что комплексная частота n-моды капиллярных осцилляций представляется в общем виде: $\omega_n=\operatorname{Re}\omega_n+i\operatorname{Im}\omega_n$, где вещественная часть $\operatorname{Re}\omega_n$ отвечает за собственную частоту осцилляций, а мнимая часть $Im\omega_n$ – за невязкий декремент затухания на акустическое излучение.

Далее будем решать сформулированную задачу в рамках теории возмущений [20] методом прямого разложения по малому параметру ε, равному отношению амплитуды капиллярных осцилляций пузыря к его радиусу: $\varepsilon\equiv|\xi|/R<<1\theta$, ограничиваясь первым порядком малости. Подчеркнем, что волновое возмущение $\xi(\theta,\ t)$ и потенциалы поля скоростей движения газовой $\psi_1(r,\theta,t)$ и жидкой сред $\psi_2(r,\theta,t)$ являются величинами первого порядка малости по ε, а давление насыщенного пара P_V в пузыре – нулевого порядка по ε. В итоге выпишем искомые величины в виде разложений по ε:

$$\xi(\theta,t)=\xi^{(1)}(\theta,t)+O(\varepsilon^2),$$

$$\psi_j(r,\theta,t)=\psi_j^{(1)}(r,\theta,t)+O(\varepsilon^2),\ (j=1,2),$$

$$\Phi(r,\theta,t)=\Phi^{(0)}(r,\theta)+\Phi^{(1)}(r,\theta,t)+O(\varepsilon^2),$$

$$P_j(r,\theta,t)=P_j^{(0)}(r,\theta,t)+P_j^{(1)}(r,\theta,t)+O(\varepsilon^2),$$

$$P_Q(r,\theta,t)=P_Q^{(0)}(r,\theta)+P_Q^{(1)}(r,\theta,t)+O(\varepsilon^2),$$

$$P_\sigma(r,\theta,t)=P_\sigma^{(0)}(r,\theta)+P_\sigma^{(1)}(r,\theta,t)+O(\varepsilon^2). \qquad (A1)$$

Заметим, что записанные выше функции представляют собой суперпозицию слагаемых: главных членов, относящихся к равновесной поверхности (нулевого порядка малости), поправок, связанных с деформацией границы раздела сред (первого порядка малости), и поправок второго порядка малости, которыми в данной работе пренебрегаем. Верхний индекс в круглых скобках указывает на порядок малости соответствующей величины по ε.

Подставляя эти разложения в систему электрогидродинамических уравнений (6), (7), (11)–(17), выделим краевые задачи нулевого и первого порядков.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ВНУЛЕВОМ ПОРЯДКЕМАЛОСТИ

Задача в нулевом приближении по безразмерной амплитуде осцилляций ε выписывается в виде:

$$\Delta\Phi^{(0)}=0,$$

$$r\to\infty:\ \Phi^{(0)}\to 0,$$

$$r=R:$$

$$P_V+P_1^{(0)}-P_2^{(0)}+P_Q^{(0)}-P_\sigma^{(0)}=0,\ \Phi^{(0)}=\Phi_s^{(0)},$$

$$P_j^{(0)}=P_{0j},(j=1,2),\ P_Q^{(0)}=\frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi}\left(\nabla\Phi^{(0)}\right)^2,$$

$$P_\sigma^{(0)}=\sigma\operatorname{div}\vec{n}_0,$$

$$\int_V r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$\int_V \vec{r} \times r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = 0,$$

$$V = [0 \le r \le R,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi],$$

$$-\frac{\varepsilon_{ex}}{4\pi}\oint_S \left(\vec{n}_0, \nabla\Phi^{(0)}\right) dS = Q,$$

$$S = [r = R,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi].$$

Из решения этой задачи легко найти электрический потенциал при отсутствии возмущения равновесной сферической формы:

$$\Phi^{(0)} = \frac{Q}{\varepsilon_{ex} r} \tag{19}$$

и перепад постоянных давлений внутри и вне пузыря:

$$P_V + \Delta P = \frac{2\sigma}{R} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_{ex} R^4}..$$

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ПЕРВОМ ПОРЯДКЕ МАЛОСТИ. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Учитывая решения (18), (19), в первом порядке по малому параметру ε имеем задачу:

$$\Delta\psi_1(r,\theta,t) = 0,$$

$$\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\psi_2(r,\theta,t)}{\partial t^2} - \Delta\psi_2(r,\theta,t) = 0, \tag{20}$$

$$\Delta\Phi^{(1)}(r,\theta,t) = 0 \tag{21}$$

с граничными условиями:

$$r \to 0:\ \psi_1 \to 0,\quad r \to \infty:$$

$$\frac{\partial\psi_{2n}}{\partial r} + ik_n\psi_{2n} = o\left(\frac{1}{r}\right),\ \Phi^{(1)} \to 0, \tag{22}$$

$$r = R:\ \frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial t} = \frac{\partial\psi_j(r,\theta,t)}{\partial r},\ (j = 1, 2), \tag{23}$$

$$P_1^{(1)} - P_2^{(1)} + P_Q^{(1)} - P_\sigma^{(1)} = 0, \tag{24}$$

$$\Phi^{(1)} - \frac{Q}{\varepsilon_{ex} R^2}\xi(\theta,t) = \Phi_s^{(1)} \tag{25}$$

и естественными дополнительными условиями:

$$\int_0^\pi \xi(\theta,t)\sin\theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^\pi \xi(\theta,t)\cos\theta\sin\theta d\theta = 0, \tag{26}$$

$$\int_0^\pi \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}\sin\theta d\theta = 0. \tag{27}$$

Для входящих в динамическое граничное условие (24) поправок к давлениям $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$, $P_Q^{(1)}$, $P_\sigma^{(1)}$, вызванных волновой деформацией сферической поверхности, запишем:

$$r = R:\ P_j^{(1)} = -\rho_j\frac{\partial\psi_j}{\partial t},\ (j = 1, 2); \tag{28}$$

$$P_Q^{(1)} = -\frac{Q}{4\pi R^2}\left(\frac{2Q}{\varepsilon_{ex} R^3}\xi(\theta,t) + \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}\right), \tag{29}$$

$$P_\sigma^{(1)} = -\frac{\sigma}{R}\left[\left(2 + \hat{L}\right)\frac{\xi(\theta,t)}{R}\right],$$

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right), \tag{30}$$

где $\hat{L}$ – угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Решение системы уравнений (20)–(27) начнем с того, что зависимость от времени искомых величин $\xi(\theta,t)$, $\psi_1(r,\theta,t)$, $\psi_2(r,\theta,t)$, описывающих малые отклонения от равновесного состояния, положим гармонической $cos(\omega_n t)$, а для упрощения промежуточных математических выкладок будем пользоваться комплексным представлением: $\sim \exp(i\omega_n t)$.

Очевидно, что возмущение равновесной сферической формы $\xi(\theta,t)$, связанное с поверхностными осцилляциями, представим в виде суперпозиции стоячих капиллярных волн, характеризующихся осевой симметрией:

$$\xi(\theta,t) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu),\ \mu \equiv \cos\theta,$$

$$M_n = \varepsilon R h_{0n},\ \sum_{n=2}^{\infty} h_{0n} \le 1, \tag{31}$$

где набор безразмерных величин h_{0n} ($0 \le h_{0n} \le 1$) характеризует профиль распределения начального возмущения ($t = 0$) по спектру возбуждаемых мод поверхностных осцилляций ($n \ge 2$).

Из (31) видно, что в силу дополнительных условий (26) в линейном приближении по ε спектр капиллярных осцилляций снизу ограничен основной (второй) модой ($n = 2$), физически интерпретируемой вытягиванием пузыря в сфероид. Следует подчеркнуть, что для несжимаемого пузыря (неподвижного и

сохраняющего объем, согласно условиям (16)) возбуждение центрально-симметричной (нулевой) моды ($n = 0$) из-за изменения объема и трансляционной (первой) моды ($n = 1$) из-за движения центра масс обнаруживается лишь в нелинейном анализе и носит компенсационный характер [14]. При этом появление трансляционной моды во втором порядке малости по ε объясняется присутствием двух колебательных мод с последовательно возрастающими номерами в спектре изначально возбужденных колебательных мод [14].

Решение уравнения Лапласа (20), удовлетворяющее условию ограниченности (22), может быть построено в виде разложения по осесимметричным полиномам Лежандра:

$$\psi_1(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t) r^n P_n(\mu). \quad (32)$$

Принимая во внимание экспоненциальную временную зависимость гармоник $\psi_{2n}(r,\theta,t)$, составляющих потенциал поля скоростей течения жидкости $\psi_2(r,\theta,t)$, в виде $\sim \exp(i\omega_n t)$, волновое уравнение (20) легко сводится к системе уравнений Гельмгольца для гармоник:

$$\Delta\psi_{2n}(r,\theta,t) + k_n^2 \psi_{2n}(r,\theta,t) = 0,$$

так что решение (20) при выполнении условия излучения Зоммерфельда (22) получим в общем виде разложения по гармоникам $\psi_{2n}(r,\theta,t)$:

$$\psi_2(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \exp(i\omega_n t) h_n^{(2)}(k_n r) P_n(\mu), \quad (33)$$

где $h_n^{(2)}(k_n r)$ – сферическая функция Ханкеля 2-го рода [21].

Заметим, что в выражениях (31)–(33) амплитуды M_n, A_n, B_n являются малыми величинами первого порядка по ε.

Чтобы найти связь постоянных коэффициентов A_n, B_n в (32), (33) с амплитудами волнового возмущения M_n в (31), воспользуемся кинематическим граничным условием (23). Отметим также, что далее, как и в (31), по указанным выше причинам суммирование можно вести, начиная с $n = 2$. В результате соотношения для гидродинамических потенциалов $\psi_1(r,\theta,t)$, $\psi_2(r,\theta,t)$ примут вид:

$$\psi_1(r,\theta,t) = R\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{i\omega_n}{n} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu),$$

$$\psi_2(r,\theta,t) = \sum_{n=2}^{\infty} i\omega_n M_n \exp(i\omega_n t) \frac{h_n^{(2)}(k_n r)}{\partial_r\left(h_n^{(2)}(k_n r)\right)\Big|_{r=R}} P_n(\mu).$$

Наконец, подстановка этих решений в формулу (28) позволяет выписать линейные по ε малые поправки к давлению внутри и вне пузыря $P_1^{(1)}$, $P_2^{(1)}$ на границе раздела сред:

$$P_1^{(1)} = \rho_1 R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega_n^2}{n} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu), \quad (34)$$

$$P_2^{(1)} = \rho_2 \sum_{n=2}^{\infty} \omega_n^2 M_n \exp(i\omega_n t) \frac{h_n^{(2)}(k_n r)}{\partial_r\left(h_n^{(2)}(k_n r)\right)\Big|_{r=R}} P_n(\mu). \quad (35)$$

Для отыскания добавки к капиллярному давлению $P_\sigma^{(1)}$, связанной с возмущением стенки пузыря, воспользуемся (30), (31). В результате имеем окончательное выражение:

$$P_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2) M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu). \quad (36)$$

Из решения уравнения Лапласа (21) при использовании условия ограниченности (22) придем к выражению для малой поправки к электрическому потенциалу $\Phi^{(1)}$, представленному в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$\Phi^{(1)}(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n r^{-(n+1)} P_n(\mu).$$

Здесь неизвестные коэффициенты F_n имеют первый порядок малости по амплитуде осцилляций ε.

Подставим теперь это разложение в граничное условие (25) и интегральное условие сохранения заряда (27), из которых выразим амплитуды F_n через амплитуды M_n искажений границы раздела сред. В связи с этим получим электрический потенциал в явном виде:

$$\Phi^{(1)}(r,\theta,t) = \frac{Q}{\varepsilon_{ex} R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu). \quad (37)$$

Поправку же к давлению электрического поля на стенку пузыря в принятом приближении можно найти на основе соотношений (29), (31), (37) в виде:

$$P_Q^{(1)} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_{ex} R^5} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu). \quad (38)$$

Таким образом, используя решения (34)–(36), (38), из баланса давлений (24) с учетом ортогональности полиномов Лежандра и их линейной независимости [21] выпишем квадратичное дисперсионное уравнение относительно комплексной частоты осцилляций ω_n:

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho_1 R^3} n(n-1)(n+2) \times \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} n H_0(k_n R)\right)^{-1} \left(1 - \frac{W}{(n+2)}\right), \quad (n \geq 2), \quad (39)$$

$$W=\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_{ex}\sigma R^3},$$

$$H_0\left(k_nR\right)\equiv\frac{h_n^{(2)}\left(k_nR\right)}{R\times\partial_r\left(h_n^{(2)}\left(k_nr\right)\right)\Big|_{r=R}},$$

где W – зарядовый параметр Рэлея, характеризующий электростатическую устойчивость осцилляций пузыря (капли) по отношению к собственному заряду [22]. В частности, устойчивость n-й возбужденной колебательной моды реализуется при $W<\left(n+2\right)$.

Вообще говоря, критерий неустойчивости заряженного парогазового пузыря в жидкости, совершающего как радиальные пульсации, так и колебания его формы в окрестности сферы без изменения объема, выписывается в виде $W/4+\beta\geq1$, где $\beta\equiv\left(P_V+P_{01}-P_{02}\right)R/2\sigma$ [23]. Иначе говоря, сферический пузырь теряет устойчивость, когда сумма давлений внутри пузыря (с учетом внешнего давления жидкости) и электрического поля превышает давление капиллярных сил. Следовательно, потеря устойчивости пузыря, в отличие от капли несжимаемой жидкости, сопровождается двумя процессами: увеличением объема пузыря до выполнения условия баланса давлений на его стенках и развитием рэлеевской неустойчивости.

Обратим внимание, что при рассмотрении как осесимметричных, так и неосесимметричных деформаций стенки пузыря в сферической системе координат полученное уравнение (39) оказывается вырожденным по азимутальному числу m. Такое положение складывается потому, что в случае неосесимметричных осцилляций зависимость искомых функций ξ, ψ_1, ψ_2, $\Phi^{(1)}$ от параметра m определяется лишь через нормированные сферические функции $Y_n^m(\theta,\varphi)$ [21]. Тем не менее при выводе дисперсионного уравнения использование свойства ортонормированности функций $Y_n^m(\theta,\varphi)$ избавляет от суммирования по индексам n, m и позволяет прийти к алгебраическому уравнению, не зависящему от m. Впрочем, неосесимметричная постановка настоящей задачи приведет лишь к усложнению математических расчетов, однако не отразится на общности рассуждений. Примечательно, что в дисперсионное уравнение, выведенное для колеблющейся струи в цилиндрической системе координат, уже входит азимутальное число m [24]. В такой задаче, в отличие от осциллирующего пузыря, все неизвестные величины раскладываются в ряды по модифицированным функциям Бесселя.

Далее остановимся подробнее на решении дисперсионного уравнения (39). Заметим, что в (39) входит сферическая функция Бесселя $h_n^{(2)}\left(k_nr\right)$ при целых значениях нижнего индекса n, имеющего смысл номера возбужденной колебательной моды. Согласно справочникам (см. [21], стр. 257, формула 10.1.17 и [25], стр. 981, формула 8.466), запишем $h_n^{(2)}\left(k_nr\right)$ в виде степенного ряда:

$$h_n^{(2)}\left(k_nr\right)=\frac{1}{k_nr}\exp\left(-ik_nr\right)\times\\ \times\sum_{m=0}^{n}i^{m+1}\frac{\left(2n-m\right)!}{\left(n-m\right)!m!}\frac{1}{\left(2k_nr\right)^{n-m}}. \quad (40)$$

Отметим, что в [17] впервые указано на корректное асимптотическое представление сферической функции Ханкеля 2-го рода (сферической функции Бесселя 3-го рода), а именно связанное с учетом всех членов степенного ряда (40), а не только старших его слагаемых, как это было в [16]. Таким образом, следуя методике [17], для функции $H_0\left(k_nR\right)$ при малых значениях аргумента $k_nR<<1$ (в ближней зоне акустического поля) найдем следующую асимптотику:

$$H_0\left(k_nR\right)\approx-\frac{1}{n+1}+i\left(\frac{2^n n!}{\left(2n\right)!\left(n+1\right)}\right)^2\left(k_nR\right)^{2n+1}. \quad (41)$$

Для удобства отыскания решений дисперсионного уравнения (39) подставим в правую часть равенства общий вид комплексной частоты $\omega_n=\mathrm{Re}\,\omega_n+i\,\mathrm{Im}\,\omega_n$. Кроме того, учтем, что для существования затухающих поверхностных осцилляций пузыря необходимо, чтобы частота незатухающих осцилляций $\mathrm{Re}\,\omega_n$ превосходила декремент затухания на акустическое излучение $\mathrm{Im}\,\omega_n$: $\mathrm{Re}\,\omega_n>>\mathrm{Im}\,\omega_n$. В связи с этим правая часть уравнения (39) примет вид: $\omega_n^2\approx\left(\mathrm{Re}\,\omega_n\right)^2+2i\,\mathrm{Re}\,\omega_n\,\mathrm{Im}\,\omega_n$. Учитывая это соотношение и разложение (41), приравняем друг другу реальные и мнимые компоненты получившегося равенства. В результате получим:

$$\left(\mathrm{Re}\,\omega_n\right)^2=\frac{\sigma}{\rho_1R^3}n\left(n-1\right)\left(n+2\right)\times\\ \times\left(1+\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{n}{n+1}\right)^{-1}\left(1-\frac{W}{\left(n+2\right)}\right), \quad (42)$$

$$\operatorname{Im}\omega_n = \frac{\sigma}{2\rho_1 R^3}\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(1+\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{n}{n+1}\right)^{-2} n^2(n-1)(n+2)\times \\ \times\left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)}\right)^2\left(1-\frac{W}{(n+2)}\right)\left(\frac{R}{\upsilon}\right)^{2n+1}(\operatorname{Re}\omega_n)^{2n}. \quad (43)$$

После подстановки в (43) квадрата собственной частоты осцилляций, описываемого формулой (42), легко придем к декременту затухания, характеризующему потери механической энергии капиллярных осцилляций пузыря в сжимаемой жидкости, на излучение акустических волн:

$$\operatorname{Im}\omega_n = \frac{\sigma^{n+1}}{2R^{n+2}\upsilon^{2n+1}\rho_1^{n+1}}\frac{\rho_2}{\rho_1}\left(1+\frac{n}{n+1}\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-(n+2)}\times \\ \times n^{n+2}\left((n-1)(n+2)\right)^{n+1}\left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)}\right)^2\left(1-\frac{W}{(n+2)}\right)^{n+1}.$$

АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЕДИНИЧНОГО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ

Далее перейдем к рассмотрению мощности акустического излучения, генерируемого одиночным пузырьком в сжимаемой окружающей жидкости. Полагая, что длина излучаемой акустической волны λ велика по сравнению с размером пузырька R: $\lambda >> R$, для расчета средней по периоду интенсивности излучения применим общую формулу [19, 26]:

$$I = \rho_2\upsilon\oint_S \overline{V_2^2}\,dS, \quad (44)$$

где интегрирование производится по возмущенной поверхности пузырька: $S = [r = R + \xi(\theta,t),\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi]$.

В дальней области поля, удовлетворяющей условиям $r >> \lambda$, $R << r$, вектор скорости потенциального движения жидкой среды $\vec{V}_2(r,\theta,t)$ определяется нормальной компонентой и находится отбрасыванием нелинейных членов по $1/r$:

$$\vec{V}_2(r,\theta,t) \approx \frac{\partial\psi_2(r,\theta,t)}{\partial r}\vec{e}_r, \quad (45)$$

где гидродинамический потенциал ψ_2 вычисляется по (33). Для его отыскания воспользуемся представлением сферической функции Бесселя $h_n^{(2)}(k_n r)$ в виде (40). При переходе к большим расстояниям ($k_n r >> 1$) найдем ее асимптотику, сохраняя в степенном ряду (40) только главный (последний) член, который убывает с расстоянием медленнее остальных:

$$h_n^{(2)}(k_n r) \approx i^{n+1}\frac{1}{k_n r}\exp(-ik_n r).$$

Тогда потенциал поля скоростей течения жидкости вдали от пузырька примет вид:

$$\psi_2(r,\theta,t) = \sum_{n=2}^{\infty} i^{n+1}\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)}\frac{k_n^n R^{n+2}}{r}\times \\ \times\operatorname{Re}\omega_n M_n \exp\left(i\left(\operatorname{Re}\omega_n t - k_n r\right)\right)P_n(\mu)$$

с учетом которого из (45) несложно прийти к скорости:

$$\vec{V}_2(r,\theta,t) = -\sum_{n=2}^{\infty} i^{n+2}\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)}\times \\ \times R^{n+2}k_n^{n+1}\frac{1}{r}\operatorname{Re}\omega_n M_n \exp\left(i\left(\operatorname{Re}\omega_n t - k_n r\right)\right)P_n(\mu)\vec{e}_r, \quad (46)$$

которая представляет собой суперпозицию расходящихся сферических волн.

Для вычисления искомой интенсивности излучения (44) требуется найти усредненное по времени значение величины $\overline{V_2^2}$, которое по определению равно $\overline{\left|\vec{V}_2\right|^2} = \left|\vec{V}_2\right|^2/2$. Скалярно умножая соотношение (46) на комплексно сопряженное ему, перейдем к среднему значению квадрата модуля поля скоростей:

$$\overline{V_2^2} = \frac{1}{r^2}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{\infty} i^{n-m}C_{nm}\exp(-i\Phi_{nm})P_n(\mu)P_m(\mu),$$

$$\Phi_{nm} = (k_n - k_m)r,$$

$$C_{nm} = \frac{2^{n+m-1}n!m!}{(2n)!(2m)!(n+1)(m+1)}\times \\ \times R^{n+m+4}k_n^{n+1}k_m^{m+1}\operatorname{Re}\omega_n \operatorname{Re}\omega_m M_n M_m.$$

Подставляя в (44) полученное выше выражение, учитывая явный вид волнового числа k_n и интегрируя по искаженной поверхности пузырька при использовании свойства ортогональности полиномов Лежандра [21], придем к интенсивности акустического излучения от одиночного заряженного пузырька, осциллирующего в сжимаемой жидкости:

$$I = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\pi}{2n+1}\left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)}\right)^2\rho_2 R^{2n+4}\frac{(\operatorname{Re}\omega_n)^{2n+4}}{\upsilon^{2n+1}}M_n^2.$$

Если же учесть явный вид собственной частоты осцилляций (42), то последнее решение сведется к виду:

$$I=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\pi\left(n(n-1)(n+2)\right)^{n+2}}{(2n+1)}\left(\frac{2^n n!}{(2n)!(n+1)}\right)^2\times \quad (47)$$
$$\times\left(1+\frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{n}{n+1}\right)^{-(n+2)}\frac{M_n^2\rho_2\sigma^{n+2}}{\upsilon^{2n+1}\rho_1^{n+2}R^{n+2}}\left(1-\frac{W}{n+2}\right)^{n+2}.$$

Для численных иллюстраций обратимся к устойчивым кавитационным пузырькам с типичными размерами от R = 1 мкм до R = 3 мм [27], возникающим при образовании и распаде каверны. Примем допущение, что объемная концентрация заряженных парогазовых пузырьков в воде мала так, что будем пренебрегать эффектами их гидродинамического взаимодействия. Положим, что пузырьки совершают поверхностные осцилляции во второй моде (n = 2) с амплитудами M_2 = 0,1R. В модельном рассмотрении будем считать безразмерный параметр Рэлея W (электрический заряд Q) малым: W = 0,01, при котором пузырьки находятся далеко от предела электростатической неустойчивости. Согласно справочным данным, используем средние характеристики внутренней и внешней сред пузырька: σ = 73 дин/см, $\rho_1 = 1{,}3\times10^{-3}$ г/см^3, ρ_2 = 1 г/см^3, $\upsilon = 1{,}5\times10^5$ см/с. Тогда, из формул (42), (43), (47), для радиуса R = 1 мкм найдем оценку интенсивности ультразвукового излучения одиночного пузырька $I \sim 1\times10^{-10}$ эрг/с при Re $\omega_2 \approx 29{,}53\times10^6$ рад/с, Im $\omega_2 \approx 1{,}61\times10^{-3}$ рад/с. При R = 30 мкм находим, что $I \sim 1\times10^{-13}$ эрг/с на ультразвуковой частоте Re $\omega_2 \approx 179{,}72\times10^3$ рад/с при декременте невязкого затухания Im $\omega_2 \approx 1{,}99\times10^{-9}$ рад/с. Если же размер пузырька R = 100 мкм, то несложно получить $I \sim 1\times10^{-14}$ эрг/с, Im $\omega_2 \approx 1{,}61\times10^{-11}$ рад/с на звуковой частоте Re $\omega_2 \approx 29{,}53\times10^3$ рад/с. Для крупного пузырька R = 1 мм находим, что мощность звукового излучения $I \sim 1\times10^{-16}$ эрг/с при Re $\omega_2 \approx 933{,}87$ рад/с и Im $\omega_2 \approx 1{,}61\times10^{-15}$ рад/с.

Отметим, что в простейшем случае гомогенного скопления пузырьков (одинакового радиуса) расчет интенсивности акустического излучения по формуле (47) сводится к умножению базовой величины на число пузырьков в заданном объеме.

Из рис. 1 и 2, на которых продемонстрированы зависимости Re$\omega_2(R, W)$ для микронного (рис. 1а, 1б) и миллиметрового пузырька (рис. 2а, 2б) соответственно, можно видеть, что собственная частота осцилляций (акустического излучения) Reω_2 весьма быстро снижается при возрастании радиуса R пузырька и зарядового параметра Рэлея W (вплоть до критических значений). Следует обратить внимание, что, в отличие от незаряженных пузырьков, наличие электрического заряда понижает частоту и интенсивность их излучения (с ростом заряда). Так, для постоянного размера пузырька при изменении параметра Рэлея от W = 0,01 до W = 3,9 мощность излучения уменьшается на шесть порядков величины, а частота осцилляций – в шесть раз (см. рис. 1 и 2).

Из численных оценок и рис. 1 и 2 ясно, что крупные микронные и миллиметровые пузырьки создают при осцилляциях акустическое излучение, приходящееся на область звуковых частот, а осциллирующие мелкие микронные пузырьки генерируют акустические волны в диапазоне ультразвуковых частот. При этом граница между ультразвуковыми и звуковыми волнами, излучаемыми слабозаряженными микропузырьками (W = 0,01), соответствует радиусу R = 38 мкм. Примечательно, что в случае сильнозаряженных пузырьков эта граница перемещается в сторону более мелких микронных пузырьков, создающих при осцилляциях в сжимаемой жидкости более мощное ультразвуковое излучение.

На рис. 3 и 4 показано, что с увеличением радиуса R декремент затухания на акустическое излучение Imω_2 (см. рис. 3) понижается быстрее по сравнению с интенсивностью излучения I (см. рис. 4). Однако рост зарядового параметра W приводит к большей скорости снижения мощности излучения I, нежели декремента затухания Imω_2. Кроме того, согласно (47) и (43), а также представленным на рис. 4 данным, мощность акустического излучения обратно пропорциональна квадрату радиуса пузырька R, тогда как изменение Imω_2 обратно пропорционально его четвертой степени.

ИНТЕГРАЛЬНОЕ АКУСТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ПУЗЫРЬКОВЫХ СКОПЛЕНИЙ

Как правило, кавитационные пузырьки в конечном объеме жидкости образуют полидисперсные скопления. Остановимся подробнее на оценке интенсивности акустического излучения, создаваемого совокупностью осциллирующих пузырьков в выделенном объеме жидкой среды.

Несомненно, размеры таких парогазовых включений неодинаковы. Данные экспериментальных измерений свидетельствуют о том, что характерные размеры пузырьков изменяются в широком диапазоне, охватывающем три порядка величины: от единиц микрометров до единиц миллиметров [27]. Хорошо известно, что интегральные микроструктурные характеристики пузырьковых групп выражаются через интеграл по спектру размеров пузырьков [27, 28]. Для описания распределения таких частиц по

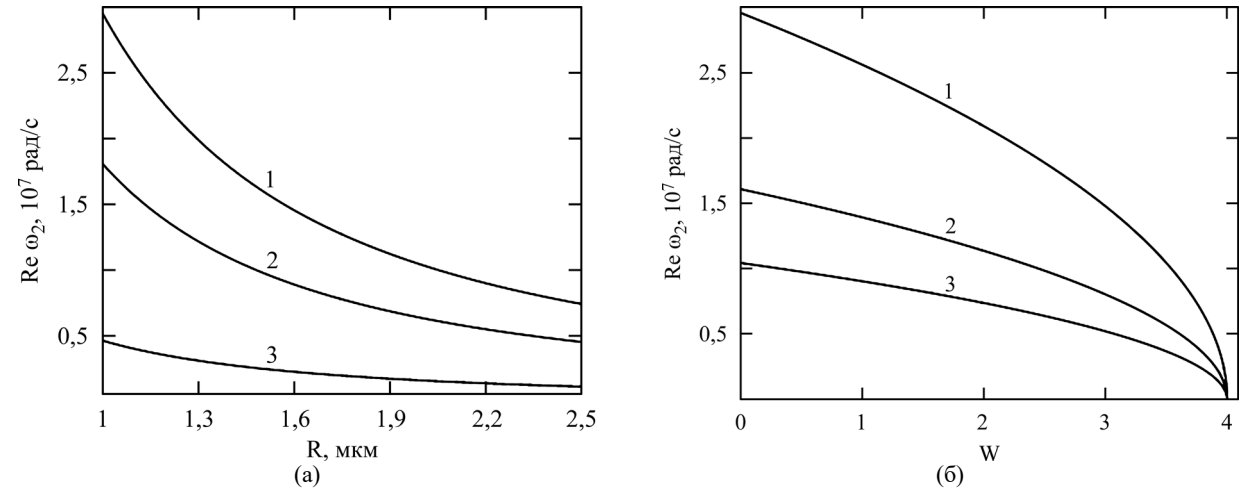


Рис. 1. Зависимость собственной частоты Re ω_2 осцилляций парогазового микронного пузырька в жидкости, построенная при $n = 2$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho_1 = 1{,}3\times10^{-3}$ г/см^3, $\rho_2 = 1$ г/см^3: (а) – от радиуса R (кривая *1* соответствует $W = 0{,}01$, кривая *2* – $W = 2{,}5$, кривая *3* – $W = 3{,}9$); (б) – от параметра Рэлея W (кривая *1* соответствует $R = 1$ мкм, кривая *2* – $R = 1{,}5$ мкм, кривая *3* – $R = 2$ мкм).

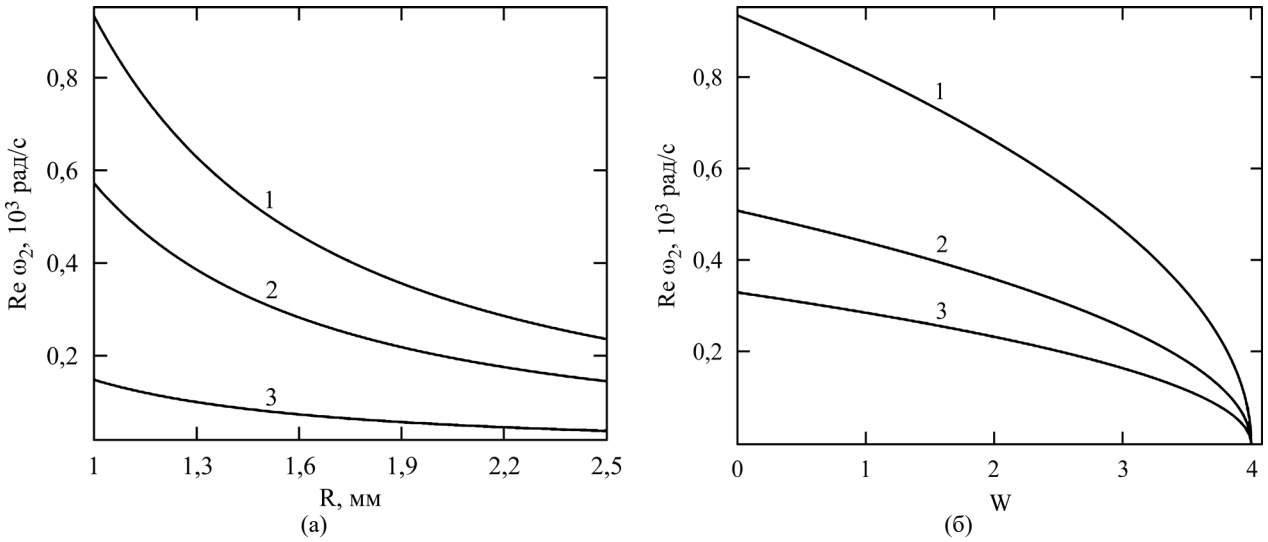


Рис. 2. Зависимость собственной частоты $\mathrm{Re}\,\omega_2$ осцилляций парогазового миллиметрового пузырька в жидкости, построенная при $n = 2$, $\varepsilon = 0{,}1$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho_1 = 1{,}3\times10^{-3}$ г/см^3, $\rho_2 = 1$ г/см^3: (а) – от радиуса R (кривая *1* соответствует $W = 0{,}01$, кривая *2* – $W = 2{,}5$, кривая *3* – $W = 3{,}9$); (б) – от параметра Рэлея W (кривая *1* соответствует $R = 1$ мм, кривая *2* – $R = 1{,}5$ мм, кривая *3* – $R = 2$ мм).

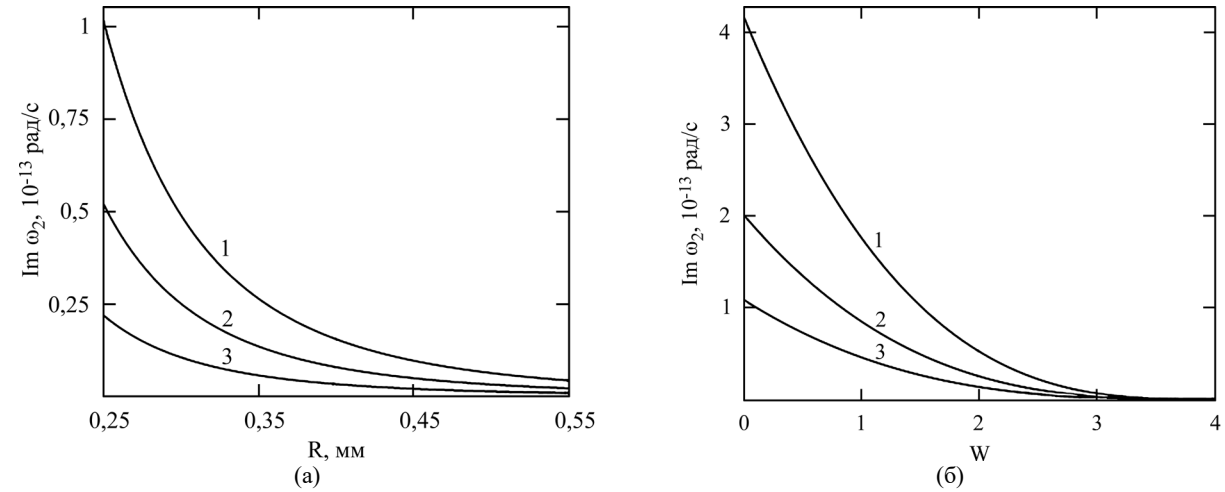


Рис. 3. Зависимость декремента затухания $\mathrm{Im}\omega_2$ капиллярных осцилляций, связанного с акустическим излучением парогазового пузырька в сжимаемой жидкости: (а) – от радиуса R (кривая *1* соответствует $W = 1{,}5$, кривая *2* – $W = 2$, кривая *3* – $W = 2{,}5$); (б) – от параметра Рэлея W (кривая *1* соответствует $R = 0{,}25$ мм, кривая *2* – $R = 0{,}3$ мм, кривая *3* – $R = 0{,}35$ мм). Расчеты проведены при прочих равных значениях физических величин, что на рис. 1, и $\upsilon = 1{,}5\times10^5$ см/с.

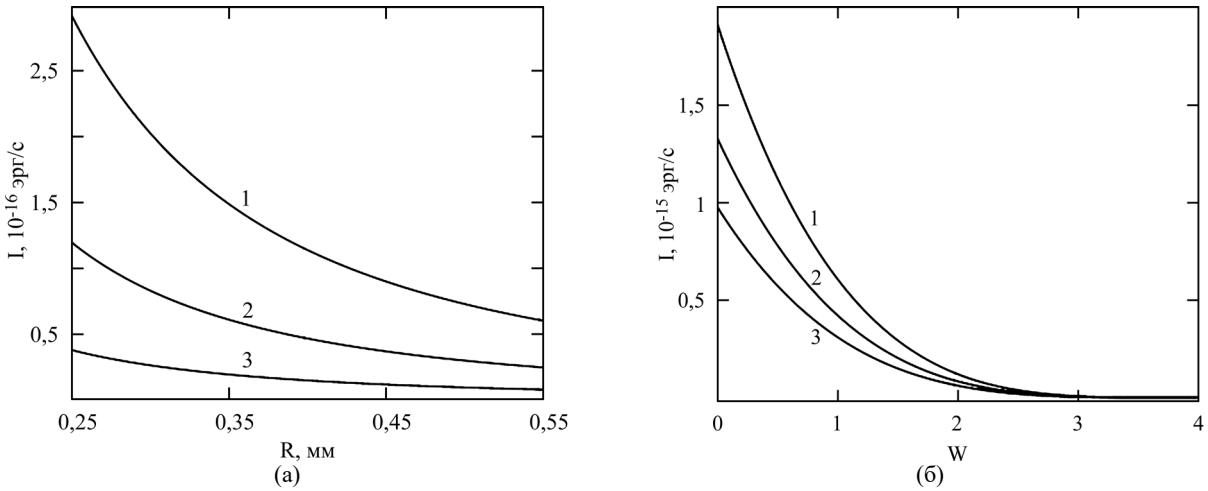


Рис. 4. Зависимость интенсивности I акустического излучения парогазового пузырька в сжимаемой жидкости: (а) – от радиуса R (кривая *1* соответствует $W = 1{,}5$, кривая *2* – $W = 2$, кривая *3* – $W = 2{,}5$); (б) – от параметра Рэлея W (кривая *1* соответствует $R = 0{,}25$ мм, кривая *2* – $R = 0{,}3$ мм, кривая *3* – $R = 0{,}35$ мм). Расчеты проведены при прочих равных значениях физических величин, что на рис. 1, и $\upsilon = 1{,}5\times10^5$ см/с.

радиусам применяют различные виды функций плотности распределения вероятностей. На практике для наиболее точного описания спектра радиусов пузырьков используют такие типичные законы распределения (сохраняющие свою применимость в качестве инструмента моделирования при варьировании газо- и паросодержания пузырьков [28]), как нормальный (гауссовский), логарифмически-нормальный, закон гамма-распределения, Вейбулла, Рэлея и др. [29].

Таким образом, в соответствии со сведениями [28] для модельного построения воспользуемся следующими законами $f(R)$, описывающими плотность распределения концентрации парогазовых образований в жидкой среде по их радиусам:

нормальным (гауссовским):

$$f\left(R\right)=\frac{N_0}{s\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(R-R_a\right)^2}{2s^2}\right), \qquad (48)$$

и Рэлея:

$$f\left(R\right)=N_0\frac{R}{s^2}\exp\left(-\frac{R^2}{2s^2}\right), \qquad (49)$$

где N_0 – концентрация пузырьков. Ясно, что вид аналитических функций (48), (49) сильно зависит от микроструктурных статистических параметров: математического ожидания R_a, которое определяет положение максимума распределения Гаусса и для диапазона с симметрично расположенными концами $R_{\min}$ и $R_{\max}$ равно среднему радиусу пузырьков с размерами, заключенными в выбранном диапазоне: $R_a=\left(R_{\min}+R_{\max}\right)/2$; s – среднеквадратичного отклонения радиусов от средней величины R_a.

Собственно, для микропузырьков с радиусами от $R_{\min} = 40$ мкм до $R_{\max} = 240$ мкм, осциллирующих в области звуковых частот, для определенности положим $N_0 = 10$ см$^{-3}$. Вместе с тем, предполагая, что расстояния между пузырьками достаточно большие по сравнению с их размерами, пренебрежем их взаимным влиянием.

На рис. 5 для иллюстрации приведены графики спектра размеров $f(R)$ парогазовых микропузырьков, подчиняющихся законам (48), (49) при различных значениях дисперсии s^2. Примечательно, что для построенных спектральных зависимостей можно выделить общие закономерности. Во-первых, для каждого распределения на кривой есть один максимум (в точке $R = R_{moda}$) концентрации пузырьков (у гауссовского $R_{moda} = R_a$, а у рэлеевского $R_{moda} = s$). Во-вторых, с увеличением величины среднеквадратического отклонения s наблюдается понижение максимального значения, а также уменьшение скорости снижения кривых. Впрочем, из сравнения полученных кривых очевидна качественная и количественная разница. Можно отметить, что в отличие от распределения Гаусса пик концентрации пузырьков на кривой распределения Рэлея значительно выше по значению и смещен в сторону меньших размеров. При этом спад кривой в сторону малых радиусов происходит несколько быстрее, чем в сторону более крупных пузырьков. Однако при возрастании параметра s максимум распределения концентрации пузырьков по закону Рэлея сдвигается в область больших радиусов. Кроме того, рост величины s говорит о стремлении к более равномерному распределению пузырьков по размерам.

Отметим, что одним из важных интегральных параметров пузырьковых скоплений в конечном объеме жидкости является концентрация N_{in}

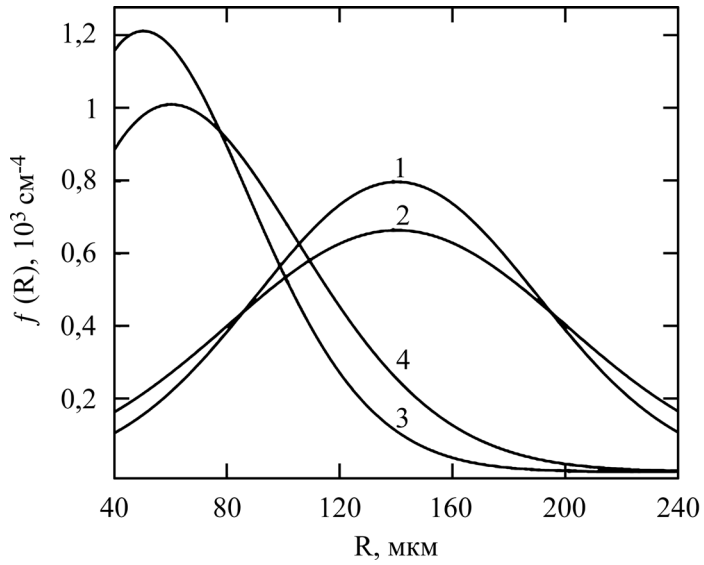


Рис. 5. Плотность распределения $f(R)$ парогазовых микропузырьков в единице объема жидкости по их радиусам R, соответствующая нормальному (гауссовскому) закону при R_a = 140 мкм (кривая *1* – s = 50 мкм, кривая *2* – s = 60 мкм) и закону Рэлея (кривая *3* – s = 50 мкм, кривая *4* – s = 60 мкм).

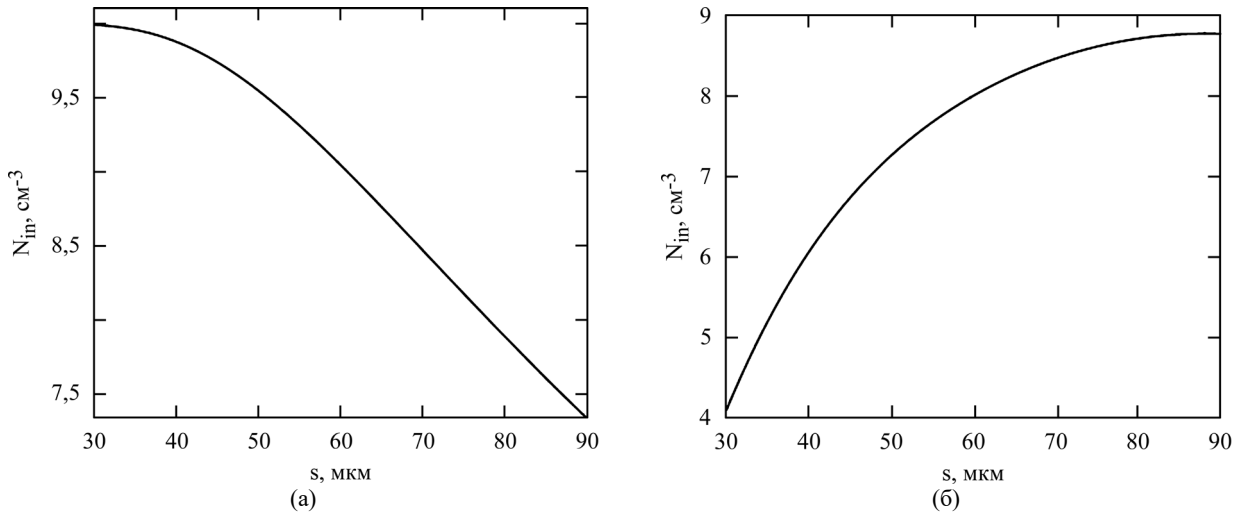


Рис. 6. Зависимость концентрации N_{in} пузырьков в выделенной части спектра радиусов от среднеквадратичного отклонения s, соответствующая: (а) – нормальному (гауссовскому) распределению, и (б) – рэлеевскому распределению. Расчеты проведены при N_0 = 10 см$^{-3}$, R_a = 140 мкм, $R \in$ [40 мкм; 240 мкм].

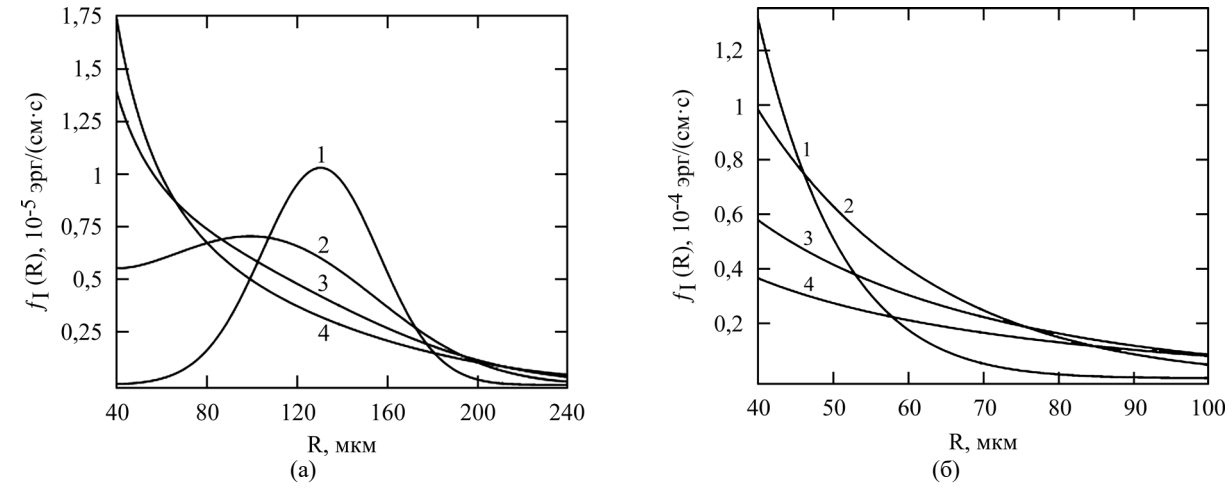


Рис. 7. Спектральная интенсивность излучения $f_1(R)$ осциллирующих пузырьков в выделенном объеме жидкости для: (а) – нормального (гауссовского) закона распределения пузырьков по радиусам; (б) – рэлеевского закона распределения. Расчеты проведены при n = 2, ε = 0,1, σ = 73 дин/см, $\rho_1 = 1{,}3\times10^{-3}$ г/см^3, ρ_2 = 1 г/см^3, $\upsilon = 1{,}5\times10^5$ см/с, W = 0,01, N_0 = 10 см$^{-3}$, R_a = 140 мкм, $V_{in} = 1\times10^6$ см^3. Кривая *1* построена при s = 25 мкм, кривая *2* – при s = 45 мкм, кривая *3* – при s = 65 мкм, кривая *4* – при s = 85 мкм.

пузырьков. Для нахождения этой характеристики, прежде всего, введем интегральную функцию распределения концентрации пузырьков $F(R)$ в диапазоне радиусов $\Delta R = R_{max} - R_{min}$. Очевидно, дифференциальная функция $f(R)$ плотности распределения числа пузырьков в единице выделенного объема жидкости по определению равна:

$$f(R) = \frac{dF(R)}{dR}. \quad (50)$$

Отсюда получим концентрацию пузырьков $dF(R)$ в интервале изменения радиусов dR в виде:

$$dF(R) = f(R)\,dR. \quad (51)$$

Интегрируя левую и правую части выше записанного равенства, получим, что общее число пузырьков в единице объема жидкости N_{in}, попадающих в заданную область размеров от R_{min} до R_{max}, находится интегрированием искомой плотности распределения $f(R)$ в пределах указанного диапазона:

$$N_{in} \equiv F(R_{max}) - F(R_{min}) = \int_{R_{min}}^{R_{max}} f(R)\,dR. \quad (52)$$

Таким образом, используя интегральное соотношение (52) для законов распределения (48), (49), получим, что общее число пузырьков в 1 см^3 в части спектра радиусов от R_{min} = 40 мкм до R_{max} = 240 мкм колеблется в пределах порядка величины. Так, на рис. 6, построенном при N_0 = 10 см$^{-3}$ и варьировании среднеквадратичного отклонения от s = 30 мкм до s = 90 мкм, показано, что в случае распределения Рэлея полная концентрация N_{in} пузырьков изменяется в более широком диапазоне, нежели при гауссовском распределении. Однако наибольшая величина концентрации N_{in} характерна для нормального закона распределения пузырьков по размерам при наименьшей величине параметра s.

В свою очередь для оценки интенсивности акустического излучения от пузырьковых скоплений в силу их полидисперсности, как правило, необходимо знать аналитический вид функций $f(R)$, описывающих спектр размеров пузырьков. В результате, задавая определенный закон $f(R)$ плотности распределения концентрации пузырьков по их радиусам, получим, что спектральная интенсивность излучения $f_1(R)$ скопления с числом пузырьков N в выделенном объеме жидкости V_{in} связана с $f(R)$ очевидным соотношением:

$$f_I(R) = V_{in} I(R) f(R), \quad (53)$$

где мощность излучения $I(R)$ единичного пузырька для n-й моды осцилляций находится по формуле (47).

Из рис. 7 видно, что при фиксированных значениях радиуса R пузырька и среднеквадратичного отклонения s величина спектральной интенсивности излучения $f_1(R)$, построенная по (53) для конечного объема жидкости V_{in} = 1×10^6 см^3, на порядок выше в случае рэлеевского закона распределения пузырьков (49), чем для нормального закона распределения (48). Кроме того, на рис. 7б, построенном для рэлеевского спектра размеров пузырьков, показано, что уменьшение параметра s приводит к возрастанию скорости снижения $f_1(R)$. Впрочем, как видно из рис. 7а, для гауссовской плотности распределения пузырьков варьирование величины s сказывается не только на количественных, но и на качественных изменениях зависимости $f_1(R)$: при малых значениях параметра s доминирует вклад пузырьков средних размеров (кривая сохраняет симметричную форму, близкую к исходной), а при больших s кривая сглаживается, так как левое крыло поднимается за счёт вклада мелких пузырьков. В целом, с увеличением s «колоколообразный» вид графика сменяется на быстро спадающую кривую при возрастании R.

По аналогии с рассуждениями, изложенными выше (перед формулами (50)–(52)), и с учетом (53) вычислим вклад в интегральную интенсивность излучения I_{in} пузырьков с размерами, сосредоточенными в диапазоне от R_{min} до R_{max}, интегрированием $f_1(R)dR$ в пределах этого диапазона:

$$I_{in} = V_{in} \int_{R_{min}}^{R_{max}} I(R) f(R)\,dR. \quad (54)$$

В частности, используя (47), выпишем интегральную характеристику (54) в случае основной (второй) колебательной моды n = 2:

$$I_{in} = \frac{8192\pi}{405} \frac{\varepsilon^2 \sigma^4 \rho_2}{\upsilon^5 \rho_1^4} \left(1 + \frac{2}{3}\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-4} \times \left(1 - \frac{W}{4}\right)^4 V_{in} \int_{R_{min}}^{R_{max}} \frac{f(R)}{R^2} dR. \quad (55)$$

В итоге, подставляя в (55) функции (48), (49) плотностей распределения пузырьков по размерам, оценим интегральную интенсивность I_{in} акустического излучения от группы парогазовых заряженных пузырьков с радиусами от R_{min} = 40 мкм до R_{max} = 240 мкм, осциллирующих в основной (второй) моде n = 2 в конечном объеме жидкости V_{in} = 1×10^6 см^3. Для модельных расчетов выберем N_0 = 10 см$^{-3}$, R_a = 140 мкм, s = 61 мкм (для гауссовского закона), s = 42 мкм (для рэлеевского закона), W = 0,01. Используя вышеуказанные значения

параметров внутренней и внешней сред пузырька, найдем интегральную интенсивность излучения $I_{in} \sim 9\times10^{-8}$ эрг/с (для гауссовского закона), $I_{in} \sim 2 \times 10^{7}$ эрг/с (для рэлеевского закона) в диапазоне звуковых частот от $\mathrm{Re}\,\omega_2 \approx 7{,}94\times10^{3}$ рад/с до $\mathrm{Re}\,\omega_2 \approx 116{,}73\times10^{3}$ рад/с. Полученные оценки свидетельствуют, что излучение такой мощности на несколько порядков величины меньше, чем может зарегистрировать ухо человека.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выявлено, что граница между ультразвуковыми и звуковыми волнами, излучаемыми слабозаряженными осциллирующими микропузырьками, соответствует радиусу $R = 38$ мкм. Однако увеличение электрического заряда (вплоть до критических значений по Рэлею) приводит к смещению этой границы в сторону более мелких микронных пузырьков, создающих при осцилляциях в сжимаемой жидкости более мощное ультразвуковое излучение. Данный факт можно объяснить большей концентрацией мелких микронных пузырьков. Интегральная интенсивность акустического излучения пузырьковых скоплений в конечном объеме жидкости в случае рэлеевского распределения пузырьков по размерам может быть на порядок величины выше по сравнению с гауссовским законом распределения.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Максимов, А.О., Половинка, Ю.А., Акустические проявления газового включения, расположенного вблизи межфазной поверхности, *Акустический журнал*, 2018, т. 64, № 1, с. 22.
2. Ярмаркин, Д.А., Прохасько, Л.С., Мазаев, А.Н. Кавитационные технологии в пищевой промышленности. *Молодой ученый*, 2014, № 8 (67), с. 312.
3. El-Hosiny, F.I., Selim, K.A., Abdel Khalek, M.A., and Osama I., Produced water treatment using a new designed electroflotation cell, *Int. J. Res. Ind. Eng.*, 2017, vol. 6, no. 4, p. 328.
4. Казачек, М.В., Гордейчук, Т.В., Особенности сонолюминесценции атомарного натрия в процессе пузырькового коллапса в кавитационном облаке методом время-корреляционного счета одиночных фотонов, *Акустический журнал*, 2024, т. 70, № 4, с. 499.
5. Баширов, М.Г., Хисматуллин, А.С., Хуснутдинова, И.Г., Применение барботажа в системе охлаждения силовых трансформаторов, *Журнал "ТХНП"*, 2014, № 3, С. 29.
6. Лисицын, А.Н., Федоров, А.А., Волков, С.М., Федоров, А.В., и др., Скорость всплытия и размер пузырей перегретого водяного пара при барботаже в дистилляции мисцеллы подсолнечного масла, *Научный журнал НИУ ИТМО. Серия «Процессы и аппараты пищевых производств»*, 2023, № 3, с. 20.
7. Jangjou, A., Meisami, A.H., Jamali, K., and Niakan, M.H., The promising shadow of microbubble over medical sciences: from fighting wide scope of prevalence disease to cancer eradication, *J. Biom. Sci.*, 2021, vol. 28, no. 49, p. 1.
8. Чалов, А.В. Акустическое излучение при нестационарном движении пузырька в жидкости. *Акустический журнал*, 1994, т. 40, № 3, с. 432.
9. Ma, Y., and Zhao, F. Nonlinear oscillation and acoustic scattering of bubbles. *Ultrasonics Sonochemistry*, 2021, vol. 74, art. ID 105573.
10. Alam, Md.Q., Upadhyay, A., Assam, A., and Raj, R. On the origin and nature of acoustic emissions from bubbles departing an underwater nozzle, *Physics of Fluids*, 2025, vol. 37, art. ID 041703.
11. Чашечкин, Ю.Д., Пакеты капиллярных и акустических волн импакта капли, *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*, 2021, №1, с. 73.
12. Prokhorov, V.E., Acoustics of oscillating bubbles when a drop hits the water surface. *Phys. Fluids*, 2021, vol. 33, art. ID 083314.
13. Rayleigh, J.W.S. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity. *Phil. Mag.*, 1917, vol. 34, p. 94.
14. Жаров, А.Н., Григорьев, А.И., Жарова, И.Г. Нелинейные капиллярные колебания заряженного пузырька в идеальной диэлектрической жидкости. *ЖТФ*, 2006, т. 76, № 10, с. 41.
15. Strasberg, M. Gas bubbles as sources of sound in liquids, *J. Acoust. Soc. Am.*, 1956, vol. 28, no. 1, p. 20.
16. Калечиц, В.И., Нахутин, И.Е., Полуэктов, П.П. О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков, *ДАН СССР*, 1982, т. 262, № 6, с. 1344.
17. Богатов, Н.А. Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель. *Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений. Петропавловск Камчатский 9-13 сентября 2013. Сборник тезисов докладов 6-й Международной конференции,* с. 10.
18. Ушаков, В.Я., Физика пробоя жидких диэлектриков (История и современное состояние, вклад советских и российских ученых). *Известия Томского политехнического университета*, 2004, т. 307, № 2, с. 80.
19. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986, 736 с.
20. Найфэ А.Х., *Методы возмущений*, М.: Мир, 1976. 455 с.
21. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 830 с.

22. Rayleigh, J.W.S., On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity. *Phil. Mag*., 1882, vol. 14, p. 184.

23. Григорьев, А.И., Коромыслов, В.А., Жаров, А.Н. О дроблении сильно заряженного пузыря в диэлектрической жидкости на части сравнимых размеров. *Письма в ЖТФ*, 1997, т. 23, № 19, с. 60.

24. Григорьев, А.И., Колбнева, Н.Ю., Ширяева, С.О., Влияние релаксации поверхностного натяжения на устойчивость заряженной струи, *ПММ*, 2023, т. 87, Вып. 6, с. 1014.

25. Градштейн, И.С., Рыжик, И.М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М. Наука, 1963. 1108 с.

26. Лепендин, Л.Ф., *Акустика*, М.: Высшая школа, 1978. 448 с.

27. Петров А.Г., Установившаяся амплитуда нелинейных колебаний газового пузырька в жидкости под действием периодического внешнего давления при резонансе, *Известия РАН, МЖГ*, 2023, № 5, с. 3.

28. Губайдуллин, Д.А., Федоров, Ю.В. Звуковые волны в жидкости с полидисперсными парогазовыми пузырьками, *Акустический журнал*, 2016, т. 62, № 2, с. 178.

29. Alam, R., Shang, J.Q., and Khan A.H. Bubble size distribution in a laboratory-scale electroflotation study, *Environ. Monitor. Assess.*, 2017, vol. 189, no. 4, p. 191.

Summary

Using first-order asymptotic calculations with respect to the dimensionless oscillation amplitude, the acoustic-radiation intensity was calculated for both a single vapor-gas bubble and bubble clusters in a finite volume of compressible liquid, considering Gaussian and Rayleigh bubble-size distributions. Small micrometer-sized bubbles were found to emit acoustic waves in the ultrasonic frequency range during oscillation, whereas larger micrometer-to-millimeter bubbles emit in the audible range with lower radiation intensity. For an oscillating bubble of fixed radius, increasing the electric charge lowers the radiation frequency to the audible range, whereas decreasing the charge can increase the acoustic-radiation intensity by six orders of magnitude. For a Rayleigh bubble-size distribution, the integrated radiation intensity of a group of oscillating bubbles is one order of magnitude higher than for a normal (Gaussian) distribution.

Keywords: vapor-gas microbubble, electric charge, compressible liquid, acoustic radiation, bubble-size spectrum