

М.С. Апфельбаум

## О РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В ПЛОСКИХ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЧАСТИЧНО ЗАРЯЖЕННЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СТРУЯХ

*Институт теплофизики экстремальных состояний объединенного  
института высоких температур Российской академии наук,  
ул. Ижорская, д. 13, строение 2, г. Москва, 125412, Россия, [msa@ihed.ras.ru](mailto:msa@ihed.ras.ru)*

Теоретические модели и расчеты пространственных распределений потенциалов электрических полей, измеренных в струях частично заряженных сред, как при комнатных, так и при плазменных температурах, описываемые в настоящей работе, являются развитием моделей и расчетов публикаций [1, 2]. В настоящей работе, в отличие от [1], рассматриваем не только осесимметричные, но и плоские ламинарные и турбулентные струи, в том числе и обусловленные предпробойным приложенным электрическим полем (см. рис. 1). По-прежнему считаем, что термоионизация (термодиссоциация) рассматриваемых сред происходит по законам классической статистики и кинетики Аррениуса – Больцмана-Гиббса и скорость такой ионизации (диссоциации) в единицу времени в единице объема  $W_{D,i}$  удовлетворяет известному уравнению статистической физики (механики):

$$\frac{\partial W_d}{W_d} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{u_a}{k_B T^2}, \quad \frac{\partial W_{ii}}{W_i} \frac{\partial}{\partial T} = \frac{u_i^A - u_e^B}{k_B T^2}. \quad (1)$$

В (1)  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $u_i^A$  – потенциал ионизации атома А в молекуле среды с ковалентными химическими связями,  $u_a$  – энергия активации молекул сред с ионными связями. В случае диссоциации аналог уравнения (1) выписан в [3] (в [3] в качестве примера очищенной среды рассматривается гептан). При наличии примесей\*, как правило, увеличивающих природную проводимость очищенной среды  $\sigma_0$ , для расчета  $u_{a,i}$  следует учитывать их характеристики, влияющие на термоионизацию (термодиссоциацию). Для применения такой статистической кинетики со сродством ковалентного атома В к электрону  $u_e$  наряду с использованием близких к широко применяемым в статистической физике (механике) уравнений (1) постулируется и достаточно известная гипотеза о линейной зависимости объемной скорости образования ионов  $W_{D,i} = W_{D,i}(n_a, n_p)$  от концентрации нейтральных молекул  $n_a$ . Кроме того, учитывается и ее монотонно возрастающие зависимости от модуля  $E$ , ограниченного модулем пробойной напряженности, достаточно высоким для рассматриваемых сред, а также от достаточно малой объемной концентрации, возможно, имеющих примесей  $n_p$ . И по аналогии с [3] введем коэффициент пропорциональности К:

---

\* В частности, по данным [4], определяемая по эмпирическим вольт-амперным характеристикам величина низковольтной проводимости очищенного трансформаторного масла на порядок ниже проводимости такого же неочищенного масла. Для её усиления в среду нередко специально вводят [5] легко ионизируемые присадки (примеси). В настоящей работе рассматривается ионизация молекул АВ с ковалентными связями типа  $2AB \rightarrow A^+B + AB^-$ , а также диссоциация молекул с ионными связями типа  $AB \rightarrow A^+ + B^-$ . При ионизации рассматриваются среды с молекулами, состоящими из атомов А (типа азота в воздухе) с достаточно низким потенциалом ионизации, и атомов В (типа кислорода в воздухе) с достаточно высокой энергией сродства к электрону.

$$W_{D,I}(n_a, n_p, T, \bar{E}) = K_{D,I}(n_p, T, \bar{E}) n_a, \\ K_{D,I}(n_p, T, \bar{E}) = K_{D,I}(n_p, T, 0) \psi(\bar{E}, T) / \psi(0, T), \quad (2)$$

$$\psi(\bar{E}, T) > 1, \quad T > T_0.$$

При этом наряду с выполнением для рассматриваемых сред неравенства

$$n_{\pm} \ll n_a, \quad (3)$$

математически замыкающего дифференциальные уравнения теоретических моделей предыдущих работ, например [2], считаем, что для этих сред справедливо и аналогичное алгебраическое неравенство

$$n_p \ll n_a. \quad (4)$$

Тогда  $n_a = \frac{\rho_a}{m_a} \approx \frac{\rho}{m_a}$ , то есть плотность  $\rho$  смеси зарядов и нейтралов, включая примеси, при-

ближенно можно считать равной плотности нейтральной компоненты молекулярной среды-носителя  $\rho_a$ . Здесь  $m_a$  – масса нейтральной частицы. Из интегрирования (1) по  $T$  следует, что:

$$\left\{ \begin{array}{l} W_d = C_d \exp\left(-\frac{u_a}{k_b T}\right); \\ W_l = C_l \exp\left(\frac{u_e^B - u_i^A}{k_b T}\right). \end{array} \right. \quad (5A) \quad (5B)$$

Уравнения (5) известны как уравнения Аррениусовского типа. Впервые кинетические уравнения такого типа были получены Аррениусом эмпирически для зависимостей констант ионизации (диссоциации) от  $T$  (так в литературе называют выписанные в линейной зависимости (2) коэффициенты пропорциональности). В работах зависимости (2) используются для теоретического моделирования образования объемного заряда и полей такого заряда в рассматриваемых средах в случаях слабых и сильных электрических полей, приложенных у их границ. При этом возможен как нагрев вплоть до плазменных температур, так и частичное горение исследуемых покоящихся и движущихся сред. Кроме того, при предпробойных режимах используем эти уравнения для расчета скоростей их течений, самосогласованными электрическими полями обусловленных. Для увеличения модуля скоростей предпробойных течений слабопроводящих жидких (типа трансформаторного масла) сред (рис. 1) нередко вводят примеси иного состава, чем указанные в [5]. Такие примеси усиливают ионизационные электрофизические или электрохимические эффекты у электродов, описанные, например, в [6] (как в однородном, так и в неоднородном сильном приложенном электрическом поле), отчего и течения рассматриваемых сред в таких полях становятся более интенсивными. В настоящей работе среды со специально вводимыми примесями не рассматриваются. При этом наряду с очищенными средами исследуются только среды с заранее имеющимися примесями. В общем (необязательно Аррениусовском) случае константа ионизации (диссоциации) считается для рассматриваемых жидкостей и плотных газов растущей с ростом температуры и модуля напряженности макроскопического электрического поля  $\bar{E}$ , что учтено при математической записи уравнения (2). Строго говоря, такое поле следует считать электромагнитным, но, как показано, например, в [7], в исследуемых слабопроводящих (слабоионизованных) средах влияние индуцированных магнитных полей на электрогидродинамические явления мало, а приложенные магнитные поля от внешнего источника в настоящей работе не рассматриваются. При этом для теоретического моделирования и расчетов макроскопических характеристик в исследуемых струях достаточно использовать приближение электрогидродинамики [8], при котором система уравнений Максвелла для макроскопического магнитного поля отщепляется от основной системы уравнений и может вообще не рассматриваться. То же самое касается и уравнения для изменения малой по сравнению с концентрацией молекул среды-носителя концентрации примесей. В отличие от магнитного поля, слабо влияющего на исследуемые процессы в рассматриваемых поляризующихся, но не намагничивающихся средах, примеси влияют на искомые электрогидродинамические характеристики. Поэтому отметим, что возможные типы уравнений для

их объемной концентрации близки к выписываемым здесь уравнениям для таких же концентраций заряженных компонент (отличие состоит только в учете для заряженных компонент членов, описывающих их дрейф в электрическом поле). Последние уравнения будут приведены ниже, где также будут указаны возможные типы уравнений для примесей. Для напряженности искомого электрического поля макроскопические уравнения Максвелла при постоянной относительной диэлектрической проницаемости рассматриваемых сред  $\varepsilon_r$  выписываются в стандартной форме:

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{q}{\varepsilon_r \varepsilon_0}; \\ \vec{E} = -\nabla\varphi. \end{cases} \quad (6)$$

Система уравнений (6) легко сводится к одному скалярному уравнению Пуассона второго порядка для потенциала макроскопического электрического поля  $\varphi$ . Методы решения краевых задач для такого уравнения с явно зависящей от пространственных координат правой частью широко описаны в литературе. Но в случае предпробойных процессов правая часть этого уравнения зависит от распределения электрического поля, поэтому наряду с уравнением Пуассона следует решать и другие уравнения, выписываемые ниже. В уравнениях (6)  $q = (n_+ - n_-)Ze_0$  – плотность объемного заряда,  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума в системе единиц СИ. В отсутствие приложенного сильного электрического поля или до нагрева рассматриваемые среды (за пределами диффузионных слоёв у их границ) электронейтральны. Их низковольтная проводимость  $\sigma_0$  при постоянной температуре  $T_0$  обусловлена наличием в объеме сред концентраций  $n_{0+} = n_{0-} = n_0$  зарядов разных знаков, равных по величине. Квазинейтральный фон положительно и отрицательно заряженных частиц может образовываться в среде, не меняющей в основном своего состава, в соответствии с (1) ввиду объемных термоионизационных (термодиссоциативных) эффектов, усиливающихся в предпробойных электрических полях, а также при нагреве или частичном горении рассматриваемых сред. Это приводит, согласно, например [2, 7], к образованию объемного заряда при неоднородном распределении электрических полей и температур в рассматриваемых вязких, теплопроводных и достаточно плотных средах, в которых подвижности от модуля напряженности электрического поля практически не зависят, в отличие от случая разреженных газов. Кроме того, такой заряд, например, по [6] может образовываться и у границ рассматриваемых сред с высоковольтными электродами. Возможно также образование такого заряда на других границах с твердыми, жидкими или газообразными средами. В случаях движущихся (в том числе и в сильном электрическом поле) рассматриваемых сред гидродинамический (газодинамический) перенос образующегося объемного заряда влияет на его распределение в пространстве. Такое влияние в объеме движущейся среды исследовалось ранее, например в [2], а также будет описано ниже в настоящей статье, в то время как газодинамический перенос такого заряда у границ рассматриваемых сред в условиях их возможных электрических пробоев описывался, например, в [5]. Величина  $\sigma_0$  определяется теоретически из условий ионизационного (диссоциативного) равновесия, обусловленных ионизацией (диссоциацией) молекул жидкости (газа) с близкой по величине рекомбинацией заряженных частиц. Скорость объемной ионизации (диссоциации) при этом определяется по (2), а скорость рекомбинации можно считать пропорциональной ионным концентрациям  $n_{\pm}$  с коэффициентом пропорциональности  $K_r$ . Экспериментально такую проводимость можно определить по линейному участку вольт-амперных характеристик, наблюдаемому для рассматриваемых сред только в слабых полях. Ее можно найти также по справочной литературе или рассчитать (в некоторых случаях) методами статистической физики и физической кинетики по зарядовому составу молекулы среды.

Зависимость коэффициента или константы рекомбинации  $K_r$  от ионных подвижностей  $b_{\pm}$  зарядов можно определять простым соотношением Ланжевена-Онзагера [9]:

$$K_r = \frac{(b_+ + b_-)Ze_0}{\varepsilon\varepsilon_0}. \quad (7A)$$

Положительные и отрицательные свободные (в случае диссоциации по Бьерруму [9]) ионы при этом для простоты предполагаются зарядами равной величины или равной кратности (валентности)  $Z$ . Поэтому здесь и в дальнейшем  $e_0$  по величине равно заряду протона. С увеличением кратности (валентности) заряда иона для его вычисления  $e_0$  следует умножить на соответствующую вели-

чину. Кроме того, формула (7А) получена при условии пропорциональности скорости движения зарядов, обусловленных электрическим полем  $\vec{v}_{\pm\vec{E}}$ , и его напряженности (макроскопической)  $\vec{E}$ , при которой ионная подвижность является коэффициентом такой пропорциональности. Наряду с такими скоростями зарядов следует учитывать их скорость, обусловленную молекулярно-ионной диффузией и равную по закону Фика [9]:  $\vec{v}_{\pm\vec{E}} = \frac{D_{\pm}\nabla n_{\pm}}{n_{\pm}}$ , а также скорость гидродинамического переноса  $\vec{u}$ . При

условиях (3) и (4) эту скорость можно считать близкой к скорости среды. Коэффициенты ионной диффузии  $D_{\pm}$  связаны при плазменной идеальности с их подвижностями  $b_{\pm}$  известным соотношением Нернста – Таунсенда - Эйнштейна:

$$D_{\pm} = \frac{k_B T}{Ze_0} b_{\pm}. \quad (7B)$$

Тогда скорости движения элементарных объемов заряженных компонент

$$\vec{u}_{\pm} = \vec{u} \pm b_{\pm} \vec{E} - \frac{k_B T b_{\pm}}{Ze_0} \frac{\nabla n_{\pm}}{n_{\pm}}. \quad (8)$$

Наряду с приближением Фика (8) для определения макроскопических скоростей компонент среды могут использоваться и другие модели. Так, для определения  $\vec{u}$  (скорости нейтральной компоненты) наиболее часто с учетом вязкости используются при условиях (3) и (4) уравнения Навье-Стокса [10]:

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \rho \nu \Delta \vec{u} + \rho \vec{g} + q \vec{E} + \frac{(\epsilon_r - 1) \epsilon_0 \nabla (\vec{E}^2)}{2}; \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{u}) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

В (9)  $p, \nu$  – соответственно давление и кинематическая вязкость нейтральной компоненты среды, близкие при условиях (3) и (4) к соответствующим характеристикам самой среды;  $t$  – время,  $\vec{g}$  – ускорение свободного падения.

Выражение для объемной плотности сил электрического поля в (9) в случае постоянной  $\epsilon_r$  выписывается по [11]. Для несжимаемых сред второе уравнение в (9), являющееся следствием закона сохранения массы, упрощается, потому что для таких сред выполняется условие постоянства плотности  $\rho = \rho_0$  в случае изотермических режимов. Кроме того, в настоящей работе, ввиду малости в смысле (4) концентрации, возможно, имеющих неочищенных примесей  $n_p$  достаточно известные диффузионные уравнения, используемые, например, в [12] для определения ее пространственно-временных распределений, не исследуются. Такие дифференциальные уравнения с соответствующими начальными и граничными условиями можно качественно исследовать или количественно решать после решения отщепленных от них электрогидродинамических уравнений для плотности, скорости, давления и температуры среды-носителя, концентраций заряженных компонент и потенциала электрического поля. При этом можно отметить, что для широкого класса дисперсионных сред распределение концентрации примесей удовлетворяет достаточно известному уравнению конвективной диффузии. В ряде некоторых работ, например в [12], для определения  $n_p$  выписывается уравнение такой диффузии в приближении Фика. Так как частным решением такого уравнения является константа, то в отсутствие сильного приложенного электрического поля или нагрева здесь будем использовать это решение. Его физическим смыслом является выравнивание, влияющее на проводимость примесей диффузией. При этом в диссоциативном случае могут быть как среды с диссоциацией молекул среды [3], так и с диссоциацией примесей (типа слабых электролитов) [9]. Изотермические процессы при комнатных температурах, при которых в рассматриваемых средах происходит диссоциация только примесных молекул, усиленная предпробойным полем, теоретически описываются так, как и диссоциация нейтральных молекул очищенных сред. А именно в постулируемых зависимостях (2) аргументы объемных концентраций нейтралов среды – носителя и примесей меняются местами, как и в последующих выписываемых здесь формулах. Неизотермический же случай образования ионов при повышении  $T$  от комнатной до температуры частично ионизованной плазмы в настоящей работе рас-

считается только при линейной зависимости скорости ионизации (диссоциации) нейтральных молекул среды-носителя от их концентрации.

Уравнения неразрывности для заряженных компонент с учетом (8) и диффузионного закона Фика выписываются следующим образом [13]:

$$\frac{\partial n_{\pm}}{\partial t} + \text{div}[n_{\pm}(\vec{u} \pm b_{\pm}\vec{E}) - \frac{k_B T b_{\pm}}{Ze_0} \nabla n_{\pm}] = K_{D,I}(n_p, T, |\vec{E}|)n_a - K_r n_+ n_- . \quad (10)$$

При выводе этих уравнений, например в [13], используются правила дифференцирования поля вектора, меняющегося по времени в движущемся объеме сплошной среды (обоснование корректности применения приближения сплошной среды с не очень слабой степенью ионизации (диссоциации) для ее заряженных компонент описано, например, в [8]). В изотермических условиях, а также при условии малости концентрации примесей (4) и постоянной плотности  $\rho = \rho_0$  система уравнений (10) вместе с уравнениями (6) и (9) становится математически замкнутой. При условиях  $\vec{E} = 0$ ,  $T = T_0$  величину  $K_{D,I}$  можно определить по  $\sigma_0$ , где  $\sigma_0$  – проводимость при этих условиях. А именно из равенства  $W_{D,I} = W_r$  в отсутствие нагрева и сильного приложенного электрического поля (вне пограничных слоев у границ рассматриваемой области, где может играть роль диффузия)

$$C_I = \frac{\sigma_0^2 \exp\left[\frac{u_e - u_i(0)}{k_B T_0}\right]}{Z \varepsilon_r \varepsilon_0 e_0 (b_+ + b_-) \rho_0}, \quad C_D = \frac{\sigma_0^2 \exp\left[\frac{u_i(0)}{k_B T_0}\right]}{Z \varepsilon_r \varepsilon_0 e_0 (b_+ + b_-) \rho_0}, \quad u_{a,i} = u_{a,i}(|\vec{E}|);$$

$$K_{D,I}(n_p, T_0, 0) = \frac{\sigma_0^2 n_a}{Z \varepsilon_r \varepsilon_0 e_0 (b_+ + b_-) \rho_0} . \quad (11)$$

При получении (11) использованы уравнения Аррениуса (5), а также соотношение Ланжевена – Онзагера (7А). Кроме того, Онзагер в [9] обосновал эффект влияния сильного электрического поля на константу диссоциации  $K_D$  для «рыхлых» ионных пар и показал, что такое поле не влияет на коэффициент их рекомбинации. Влияние электрического поля на величину  $K_D$  может быть описано\* при условии влияния  $\vec{E}$  только на  $u_i$  (модель Френкеля-Пламли [3, 14] для случая ионной проводимости). При этом как в модели Онзагера [9], так и в используемой здесь модели Френкеля для ионизации [14] или Пламли для диссоциации [3] применяются классическая статистика и кинетика Аррениуса-Больцмана - Гиббса [15]. В теории же Онзагера [9] переход к макроскопическим величинам осуществляется после получения решения уравнения типа уравнения Больцмана [8,15] для функции распределения ансамбля образующихся при диссоциации свободных зарядов в приложенном электрическом поле, а не после решения достаточно простого уравнения (1). При получении же решения дифференциального уравнения (1) влияние электрического поля на константу интегрирования  $C$  считается, как и в [3, 4], незначительным. Учитывается только вышеописанное его влияние на потенциал ионизации (энергию активации). Тогда в предпробойных полях получается используемое ниже экспоненциальное влияние, близкое к Онзагеровскому [9].

\* Снижение потенциала ионизации  $\Delta U_i$  электрическим полем по [14] определяется простой формулой:

$$\Delta U_i = \int_{r_M}^{\infty} \frac{e_0^2 dr}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r^2}. \quad \text{Здесь } r_M \text{ – максимум потенциального барьера при кулоновском притяжении ядер и электронов в поле. При этом } \frac{e_0^2}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r_M^2} = e_0 |\vec{E}| \text{ (аналогично уменьшаются работа выхода по [18] и энергия разрыва}$$

ионной связи молекулы  $u_a$  с зарядом частиц  $|e| = Ze_0$  по [3]). Кроме того, по [3, 14, 18], такие снижения удваиваются из-за работы электрического поля. Дополнительно предполагается, что на сродство молекулы к электрону сильное электрическое поле не влияет, как и по [9], на коэффициент рекомбинации.

Для замыкания дифференциальных уравнений (9)–(11) в случае нагрева или частичного горения рассматриваемых сред следует записывать дифференциальное уравнение притока тепла и алгебраическое уравнение состояния:

$$\rho = \rho(p, T). \quad (12)$$

Для идеального и совершенного газа функция (12) записывается в виде [13]:

$$p = \rho k_B T / m_a, \quad (13A)$$

а для несжимаемой в изотермических условиях жидкости (например, трансформаторного масла) – в виде [12]:

$$\rho = \rho_0 [1 - \gamma(T - T_0)]. \quad (13B)$$

Уравнение притока тепла с учетом Джоулева нагрева для температуры  $T$  записывается без учета энергетического вклада, обусловленного поляризацией, вязкостью и химическими реакциями, следующим образом:

$$\rho c_v \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \nabla T \right) = \text{div}(\lambda(T) \nabla T) + \sigma \vec{E}^2. \quad (14)$$

В уравнении (13B) постоянный удельный коэффициент теплового расширения считается достаточно малым (при предпробойных электрических полях это уравнение можно использовать, например, для теоретического моделирования охлаждения трансформаторов, в обмотках которых температура масляных теплоносителей может достигать 373K). Теплопроводность же, например, в случае идеального газа с уравнением состояния (13A) зависит от температуры в (14) линейно. А в несжимаемых жидкостях и плотных газах, для которых целесообразно использовать уравнение состояния (13B), ее можно считать постоянной. Возможны также среды, для которых зависимость теплопроводности от температуры моделируется нелинейным одночленом, а также среды, для которых эта зависимость убывающая в определенном диапазоне роста  $T$ . Уравнения термогазодинамики без учета термоионизации (термодиссоциации) рассматриваемых сред и образования объемного заряда обычно всеми авторами записываются традиционно, как и уравнения Максвелла для макроскопического электрического поля. Уравнения термоэлектродинамики типа (10) в учебно-научной литературе выписываются по-разному. Так, вместо уравнений с диффузией (10) можно и для ионных концентраций  $n_{\pm}$  выписывать уравнения сохранения импульса типа (9) в виде закона Ньютона:

$$\rho_{\pm} \vec{a}_{\pm} = -\nabla p_{\pm} + \vec{f}_{\pm}. \quad (15)$$

В (15)  $\rho_{\pm}$  – плотности,  $\vec{a}_{\pm}$  – кинематические ускорения физически бесконечно малых объемов заряженных компонент смеси, а  $p$  и  $\vec{f}_{\pm}$  – давления и объемные плотности внешних сил, действующих на эти объемы. Причем при анализе математических зависимостей плотностей результирующих внешних сил могут по свойствам ионов учитываться или не учитываться силы, обусловленные их вязкостью. В приближении Фика [15–18] вязкость для заряженных компонент в отличие от нейтральной компоненты при условии (3) не учитывается, но следует учитывать их образование, например по [2, 19]. Выписываемые макроскопические уравнения (15) могут быть получены не только описываемыми, например в [10, 13], методами механики сплошных сред, но и из микроскопических методов при определении соответствующих моментов от кинетического уравнения Больцмана для функций распределения микрочастиц [8, 15]. При выводе выражений для плотностей сил  $\vec{f}_{\pm}$  может быть также учтено влияние на эти силы столкновений между заряженными и нейтральными компонентами, которое нередко исследуется в физике неидеальной, частично ионизованной плазмы [20]. Так, в [21] макроскопические уравнения импульсов для заряженных компонент выписаны в виде уравнений типа

$$\begin{cases} \rho_{\pm} \vec{a}_{\pm} = -\nabla p_{\pm} + n_{\pm} Z e_0 \vec{E} + \alpha_{\pm} n_{\pm} (\vec{u} - \vec{u}_{\pm}); \\ p_{\pm} = n_{\pm} k_B T. \end{cases} \quad (16)$$

В (16)  $\alpha_{\pm}$  – константы, получаемые по характеристикам столкновений заряженных ионов с нейтральными молекулами. Кроме того, уравнения состояния для ионных компонент в (16) выписаны в приближении (13A) идеального ионного газа. При переходе к неидеальному ион-ионному газу (одному из типов неидеальной плазмы) эти уравнения с учетом столкновений заряженных частиц не только с нейтралами, но и между собой могут стать в соответствии, например, с [20] более сложными. Чаще вместо (16) используются уравнения для импульсов или их потоков, либо в приближении Фика, либо по Эйлеру (без учета вязкости) вместе с соответствующими массовыми уравнениями не-

разрывности, выписанными выше. Уравнения (16) для ионных компонент частично близки и к той, и к другой моделям. Так, в (16) есть все члены, что и в импульсном уравнении с внешними силами (кроме сил вязкого трения). Именно такое приближение называется уравнениями Эйлера для невязкого газа. В отличие от уравнений Эйлера или (с учётом вязкости) Навье-Стокса, уравнения (16) содержат член, в котором учитываются столкновения незаряженных и заряженных компонент, с пропорциональным относительным скоростям количественным эффектом. Для решения задач о характеристиках нагреваемых до плазменных температур газодинамических струй в [21] предполагается локальное термодинамическое равновесие в них, при котором можно считать температуру всех компонент смеси одинаковой. То же самое относится к температуре смеси из нейтральных и заряженных компонент с частичной диссоциацией молекул или их частичной ионизацией с последующим прилипанием к другим молекулам свободных электронов.

При локальном термодинамическом равновесии ускорения  $\bar{a}_\pm = 0$  и из (16) получаются диффузионные уравнения Фика (8). В [21] эти уравнения, являющиеся в общем случае математически незамкнутыми, решались без учета диффузии, а также в случае

$$|\bar{u}_\pm| \ll |\bar{u}|. \quad (17)$$

В задачах о распределении потенциала электрического поля, образующегося в нагретых сильных ламинарных и турбулентных газодинамических струях (рис. 2), условие (17) оправдано. При этом замыканием уравнений (16) являются только уравнения Максвелла (5). В предположении квазинейтральности, более характерной для плазменных с  $T > 1000\text{K}$  сред [20, 21], уравнения (16), видимо, можно решать без использования уравнений Максвелла (5). Таким методом эти уравнения решались в [21]. В общем же случае уравнений (5) и (16) даже при известных распределениях  $u, T$  недостаточно для получения математически замкнутых уравнений термоионизации (термодиссоциации), из-за чего их следует дополнять уравнениями типа уравнений неразрывности (10).

При получении решений [21] учитывался вклад дрейфа зарядов в электрическом поле, а в [22] только вклад за счет гидродинамического переноса образующегося объемного заряда в нагретой (тонкой типа [10, 12, 23]) струе, но без условия плазменной квазинейтральности. Обобщение и уточнение результатов доклада [22], касающегося только генерации распределения электрического поля в плазменных струях, будут описаны ниже. Теоретическая же модель [21] вряд ли применима к задачам расчета характеристик скорости термоионизации (термодиссоциации) и проводимости в сильных электрических полях. В то же время описываемую здесь теоретическую модель можно применять и при расчетах таких электрокинетических и электродинамических характеристик. Для этой цели используем, как и в предыдущих работах, укороченную (упрощенную) систему уравнений (5)–(10) без учета диффузии и гидродинамического переноса зарядов. Самосогласованный потенциал  $\phi$  определяется при этом как приложенным, так и нескомпенсированным зарядом в объеме. С учетом различия электрических подвижностей  $b_\pm$  используемая система отличается\* от аналогичной системы, выписанной, например, в [16] дополнительным слагаемым:

$$\begin{cases} q = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \bar{E} \nabla \sigma / \sigma \quad (-\bar{E} \nabla \sigma / \sigma = \text{div}(\bar{E})); \\ \varepsilon_r \varepsilon \quad b_+ b_- \quad \bar{E} \nabla q = \sigma_0^2 \frac{\Psi(|\bar{E}|, T)}{\Psi(0, T_0)} - \sigma^2 + (b_+ - b_-) q \sigma; \\ \bar{E} = -\nabla \phi. \end{cases} \quad (18)$$

При получении (18) помимо соотношения Ланжевена (7А) использовано также уравнение (11). Для обобщения электродинамической системы уравнений (18) на случай неизотермического нагрева достаточно использовать наряду с (7А) еще два соотношения Ланжевена [18] о независимости от температуры произведений плотности нейтральной среды на подвижность как положительных, так и отрицательных ионов. Без учета ударной ионизации свободными электронами в сильном электрическом поле, более характерной для разреженных газов, явный вид функции добавочной ионизации (диссоциации)  $\Psi(|\bar{E}|, T)$  может быть выписан по Френкелю [14] или аналогично только при дис-

\* В постановке задач [22] о потенциале нагретых до плазменных  $T$  струй подвижности могут быть и неравными. Ниже покажем, что их отличие не влияет на величины искомых характеристик в условиях квазинейтральности. В случае же электрон-ионной плазмы [20] таким различием обусловлен электронный характер ее проводимости.

социации по [3], а также по Онзагеру [9].

Условия пренебрежения диффузионными и конвективными составляющими плотностей токов выведены в [2] и являются частью условий близости скоростей ионизации (диссоциации) и рекомбинации. При этом система электродинамических макроскопических уравнений (18) вместе с уравнениями Максвелла (5) отщепляется от гидродинамических уравнений [10, 13] Навье-Стокса и может решаться независимо. Для получения условия химического или ионизационного (диссоциативного) равновесия (за границей диффузионного погранслоя и в гидростатическом приближении) перейдем в (18) к безразмерным переменным:

$$E_* = U / L, \quad \sigma_* = \sigma_0, \quad b_* = (b_+ + b_-) / 2, \quad n_* = \sigma_* / (2b_* Z e_0);$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi / L, \quad \tilde{T} = T / T_*, \quad \tilde{\sigma} = \sigma / \sigma_*, \quad \tilde{b}_\pm = b_\pm / b_*, \quad \tilde{q} = q / (n_* Z e_0).$$

При таком обезразмеривании  $L$  – характерный размер изменения переменных,  $U$  – приложенное электрическое напряжение;  $\sigma_*$  – проводимость самонейтрализующегося фона типа проводимости квазинейтральной плазмы [20] или электролита [17], обусловленная диссоциацией (ионизацией) жидкости (плотного газа),  $T_*$  – характерная температура. Тогда система уравнений (5) и (18) выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \tilde{q} = -\delta \tilde{E} \tilde{\nabla} \tilde{\sigma} / \tilde{\sigma}, \quad \delta = \frac{2\varepsilon_r \varepsilon_0 b_* E_*}{\sigma_* L} \\ \frac{\delta^2}{4} \tilde{b}_+ \tilde{b}_- \tilde{E} \tilde{\nabla} \tilde{q} = \frac{\tilde{\Psi}(|\tilde{E}|, \tilde{T})}{\Psi(0, T_0)} - \tilde{\sigma}^2 + (\tilde{b}_+ - \tilde{b}_-) \tilde{q} \tilde{\sigma}; \\ \tilde{E} = -\tilde{\nabla} \tilde{\varphi}. \end{cases} \quad (19)$$

В (19) дифференцирование производится по безразмерной координате (характерный размер  $L$ ),  $\tilde{\Psi}(|\tilde{E}|, \tilde{T}) = \Psi(E_* |\tilde{E}|, T_* \tilde{T})$ .

В нулевом приближении по  $\delta$  ( $\delta \ll 1$ ) проводимость является известной функцией напряженности электрического поля, которое в этом же приближении не является Лапласовским. Образующийся в первом приближении по  $\delta$  объемный заряд влияет на суммарную величину  $\tilde{E}$ . Его плотность  $q$  в этом приближении определяется из уравнений, получаемых из (19). В размерных переменных

$$\begin{cases} q = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \tilde{E} \tilde{\nabla} \sigma / \sigma; \\ \sigma = \sigma_0 \frac{\Psi^{1/2}(|\tilde{E}|, T)}{\Psi^{1/2}(0, T_0)}; \\ \tilde{E} = -\tilde{\nabla} \varphi. \end{cases} \quad (20)$$

Аналогично [16] можно получить дополнительные условия диссоциативного (ионизационного) равновесия в случае движущихся сред. Для игольчатого высоковольтного электрода, как аналога точечного, ввиду его малых размеров достаточно искать решения (20), зависящие только от одной пространственной координаты  $r$ , не учитывая их изменений по широте и долготе. Различие величин  $b_\pm$  в данной задаче (в отличие от задач [21]) здесь дает вклад в члены квадратичного порядка малости по малому параметру  $\delta$ . В случаях, когда  $T = \text{const}$ , а проводимость в слабых полях  $\sigma_0$  обусловлена только примесями, безразмерный критерий подобия исследуемых явлений  $\delta$  с ростом величины  $E_*$  растет и в сильных полях становится достаточно большим. При условии  $\delta \gg 1$ , когда образование вне погранслоев объемного заряда обусловлено не только  $\tilde{\nabla} \sigma$ , но и эмиссией (инжекцией) из катода, решения (19) можно искать в виде

$$\sigma = -b_- q. \quad (21)$$

Неравенство  $\delta \gg 1$  может выполняться и при увеличении подвижности среды (в частности, подвижность увеличивается при фазовом переходе от жидкости к разреженному газу, при котором

усложняются как общая модель (в ней становится целесообразным учет образования электронов), так и вид  $\Psi$  из-за, например, возникающей ударной ионизации молекул такими свободными электронами, ускоряющимися сильными электрическими полями). Также это верно в отсутствие роста  $\sigma$  с ростом модуля напряженности поля. Решения типа (21) можно применять ввиду пренебрежения диффузией только вне окрестности высоковольтного электрода типа пограничного слоя. Такую униполярную заряженную зону в теории коронного разряда разреженных газов принято называть внешней зоной разряда [7]. При положительно заряженном (тоже иногда оптически коронирующем) электроде вместо (21) для такой зоны следует использовать класс решений:

$$\sigma = b_+ q. \quad (22)$$

Для такого класса также выполняется неравенство  $\delta \gg 1$ , и при этом отклонения от равновесной ионизации (диссоциации) велики. Тогда ток на границе как в случае (21), так и в случае (22) обусловлен лишь носителями одного знака.

В случае эмпирических граничных условий решения системы униполярных одномерных уравнений для  $E$  выписаны, например, в [24]. Для термоэмиссионных граничных условий по плотности тока

$$j_- = j(r_0) = b_- qE \quad (23)$$

на игольчатом высоковольтном катоде и  $j_+ = j(d) = 0$  на аноде одномерное решение такой системы с учетом соответствующего решения [24] выглядит следующим образом:

$$E^2(r) = \frac{C}{r^4} + \frac{I}{6 \pi \epsilon_r \epsilon_0 b_- r}. \quad (24)$$

В (24)  $I$  – сила тока, протекающего через систему “электроды-слабопроводящая среда”, который в настоящей работе, как и приложенное к электродам высокое напряжение, рассматриваются только константами по времени (течения, вызванные электрическим полем от источника переменного напряжения, описаны, например, в [6]). Константа интегрирования уравнений униполярной проводимости  $C$  в (24) определяется по работе выхода  $e_0 \chi$  в случае нагретого катода и сродству к электрону с учетом влияния электрического поля на такую работу выхода [18]:

$$I = 4\pi r^2 j, \quad \tilde{I} = \frac{I}{4 \pi r_0^{1/2} A_T T_w^2}, \quad \chi = \frac{e_0}{8 \pi \epsilon_r \epsilon_0 r_a}; \quad (25)$$

$$C = r_0^4 \left\{ \frac{16(k_B T)^4 (\pi \epsilon_r \epsilon_0)^2}{e_0^6} \left( \frac{e_0 \chi}{k_B T} - \frac{u_e}{k_B T_w} + \ln \tilde{I} \right) - \frac{\tilde{I}}{6 \pi \epsilon_r \epsilon_0 b_-} \right\}.$$

Такое граничное условие доминирования термоэлектронной эмиссии (по отношению к другим ионизационным или инжекционным поверхностным процессам) с последующим прилипанием электронов к молекулам для определения  $C$  целесообразно использовать у нагретого хотя бы до плазменных температур катода. От такого (рис. 1,а) игольчатого катода, близкого к точечному, тоже наблюдаются струи, описанные в [18]. При этом решения (24)–(25) можно использовать и для исследования процессов в окрестности пламени, помещенном в сильное электрическое поле [18], но при сохранении состава среды в такой окрестности (только для обусловленного таким пламенем частичного горения рассматриваемых сред). Решение (24) с константой интегрирования  $C$ , определяемой из эмпирических граничных условий при комнатных температурах, выписывалось наряду с [24] в большом числе публикаций, где рассматривались только среды с униполярной проводимостью, а также только электродинамические задачи без предпробойной гидродинамики нейтралов.

В рассматриваемом случае определения  $C$  по (25)  $A_T$  – константа Ричардсоновской термоэлектронной эмиссии, полученная Дешманом квантово-механическими методами;  $T_w$  – температура катода до наложения поля;  $r$  – характерный радиус электрода с приэлектродным диффузионным пограничным слоем. В настоящей работе считается, что электрический ток, протекающий по цепям, схемы которых представлены на рис. 1, слабо меняет температуру нагретого высоковольтного катода или анода. Если межэлектродное расстояние велико, то можно получить выражение для приложенного напряжения согласно (24):

$$U \approx \sqrt{\frac{2Id}{3\pi \epsilon_r \epsilon_0 b_-}}. \quad (26)$$

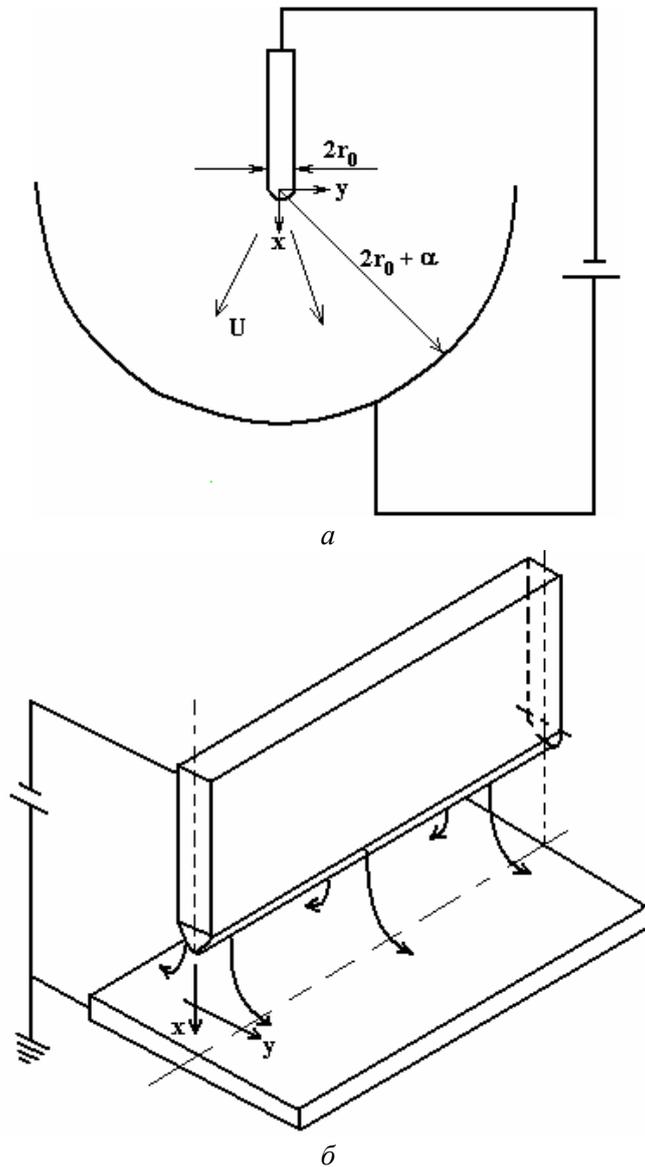


Рис. 1. Схемы осесимметричной (а) и плоской (б) предпробойных тонких струй от высоковольтных игольчатых и лезвиеобразных электродов подразделения

Обоснование правомерности применения этой формулы для холодного катода описано в ряде предыдущих работ, а также в литературе по коронному разряду разреженных газов. В случае же нагретого до плазменных температур катода достаточное условие для применения формулы (26) выведено в [1] в виде простого неравенства:  $C / r_0^3 \ll 1$ , где  $C$  определяется по (25). Это неравенство получено из (24), (25) и второй теоремы о среднем для определенного интеграла Римана. Квадратичная зависимость тока от напряжения по (26) количественно подтверждается результатами многочисленных экспериментов, при проведении которых наблюдалась “корона” у высоковольтного острия, что бывает далеко не всегда в рассматриваемых жидкостях и плотных газах. Квадратичная вольт-амперная характеристика получается и при обработке предпробойных экспериментов с диэлектрическими слабопроводящими жидкостями [6]. Она может быть подтверждена теоретически и в условиях равновесной, объемной изотермической диссоциации (ионизации) в случае  $\Psi(\vec{E}, T_0) / \Psi(0, T_0) = \Psi_0(|\vec{E}|)$ , определяемой по Френкелю [14] или по [3] с кратным ( $Z$ ) элементарным зарядом:

$$\beta(T) = \frac{(Ze_0)^{3/2}}{(\pi\epsilon_r\epsilon_0)^{1/2}k_B T};$$

$$\beta(T_0) = \beta_0; \quad (27)$$

$$\Psi_0(|\vec{E}|) = \exp(\beta_0 |\vec{E}|^{\frac{1}{2}}).$$

В этом случае для поля в окрестности высоковольтного сферического или полусферического электрода малого (по сравнению с межэлектродным расстоянием) радиуса (рис. 1) в предыдущих работах, например в [16], получено аналитическое решение уравнений (20):

$$\begin{aligned} E_0 &= |\vec{E}(r_0)|; \\ |\vec{E}| \exp(\beta_0 |\vec{E}|^{\frac{1}{2}}) &= \frac{I}{4\pi\sigma_0 r^2}; \\ \varphi_w &= \varphi(r_0'); \end{aligned} \quad (28)$$

$$|\varphi_w| = U = \left| \int_{r_0}^{\infty} E dr \right| = \frac{1}{2} \left( \frac{I}{\pi\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{8}{\beta_0} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\beta_0 E_0^{\frac{1}{2}}}{4}\right) \right] - E_0^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\beta_0 E_0^{\frac{1}{2}}}{4}\right) \right).$$

Из (28) видно, что отличие модуля напряженности самосогласованного электрического поля от величины приложенного мало только при условии

$$\beta_0 E_0^{\frac{1}{2}} \ll 1, \quad (29)$$

то есть для неразвитых по [6] течений от высоковольтных электродов. С ростом  $I$  или  $U$  вольт-амперная характеристика (28) становится нелинейной, а при величине

$$\beta_0 E_0^{\frac{1}{2}} \gg 1 \quad (30)$$

из (28) соответствующим предельным переходом получается

$$U = \frac{4}{\beta_0} \left( \frac{I}{\pi\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

При этом влияние  $r_0$  на вольт-амперную характеристику мало, как и в режимах униполярной сильно неравновесной ионизации (диссоциации), для которых это следует из (28).

Сохранение квадратичной вольт-амперной характеристики в условиях влияния гидродинамического переноса заряда при электрическом ветре жидких слабопроводящих сред на его пространственное распределение экспериментально показано в [6] не только для униполярно заряженных жидкостей. При этом по [6] такая же эмпирическая зависимость от  $U$  наиболее характерна и для скоростей развитых течений. Для неразвитых течений эмпирический показатель степени по [6] в зависимостях осевой скорости струй (рис. 1,а) от напряжения больше. Ниже это будет показано и теоретически.

Для таких течений  $u(x,0) \sim u^n$ ,  $n=3$  по [6]. Теоретически уменьшение такого показателя степени при увеличении  $U$  и переходе при этом от неразвитых течений электрического ветра к развитым может быть получено в условиях равновесной ионизации (диссоциации), для которых вольт-амперная характеристика определяется формулами типа (28), (31). В [16] и в других предыдущих статьях в этих условиях использовалась аналогия электрического ветра и гидродинамической затопленной струи. То есть струи, истекающей из сопла в пространство, заполненное той же средой и не обтекающей стенки или другие твердые тела типа цилиндров, эллипсоидов, конусов после истечения. Использовать такую аналогию впервые, видимо, предложил Остроумов [7], но в тех случаях, когда струя является дополнительным источником массы, такая аналогия по [6] неприменима. Она может быть применима для структуры течения (например, для тонких струй Ландау [10]) со слабым влиянием малой по сравнению с массой среды дополнительной массой, вносимой струей; но, с другой стороны, не являющаяся источником массы струя электрического ветра может сопоставляться с тонкими струями, обусловленными точечным источником импульса [10], только тогда, когда плотность кулоновских сил резко убывает с расстоянием от близкого к точечному активного высоковольтного электрода. Тогда вычисление векторной константы импульса струи  $P$  по [10], при вычислении скоростей которой характеристики источника массы предполагаются близкими к нулю, сводится к вычислению интеграла

$$P = \int_V q \vec{E} dV = \vec{F}_e, \quad (32A)$$

где  $V$  – объем полупространства в направлении от игольчатого или полусферического высоковольтного электрода (рис. 1,а). Математическое доказательство равенства (32А) для класса обобщенных функций приведено в предыдущих работах автора настоящей статьи, хотя само утверждение высказывалось и в публикациях других авторов, например в [12]. Так как в сферических координатах  $dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\zeta$ , то такой интеграл сходится в случае

$$|q\vec{E}| < \frac{F}{r^{3+n}}, \quad (32B)$$

где  $n > 0$ ,  $F$  – постоянная мажоранта,  $r$  – расстояние до центра активного электрода, близкого при его малых размерах по топологии к точечному (сферическому, малых размеров) или радиальному координату. Равновесные решения (28) условию (32) удовлетворяют, а сильно неравновесные (23) – нет. Поэтому в [25], где рассматривались униполярно заряженные струи в сильном неоднородном электрическом поле (рис. 1), структура полученных осесимметричных решений оказалась более сложной, чем в [1, 2], где применялись решения Ландау-Шлихтинга [11, 12] и импульс  $P$  был вычислен по решениям (28) с использованием (5).

Отметим, что можно ставить задачи о более строгом, чем Аррениусовский, микроуровневом расчете кинетики зарядообразования с дальнейшим использованием результатов в электрогидродинамике. Вместе с тем и обоснованию уравнений Аррениуса (5) посвящено немало работ (см., например, [26]). Ввиду этого и формулы для скоростей плоских струй, типа представленных на рис. 1,б, тоже выводились при проведении настоящей работы с использованием (5). Они будут приведены в заключительном разделе настоящей статьи. По поводу же аналогии с гидродинамическими струями отметим еще, что в магнитной гидродинамике, например в [12], она тоже широко используется, но критерия типа (32) точечности Амперовой силы, вызывающей магнитогидродинамические струи, не получено. В предельном случае (32А) для скоростей неразвитых струй получается по [2]  $u \sim U^{5/2}$ , что согласуется с результатами опытов Гиббинса [19]. В другом предельном случае (32В) и  $d \gg r = \sqrt{x^2 + y^2} \gg r_0$  для предпробойных течений вязких жидкостей для струи Шлихтинга (рис. 1,а) [12] получаются следующие формулы:

$$P = 2\pi\rho_0 \int_0^\infty u_x^2 y dy = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 U^2}{8}; \quad (33A)$$

$$u_x = \frac{3P}{8\pi\rho_0 x (1 + \xi^2 / 4)^2}, u_y = \frac{\sqrt{3P} (\xi - \xi^3 / 4)}{2\sqrt{\pi\nu\rho_0} x (1 + \xi^2 / 4)^2}, \xi = \frac{\sqrt{3P}}{2\sqrt{2\pi\rho_0\nu} x}. \quad (33B)$$

При этом нередко наблюдаемая [4, 6] квадратичная зависимость по  $U$  или линейная по  $I$  получается из (32А) теоретически для осевой скорости развитых струй. Кроме того, формулы (33А) подтверждают наблюдаемое в [6] слабое влияние (рис. 1,а) величины радиуса кривизны тонкого высоковольтного электрода на величины скоростей предпробойных течений рассматриваемых сред от такого электрода. А наблюдаемое незначительное влияние  $Z$ , подтверждаемое формулами (33), на величину таких скоростей свидетельствует о возможности применения этих формул для расчёта скоростей без дополнительного определения этой исходной константы расчетным или опытным методом по составу молекул среды (ее диэлектрическая проницаемость считается исходной справочной константой, как подвижность и низковольтная проводимость). Молекулярный (атомарный) состав среды не учитывается и при выписывании макроскопических уравнений расчета электродинамических характеристик во внешних зонах униполярной и биполярной короны [24, 27]. Но при этом можно без учета такого состава задать только эмпирические граничные условия у коронирующих электродов.

Отметим, что для струй Шлихтинга структура (33В) сохраняется и для турбулентных режимов с заменой кинематической вязкости на кажущуюся турбулентную вязкость. Тогда определяемый по (33А) импульс  $P$  газодинамических (плазменных) струй типа струи реактивных двигателей (рис. 2), в соответствии с (32А), равен их тяге, что легко подтверждается опытными данными [21] у щели сопла, приведенными ниже. При этом и для нагретых сред нередко можно использовать уравнения состояния (13В). В частности, в случае бесконечно тонких (слабо расширяющихся) струй таких сред (в этом случае малым можно считать удельный коэффициент объемного расширения самой струи). Оценки, проведенные с помощью решений (33) для таких струй в условиях опытов [21], показывают, что плотностью гравитационной силы в уравнении импульсов (9) можно пренебречь по сравнению с инерциальным членом в этом уравнении. Для таких оценок бралась справочная величина

на вязкости нагретого воздуха (0,015 St.), используемого в опытах [21], содержащаяся только в полученных ниже расчетных формулах для распределения искомого потенциала вдоль плоских струй. Формулы же для определения установившегося распределения абсолютной температуры  $T$  при постоянной теплопроводности в таких струях с учетом (33В) получены из (14) в [23]. Для осевого распределения электрического потенциала из (6) при близких к (17) условиям вдоль оси таких струй и выполнении соотношений

$$|\sigma \vec{E}| \ll |q \vec{u}|, q = q(x), \vec{j} = q \vec{u}, I = \int_s q \vec{u} d\vec{S} = 2\pi q \int_0^\infty u_x y dy \quad (33С)$$

получаем одномерное уравнение Пуассона, используя также закон сохранения заряда в интегральной форме:

$$\int_s \vec{u} d\vec{S} = J = 0,404 \sqrt{\frac{P}{\rho_0}} x ;$$

$$qJ = I = S_c A_T \exp\left(\frac{U_e - e_0 \chi}{k_B T_c}\right); \quad (34)$$

$$S_c = \pi(R_c + r_c) l_c, \Delta\varphi = -\frac{I}{0,404 \varepsilon_r \varepsilon_0 \sqrt{\frac{P}{\rho_0}} x}.$$

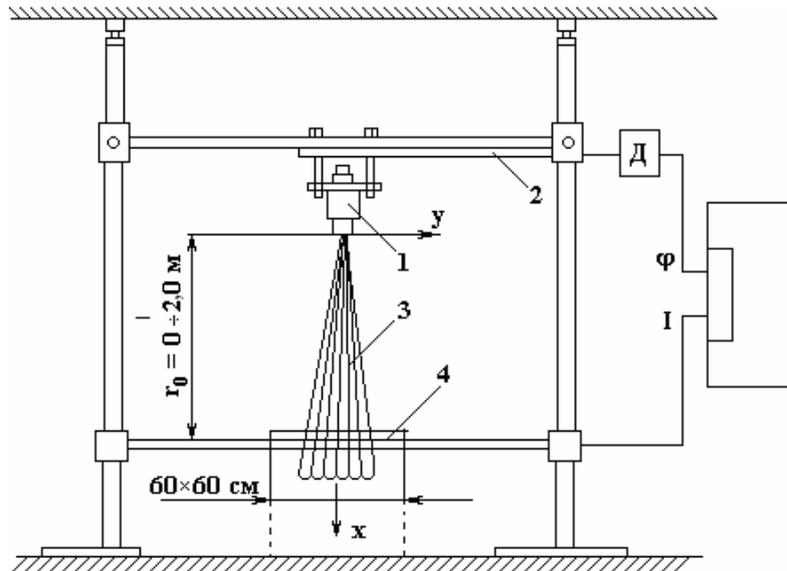


Рис. 2. Схема опытов [21] по определению пространственного распределения электрического потенциала вдоль плазменной осесимметричной тонкой струи: 1 – термодиффузор, 2 – фиксатор, 3 – струя, 4 – плоский коллектор-электрод

Для этого уравнения граничные условия можно выписать в стандартном виде:

$$\varphi(S_c) = \varphi(0) = 0, \varphi(d_m) = \varphi_0;$$

$$-h_c \leq x \leq d_m, h_c = \sqrt{l_c^2 - (R_c - r_c)^2}. \quad (35)$$

В (35) указана также область определения осевой координаты (при этом  $r$ ,  $R$ ,  $l$  и  $h$  – радиусы, образующая и высота соплового усеченного конуса). Радиус окружности щели сопла (критического сечения) для тонких струй считается малым по сравнению с размерами среды, в которую эта струя истекает. Кроме того, в (35)  $d$  – максимальное эмпирическое расстояние между диффузором сопла и сеточным электродом-коллектором (рис. 2) в опытах [21]. Вопрос о замене эмпирического граничного условия на расстоянии  $d$  от сопла более строгим (из теоретических соображений) пока не решен. Вместе с тем полный электрический ток в настоящей работе, в отличие от ряда предыдущих публикаций, определялся не эмпирически, а по модификации (34) известной формулы Ричардсона-Дешмана для плотности тока эмиссии из металлического сопла. Кроме того, при таком теоретическом моделировании из условия прилипания рассматриваемых вязких сред к боковой поверхности

сопла следует, что ток термоэлектронной эмиссии у этой металлической поверхности равен конвективному электрическому току на основном участке струи. При этом, в отличие от формулы (25), влияние электрического поля у сопел плазменных струй на работу выхода электронов из их поверхностей можно не учитывать ввиду образования в опытах [21] невысоких полей. Используемая модификация термоэмиссионной формулы Ричардсона-Дешмана позволяет получать итоговые формулы для расчетов пространственного распределения искомого потенциала с учетом влияния на него энергии сродства к электрону молекул движущейся нагретой среды. При  $I$ , не меняющемся по закону сохранения заряда, определяемом по (33), решение (34) с граничными условиями (35) в одномерном приближении получается следующим:

$$\varphi(x) = \frac{\varphi_0 x}{d_m} - \frac{Ix \ln(x/d_m)}{0,404 \sqrt{\frac{P}{\rho_0}} \varepsilon_r \varepsilon_0}, \quad (36)$$

причем расход  $J$  в (34) выписан по формуле Шлихтинга в случае сильной (турбулентной) струи, вывод которой приведен, например, в [28].

В отличие от полученных ранее решений выписываемых макроскопических уравнений (16), полученных в [21], распределение (36) позволяет рассчитать наблюдаемый в опытах [21] максимум в пространственном распределении потенциала. При этом экстремальное значение согласно (36) получается на расстоянии от источника, примерно таком же, как и в опытах [21],

$$\frac{d_m}{\exp\left(1 - \frac{1}{\tilde{I}}\right)}, \text{ где}$$

$$\tilde{I} = \frac{Id_m}{0,404 \varphi_0 \varepsilon_r \varepsilon_0 \sqrt{\frac{P}{\rho_0}}}. \quad (37)$$

Отметим, что в экспериментах [21] вносимая струей масса слабо влияла на массу вовлекаемой ею в движение струи ввиду малости объема сопла по сравнению с объемом рассматриваемой среды (рис. 2). Поэтому теоретические решения уравнений движения вязких сред [10, 12], полученные аналитически, как указано, например в [28], в приближении тонкой струи применяются в настоящей работе для описания электроконвективных струй как при комнатных температурах, так и нагретых до плазменных температур. График пространственного распределения (36) представлен на рис. 3 в виде теоретической кривой  $I$ , рассчитанной для условий опытов [21] с сеточным электродом. Температура струи продуктов частичного сгорания у сопла равнялась 2370 К, а ее скорость истечения из него – 1380 м/с, что свидетельствует о правомерности использования формул для турбулентной струи при расчетах искомого потенциала. Критический радиус усеченного конуса сопла равнялся 2,2 мм, образующая такого конуса была равной 75 мм, а высота сопла – 50 мм. Тяга струи – 230 Н. Распределение потенциала по оси струи определялось от критического сечения сопла до расстояния 2 м от него. Так как диэлектрическая проницаемость воздуха при комнатной температуре равняется 1,1, то есть близка к 1, то такой она предполагалась и в нагретой воздушной струе. Плотность частично сгоревшего воздуха считалась равной 1,3 в системе СИ. Работа выхода электронов из поверхности стального сопла по справочной литературе выбиралась равной 4,36 Эв, сродство молекул кислорода в воздухе к электрону – 1,8 Эв. Отметим, что простой сравнительный анализ величин работ выхода, потенциалов ионизации и энергий сродства к электрону описан, в частности, в [20] (в диссоциативном случае аналогами тока термоэмиссии и работы выхода из поверхности электрода являются, например, по [17] ток обмена и электрохимический потенциал у электродной поверхности). Но для слабодиссоциирующих при комнатных температурах сред анализ токов обмена и электрохимических потенциалов проведен значительно менее полно, чем в [17] и других монографиях по электрохимии для случая сильных электролитов. Для струй при плазменных  $T$  в настоящей работе, как и в предыдущих публикациях, теоретически анализировались только опыты с сеткой (рис. 2, 3). Практическое применение описанных теоретических результатов, видимо, вполне осуществимо как в установках, давно уже действующих в промышленности, таких как электрофильтры или электродегидраторы нефти, а также в авиационной технике (реактивные двигатели), так и при разработке конструкций новых электрогидродинамических устройств, например таких, как электрогидродинамические насосы [29] и генераторы [30]. В устройствах, применяемых в промышленности, расчеты объемных зарядов, электрических полей и вольт-амперных характеристик по предлагаемым здесь методикам (как синтезу методик

[31] и [24]) могут привести к уточнению величин потребляемой электрической мощности и энергии и к использованию для диагностики предотвращения электрических пробоев. Один из примеров такой диагностики с помощью решений газодинамических задач [33] о взрыве будет описан ниже. При этом данные для исходных величин (например, подвижности, диэлектрической проницаемости) могут быть заимствованы из [32].

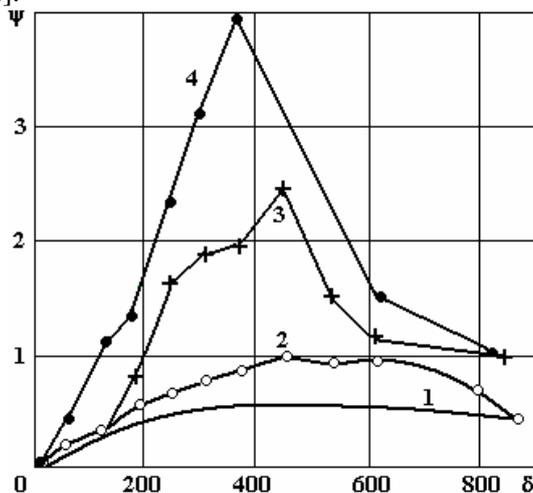


Рис. 3. Распределение потенциала электрического поля в струе вдоль оси ( $\Psi = \varphi / \varphi_{\max}$ ,  $\delta = x / r_e$ ). 1 – теоретическое решение; 2 – эксперимент с сеточным электродом; 3 – эксперимент с металлическим электродом; 4 – эксперимент с жидким электродом (вода)

Для внедряемых в промышленность электрогидродинамических насосов и генераторов при их конструировании расчеты генерируемых ими напоров, расходов и мощностей можно проводить, используя предлагаемые здесь аналитические формулы для определения электрических полей, давлений и скоростей течений, обусловленных полями тонких высоковольтных электродов. Описание одной из конструкций электрогидродинамического насоса с таким использованием и методикой расчета его напора и расхода изложено, например, в работе [29], где показана целесообразность применения высоковольтных лезвиеобразных электродов, а не игольчатых, как в [30]. Аналогично в [1, 22] анонсирована целесообразность применения плоских плазменных струй как электрогидродинамических генераторов при сопоставлении максимумов расчетных потенциалов в таких и аналогичных осесимметричных струях. В настоящей статье покажем это на примере плоского сопла и условий опытов, которые можно провести с плоской струей по аналогии с проведенными для осесимметричного сопла и описанными в [21].

В случае плоской струи рассмотрим только сеточный электрод-коллектор. Граничное условие на нем зададим таким же, как и в осесимметричном случае, на расстоянии 2 м от сопла. Скорость струи у сопла будем тоже считать равной 1380 м/с. Такой же зададим и тягу струи. Размеры же плоского сопла задавались следующими: площадь каждой квадратной пластины принималась равной 100 квадратных сантиметров, а расстояние между ними – 2,2 миллиметра, как и малый радиус конического сопла (усеченного конуса) в опытах [21]. Длина плоского сопла выбиралась 0,1 м, что гораздо больше расстояния между пластинами. Остальные исходные данные для расчетов по полученным ниже формулам в плоском случае выбирались такими же, как и в описанном выше осесимметричном. Кроме этих данных в плоском случае следует по [28, 34] указывать импульс и ток на единицу длины узкой щели сопла ( $P/L$  и  $I/L$ ). Формулы для скоростей такой плоской ламинарной струи, полученные Шлихтингом [28, 34], аналогичные (33), выглядят следующим образом (длина плоского сопла  $L$  при их применении должна существенно превышать ширину щели):

$$u_x = 0,454 \left( \frac{P}{\rho_0 L} \right)^{2/3} (v x)^{-1/3} (1 - t h^2 \xi);$$

$$u_y = 0,5503 \left( \frac{P v}{x^2 L} \right)^{1/3} [2 \xi (1 - t h^2 \xi) - t h \xi];$$

$$\xi = 0,2572 \left( \frac{P}{\rho_0 v^2 L} \right)^{1/3} \frac{y}{x^{2/3}};$$

$$\frac{J}{\rho_0 L} = \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dy = 0,3019 \sqrt[3]{\frac{P \nu x}{(\rho_0 L)^4}}. \quad (37A)$$

При этом в отличие от осесимметричной струи (рис. 2) в (37)  $x$  и  $y$  не цилиндрические, а декартовы координаты. Процедура получения плоскоструйного решения одномерного уравнения Пуассона для электрического потенциала вдоль оси струи, аналогичного (34) с граничными условиями типа (35), тоже состоит в его двукратном интегрировании. Аналогичное (36) решение в безразмерном виде выглядит так:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\bar{x}) &= \bar{x}[0,9\bar{I}(1-\bar{x}^{-2/3})+1]; \\ \bar{\varphi} &= \varphi / \varphi_0; \\ \bar{I} &= \frac{Id^{5/3}}{\varepsilon_r \varepsilon_0 \varphi_0 L^{2/3}} \left(\frac{\rho_0}{\nu P}\right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (38)$$

Это тоже немонотонная функция с одним экстремумом. Расстояние, на котором достигается максимальное относительно сопла значение  $\varphi$  примерно такое же, как и в случае осесимметричной струи. Если принять для эмпирического граничного (по [21]) условия  $\varphi_0=50$  В на расстоянии 2 м от сопла, то для максимального потенциала получается  $\varphi_m=500$  В, что намного выше, чем в осесимметричном случае с таким же граничным условием. График размерного распределения  $\varphi$ , определяемого по (38), представлен на рис. 4. График построен по справочным и опытным из [21] исходным данным. Постоянство кинематической вязкости среды, постулируемое в расчетах в диапазоне температур от комнатных до плазменных, следует из соотношений Вальдена [32] о постоянстве произведений соответствующей динамической вязкости и подвижностей зарядов и аналогичных соотношений Ланжевена [18] для плотности среды и подвижностей, уже упомянутых выше.

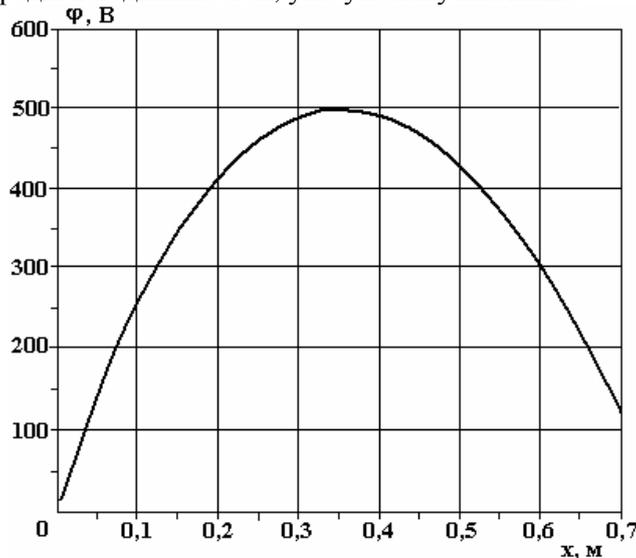


Рис. 4. График теоретического решения (38) для стационарного распределения потенциала электрического поля вдоль плоской плазменной струи

В отличие от плоских плазменных струй для предпробойных струй от тонкого лезвиеобразного электрода (рис. 1,б) формулы (37) можно применять только в случае малых отклонений от квазинейтральности среды. Покажем это аналогично описанному выше осесимметричному случаю. Импульс плоской струи:

$$P / L = \int_S f_q ds, \quad (39)$$

где  $S$  (рис. 1,б) – площадь сечения, нормального струе. В случае плоских предпробойных струй несобственный интеграл (39) сходится при условии

$$\begin{aligned} |q\bar{E}| &< \frac{F}{Lr^{2+\chi}}; \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\chi > 0.$$

Как и в осесимметричном случае, условию (40) удовлетворяет квазинейтральное решение для  $q$ . Тогда для  $E$  в одномерном приближении получается

$$E \exp(\beta_0 E^{1/2}) = \frac{I}{2\pi\sigma_0 r L} \quad (41)$$

при положительном знаке тонкого высоковольтного электрода (рис. 1,б). В случае (41) из (30) и (38) получается для импульса предпробойной плоской струи

$$P = \frac{2\varepsilon_r \varepsilon_0 I}{\pi\sigma_0 \beta_0^2}. \quad (42)$$

Подстановка (42) в (37) приводит, как и в осесимметричном случае, к возрастающим зависимостям компонент скоростей струй от тонких высоковольтных электродов от измеряемого тока. При этом дополнительным ограничением предложенной теории предпробойных струй, например в осесимметричном случае, является малость максимального радиуса ( $d \gg r_{\max}$ ) зоны микропробоев, наблюдаемых в окрестностях тонких высоковольтных электродов, по сравнению с межэлектродным расстоянием (рис. 1,а). Тогда для  $U$  получается оценка:

$$U \ll \frac{d}{Ze} \sqrt[3]{\frac{100\pi k_B^2 p_0 T_0^2}{21}}. \quad (43)$$

В формуле (43)  $p_0$  – давление рассматриваемой среды при комнатных температурах. Именно это давление содержится в более общей формуле Седова [33], из которой и получается условие (43). Такая формула получается в [33] из решения задач о точечном взрыве для сред с уравнением состояния (13В). При применении таких решений для рассматриваемых вязких и теплопроводных сред должно удовлетворяться еще одно условие:

$$\varepsilon_r \varepsilon_0 / \sigma_0 \ll \max(d^2 / \nu, d^2 / a). \quad (44)$$

В (44) коэффициент температуропроводности

$$a = \lambda_0 / c_V \rho_0,$$

причем теплопроводность предполагается не зависящей от  $T$ . Отметим, что в [35] энергия электрического пробоя считается равной  $QU$ , где

$$Q = \int_V q dV. \quad (45)$$

В (45)  $V$  – объем пространства. При написании настоящей статьи эта энергия вычислена как интеграл от объемной плотности электростатической энергии, что приводит к поправочному коэффициенту в (43).

В заключение статьи автор благодарит участников электрогидродинамической [16] и 26-й магнитогидродинамической [22] конференций за полезное обсуждение результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Апфельбаум М.С.* О распределении электрических полей в некоторых типах стационарных слабоионизованных струй // *Электронная обработка материалов*. 2007. № 1. С. 31–46.
2. *Янтовский Е.И., Апфельбаум М.С.* О насосном действии тонкого высоковольтного электрода в слабопроводящей диэлектрической жидкости // *Журнал технической физики*. 1980. Т. 50. Вып. 7. С. 1511–1520.
3. *Plumley H.J.* Conduction of electricity by dielectric liquids at high field strength // *Physical review*. 1941. Vol. 50. № 2. P. 200–207.
4. *Петриченко Н.А.* Термические явления, сопровождающие электрический ветер в жидкостях // *Электронная обработка материалов*. 1973. № 6. С. 44–45.
5. *Любимов Г.А.* Об условии пробоя приэлектродного слоя в потоке ионизованного газа // *Журнал прикладной математики и технической физики*. 1973. № 3. С. 16–23.
6. *Стишков Ю.К., Остапенко А.А.* Электрогидродинамические течения в жидких диэлектриках. Л., 1989.
7. *Болога М.К., Гросу Ф.П., Кожухарь И.А.* Электроконвекция и теплообмен. Кишинев, 1977.

8. Гогосов В.В., Полянский В.А., Семёнова И.П., Якубенко А.А. Уравнения электрогидродинамики и коэффициенты переноса в сильном электрическом поле // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1969. № 2. С. 31–45.
9. Onsager L. Deviation from Ohm's law in weak electrolytes // Journal of chemical physics. Vol.2, № 9. P. 599–615.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М., 1954.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М., 1957.
12. Бояревич В.В., Фрейберг Я.Ж., Шилова Е.И., Щербинин Э.Е. Электровихревые течения. Рига, 1985.
13. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. М., 1994.
14. Френкель Я.И. К теории электрического пробоя в диэлектриках и электронных полупроводниках // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 1938. Вып. 12. С. 1293–1301.
15. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Т.2. М., 1971.
16. Apfelbaum M.S. The prebreakdown electrohydrodynamic equations for liquid insulators // Proceedings of 7<sup>th</sup> international conference: "Modern problems of Electrophysics and Electrohydrodynamics of liquids", Saint-Petersburg, 2003, p.9–13.
17. Дамаскин Б.Б., Петрий О.А. Введение в электрохимическую кинетику. М., 1975.
18. Лаутон Дж., Вайнберг Ф. Электрические аспекты горения. М., 1976.
19. Gibbings J.C., Mackey A.M. Charge convection in electrically stressed low-conductivity liquids. Part 3: Sharp electrodes // Journal of electrostatics. 1981. Vol. 11. P. 119–134.
20. Храпак А.Г., Фортвов В.Е., Якубов И.Т. Физика неидеальной плазмы. М., 2004.
21. Усачёв В.К., Ставров Ю.П., Тамбовцев В.И. Электрокинетическое явление в струе ионизированных продуктов сгорания // Тезисы докладов научно-практического семинара по электрофизике горения. Караганда, 1985. С. 66–67.
22. Apfelbaum M.S. The space electric field distribution in thermoionization strong jets // Proceedings of fifteenth international conference on MHD energy conversion and sixth work-shop on magneto-plasma aerodynamics, Moscow, 2005. Vol. 1. P. 196–197.
23. Лойцянский Л.Г. Ламинарный пограничный слой. М., 1962.
24. Тиходеев Н.Н. Дифференциальное уравнение униполярной короны и его интегрирование в простейших случаях // Журнал технической физики. 1955. Т. XXV. Вып. 8. С. 1449–1457.
25. Жакин А.И. Об электроконвективных струях в жидких диэлектриках // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 6. С. 13–19.
26. Штиллер В. Уравнение Аррениуса и неравновесная кинетика. М., 2000.
27. Тиходеев Н.Н. Взаимосвязь вольт-амперных характеристик коронного разряда при постоянном напряжении для различных систем с проводами // Известия Российской академии наук. Энергетика, 2002. № 2. С. 85–95.
28. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М., 1978.
29. Апфельбаум М.С. Об одной методике расчета характеристик электрогидродинамических течений и насосов // Электронная обработка материалов. 1990. № 6. С. 39–42.
30. Бортников Ю.С., Рубашов И.Б. Электрогазодинамические эффекты и их применение // Магнитная гидродинамика, 1975. № 1. С. 23–34.
31. Остроумов Г.А. Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. М., 1979.
32. Адамчевский И. Электрическая проводимость жидких диэлектриков. Л., 1972.
33. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. М., 1977.
34. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1974.
35. Апфельбаум М.С. Задача о точечном электровзрыве слабопроводящих сред // Электронная обработка материалов. 2000. № 6. С. 31–42.

Поступила 31.10.08

### Summary

The analytical method for calculation of the space electric distribution at the stationary weakly ionized jets is described. The electric wind and thermal ionization jets are considered. The calculations of the field distributions are compared with experiments. The results may be used for the electrification diagnostics at the electrohydrodynamic generators and pumps.