

Т.А. Манько, Н.А. Задоя

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА НАГРЕВА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
СТЕКЛОПЛАСТИКОВ РАДИАЦИОННЫМИ
МЕТОДАМИ ОБЛУЧЕНИЯ**

*Днепропетровский национальный университет,
пер. Научный, 13, г. Днепропетровск, 49050, Украина, naza@ua.fm*

Использование энергии ускоренных электронов для отверждения полимерных композиционных материалов позволяет значительно интенсифицировать процесс отверждения. Сложность вызывает оптимизация температурного режима. Одним из путей решения поставленной технологической задачи является создание математической модели тепловых процессов в стеклопластике при радиационном отверждении [1].

В работе исследовали процесс нагрева ускоренными электронами стеклопластиков КТ-11-ТОВА+ЛБС-4 толщиной от 0,5 до 10 мм.

Задача поставлена следующим образом. Цилиндр бесконечной длины с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 1). Вне его располагается источник электронов, который облучает параллельным пучком заданной ширины b , вызывая нагрев. Мощность теплового источника Q на единицу длины цилиндра может регулироваться энергией электронов E и током пучка I . Нагретые участки цилиндра передают тепло холодным в результате процесса теплопроводности.

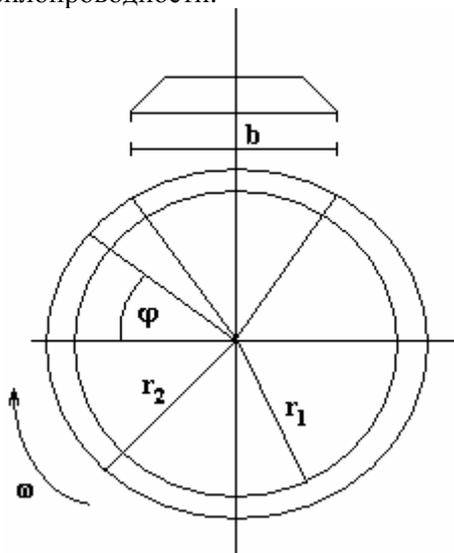


Рис. 1. Схема процесса облучения цилиндра ускоренными электронами

Для решения задачи распределения температуры в цилиндрическом стеклопластике используется уравнение теплопроводности [2]:

$$\rho c \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + q, \quad (1)$$

где T – температура, К; τ – время, с; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/м²; ρ – плотность, кг/м³; c – теплоемкость, кДж/кг; r , φ – радиальная и окружная координаты; q – выделяемое тепло вследствие облучения электронами.

Для описания процесса нагрева цилиндра пучком электронов имеют место граничные условия третьего рода вида на внутренней поверхности:

$$\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \alpha_{k_1} \cdot (T_f - T_c), \quad (2)$$

на наружной поверхности

$$-\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = (\alpha_{k_2} + \alpha_{\lambda'}) \cdot (T_f - T_c), \quad (3)$$

где T_f – температура поверхности; T_c – температура окружающей среды, К; α_{k_1} , α_{k_2} – коэффициенты конвективной теплоотдачи, считающиеся заданными; $\alpha_{\lambda'}$ – коэффициент лучистой теплоотдачи.

Существующие методы решения краевых задач можно классифицировать по различным признакам [2].

Распределение температуры в цилиндре нами определялось методом разделения переменных в предположении, что физические параметры и коэффициенты теплопроводности λ_r , λ_φ , λ_z не зависят от координат. Целью решения задачи является оценка решений, полученных другими методами, поэтому данное предположение считаем оправданным.

Аналитическое решение данной задачи указанным методом в общем случае представлено в [3], согласно ему получаем следующее выражение для распространения температуры T в цилиндре:

$$T(\tau, r, \varphi) = T_1(\tau, r, \varphi) + T_2(\tau, r, \varphi) + T_3(\tau, r, \varphi), \quad (4)$$

где $T_1(\tau, r, \varphi)$ – член, зависящий от начальной температуры; $T_2(\tau, r, \varphi)$ – член, зависящий от граничных условий на внутренней и наружной поверхностях цилиндра; $T_3(\tau, r, \varphi)$ – член, описывающий выделение тепла тормозимыми электронами.

Численное решение осуществляется методом конечных разностей (методом сеток). Область непрерывного изменения аргументов заменяют расчетной сеткой – дискретным множеством точек (узлов). Вместо функции непрерывных аргументов вводят функции дискретных аргументов – сеточные функции, определяемые в узлах сетки. Частные производные, входящие в дифференциальное уравнение и граничные условия, заменяют (аппроксимируют) разностными соотношениями. В результате такой замены краевая задача с частными производными сводится к системе разностных (алгебраических) уравнений.

Для цилиндра конечно-разностная сетка выглядит следующим образом (рис. 2):

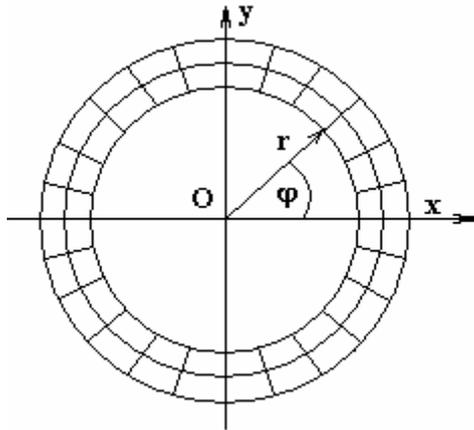


Рис. 2. Нанесение конечно-разностной сетки

$$i=1, 2, \dots, P+1; h_{z_1} = \frac{1}{P} \ln \frac{Z_1}{Z_0}; j=1, 2, \dots, N+1; h_{z_2} = \frac{1}{N} \ln \frac{Z_2}{Z_1}; m=1, 2, \dots, M; h_\varphi = \frac{2r}{M}; k=1, 2, \dots; h_x = \frac{\tau_k}{L},$$

где P , N – числа разбиений в радиальном направлении для внутреннего и наружного цилиндров; M – число разбиений в окружном направлении; L – число временных интервалов.

Известно, что наибольшей устойчивостью обладает неявная схема метода конечных разностей, при которой при переходе от временного слоя k к временному слою $k+1$ дискретизация для пространственных переменных осуществляется для слоя $k+1$. Это выглядит так:

$$\frac{T_{i,m}^{k+1} - T_{i,m}^k}{h_\tau} + \omega \frac{T_{i,m}^{k+1} - T_{i,m-1}^{k+1}}{h_\varphi} = \frac{\lambda_r^{(1)}}{e^{2zi} \rho_1 c_1} \left(\frac{T_{i+1,m}^{k+1} - 2T_{i,m}^{k+1} + T_{i-1,m}^{k+1}}{h_z^{(1)2}} + \frac{T_{i,m+1}^{k+1} - 2T_{i,m}^{k+1} + T_{i,m-1}^{k+1}}{h_\varphi^2} \right) + \frac{g_{i,m}}{\rho_1 c_1}; \quad (5)$$

$$\frac{T_{j,m}^{k+1} - T_{j,m}^k}{R_\tau} + \omega \frac{T_{j,m}^{k+1} - T_{j,m-1}^{k+1}}{h_\phi} = \frac{1}{e^{2zi} \rho_2 c_2} \left(\lambda_r^{(2)} \frac{T_{ji+1,m}^{k+1} - 2T_{j,m}^{k+1} + T_{j-1,m}^{k+1}}{h_z^{(2)2}} + \lambda_\phi^{(2)} \frac{T_{j,m+1}^{k+1} - 2T_{j,m}^{k+1} + T_{j,m-1}^{k+1}}{h_\phi^2} \right) + \frac{g_{j,m}}{\rho_2 c_2}. \quad (6)$$

Здесь формула (5) относится к оправке, а формула (6) – к композиту. Поскольку оправка предполагается из изотропного материала, для нее λ_r и λ_ϕ равны.

В граничных узловых точках конечно-разностные соотношения представлены следующим образом. На нижней кромке оправки или композита при отсутствии оправки

$$T_{1,m}^{k+1} = \frac{T_c + T_{2m}^{k+1} \cdot a_{1,m} + \frac{q_1^m}{\rho c}}{1 + a_{1,m}}, \quad (7)$$

где $a_{1,m} = \frac{\lambda_r}{\alpha_{k_1} h_z e^z}$.

Здесь переменные T_c , ρ , c , q , λ_r и h_z имеют индексы для оправки (1) или для композита (2). Величина $\exp(z)$ принимает значения $\exp(z_0)$ для оправки и $\exp(z_1)$ для композита. Член c q добавлен для придания схеме большей консервативности, то есть способности соответствовать закону сохранения энергии.

На верхней кромке композита

$$T_{N+1,m}^{k+1} = \frac{\frac{qN_1^m}{2\rho_2 c_2} + T_c^{(2)} + T_{N,m}^{k+1} \cdot a_{N+1,m}}{1 + a_{N+1,m}}, \quad (8)$$

где $a_{N+1,m} = \frac{\lambda_z^2}{(\alpha_{k_2} + \alpha_{л}) h_z e^{z_2}}$.

Анализ температурных полей в отвердеваемом ускоренными электронами стеклопластиковом цилиндре, проведенный с помощью описанных методик, показал, что данную модель можно значительно упростить и привести ее в вид, удобный для инженерного применения.

Исследования, проведенные на рассмотренных выше численных и аналитических моделях, описывающих процесс распределения температуры в реальных цилиндрах вследствие облучения их электронами, показали, что члены дифференциального уравнения, зависящие от λ , вносят незначительный вклад в рассматриваемый процесс. Это дает возможность упростить дифференциальное уравнение. Если представить цилиндр одномерной линией, то баланс температуры в точке такой линии определяется поступлением тепла вследствие нагрева электронами и рассеиванием тепла с внешней и нижней поверхностями. Уравнение баланса температуры в лагранжевой системе координат можно записать в виде

$$\rho c \frac{dT}{d\tau} = q - \frac{(\alpha_{k1} + \alpha_{k2} + \alpha_{л})(T - T_c)}{r_2 - r_1}, \quad (9)$$

где $\alpha_{л}$ – коэффициент лучистой теплоотдачи, определяемый по закону Стефана-Больцмана и зависящий от температуры тела T , окружающей среды T_c , степени черноты ϵ ; α_{k1} , α_{k2} – коэффициенты конвективной теплоотдачи, считающиеся заданными; r_1 , r_2 – радиусы внутренней и наружной поверхностей цилиндра соответственно, мм.

Уравнение (9) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка.

С течением времени процесс становится не зависящим от номера оборота цилиндра n . Формулы для температуры цилиндра при таком квазистационарном процессе выглядят следующим образом.

$$T_{уст}^{нач} = T_c + \frac{q}{\alpha} \frac{[1 - \exp(-\gamma\psi)] \exp[-\gamma(2\pi - \psi)]}{[1 - \exp(-2\pi\gamma)]}. \quad (10)$$

Численный расчет проводили для цилиндрического стеклопластика толщиной от 0,5 до 10 мм с шагом 0,1 мм при изменении времени через интервал 10 с при следующих исходных данных:

$b=0,08$ м; $\omega=0,7$ с⁻¹; $\lambda=0,271$ Вт/(м·К); $c=1,08$ кДж/(кг·К); $\rho=1950$ кг/м³; $\varepsilon=0,65$; $\alpha_{k1}=40$ Вт/(м·К); $\alpha_{k2}=22$ Вт/(м·К); $E=1,1$ МэВ; $I=7$ мА; $\epsilon_{ps}=1 \cdot 10^{-5}$.

Приняты следующие параметры дискретизации: $N=15$; $M=40$; $L=100$.

На рис. 3 показано распределение температуры при отверждении цилиндрических стеклопластиков ускоренными электронами.

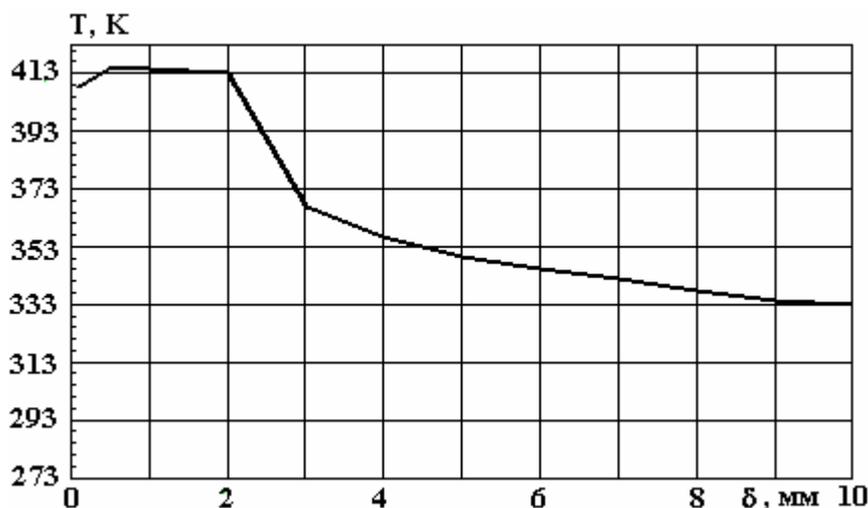


Рис. 3. Распределение температуры во вращающемся цилиндре при отверждении стеклопластиков ускоренными электронами (результат численного решения)

Исследования показали, что при отверждении стеклопластиков ускоренными электронами заданная температура сохраняется в материале до толщины 2 мм. С увеличением толщины происходит снижение температуры.

Таким образом, установлено с помощью разработанной математической модели распределение температуры в композите в зависимости от толщины стеклопластика. Это облегчает выбор оптимальной температуры и ускоряет проведение экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калинчев В.А., Макаров М.С.* Намотанные стеклопластики. М.: Химия, 1986. 268 с.
2. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. М.: Мир, 1964. 488 с.
3. *Лыков А.В.* Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 599 с.

Поступила 07.02.08
После доработки 18.09.08

Summary

The offered model allows analyzing process of heat of cylindrical glass fiber plastics KT-11-TOA with usage of energy of accelerated electrons. Is established (installed), that the model eases a choice of optimum temperature and accelerates realization of experiments.