

К вопросу о расчете величины индуцированных зарядов и электростатического диполя сплюснутого сфероида с осью симметрии, коллинеарной внешнему однородному электростатическому полю

Н. Ю. Колбнева

Ярославская государственная сельскохозяйственная академия,
г. Ярославль, 150042, Россия, e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.02.2022

После доработки 02.05.2023

Принята к публикации 23.05.2023

В аналитических асимптотических расчетах первого порядка малости по квадрату эксцентриситета определены параметры поверхностных индуцированных зарядов, положения их центров и величина эквивалентного диполя сплюснутого проводящего сфероида путем перехода от сфероидальных координат в сферические координаты. Получены характеристики эквивалентного диполя в зависимости от напряженности электростатического поля, квадрата эксцентриситета и радиуса равновеликой сферы.

Ключевые слова: сплюснутая сфероидальная капля, электростатическое поле, электростатический потенциал, центры индуцированных зарядов, жесткий диполь

УДК 532.59:534.1

<https://doi.org/10.52577/eom.2023.59.25>

ВВЕДЕНИЕ

Исследования туманных и облачных капель во внешних электрических полях вызывают интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, гидрометеорологии, научном приборостроении и технологии [1–4]. Известно, что в природных условиях наблюдаются внутриоблачные и дождевые капли различной формы: сферические, сплюснутые сфероидальные и вытянутые сфероидальные [5–7]. При этом большинство экспериментальных и теоретических работ посвящены проблеме исследования во внешних электрических полях капли, имеющей равновесную вытянутую вдоль направления поля сфероидальную форму [8–11]. Однако многие вопросы, связанные с исследованием сплюснутой сфероидальной капли, до сих пор являются малоизученными. Тем не менее такая капля, находящаяся во внешних электрических полях, является объектом исследований грозовых облаков, огней Св. Эльма и других жидкокапельных систем естественного и искусственного происхождения [12, 13].

Знания о деформации равновесной поверхности капли по сравнению с исходной сферической формой нужны для оценки интенсивностей акустического и электромагнитного излучений туманных, внутриоблачных и дождевых капель, а также диапазона частот, в котором они наблюдаются [14, 15]. Кроме того, исследования

деформации равновесных форм капель в различных силовых полях (электрических, аэродинамических, гравитационных, акустических и т.д.) необходимы для анализа физических закономерностей временной эволюции неустойчивых капель [16, 17].

В таких задачах предлагаемые модели строятся в рамках электрогидродинамики, а аналитические решения проводятся классическими методами теории возмущений путем разложения по двум независимым малым параметрам квадрата эксцентриситета и безразмерной амплитуды осцилляций в сферической системе координат.

Согласно [18] осциллирующая вытянутая сфероидальная капля, подвешенная в электростатическом поле, моделируется диполем. Ввиду этого возникает необходимость отдельного поиска характеристик диполя равновесного сплюснутого проводящего сфероида при малых стационарных деформациях.

Заметим, что сходные фрагменты подобных задач (аналитические выражения для равновесного электростатического потенциала и распределения зарядов на равновесной поверхности сплюснутого проводящего сфероида) уже решены ранее (см. [19, 20]), но в весьма неудобных для практического использования сфероидальных координатах. В связи с этим целесообразно иметь аналитические асимптотические решения, заранее переведенные в сферические координаты, что может существенно

помочь в устранении математической сложности и громоздких расчетов при рассмотрении обсуждаемых задач.

ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим незаряженную проводящую сферу радиуса R , находящуюся в вакууме в однородном электростатическом поле напряженностью E_0 .

Примем, что во внешнем электрическом поле сфера деформируется в сплюснутый сфероид с осью симметрии, ориентированной по полю.

Задачу будем решать в осесимметричной постановке. Уравнение сплюснутого сфероида с центром в начале сферической системы координат (r, θ, φ) в первом порядке малости по квадрату эксцентриситета имеет вид [21, 22]:

$$r(\theta) = \frac{R(1-e^2)^{1/3}}{(1-e^2 \sin^2 \theta)^{1/2}} \approx R \left(1 - \frac{1}{3} e^2 P_2(\mu) \right), \quad (1)$$

где $e = \sqrt{1 - \left(\frac{c}{a}\right)^2}$ – эксцентриситет сфероида;

a, c – большая и малая полуоси сфероида; $P_n(\mu)$ – осесимметричный полином Лежандра n -го порядка [23], $\mu \equiv \cos \theta$. Здесь полярный угол θ отсчитывается от положительного направления оси вращения.

В соответствии с общезначимыми принципами под действием электрического поля на поверхности проводящего сфероида индуцируются электрические заряды. Пусть внутренняя среда проводника имеет большую проводимость, так что характерное время перераспределения индуцированных зарядов много меньше гидродинамического времени, и электрическое поле в окрестности сфероида примем постоянным в любой момент времени с электрическим потенциалом $\Phi(r, \theta)$. Напряженность поля связана с электрическим потенциалом соотношением: $\vec{E} = -\nabla \Phi(r, \theta)$ [24].

Проводящий сфероид смоделируем эквивалентным диполем (рис. 1). Разноименным индуцированным внешним электрическим полем зарядам поставим в соответствие равновеликие точечные заряды. Эти заряды расположим на оси симметрии сфероида в положениях центров положительного q_+ и отрицательного q_- зарядов. В результате имеем жесткий диполь с дипольным моментом:

$$\vec{d} = q_+ (\vec{R}_{q_+} - \vec{R}_{q_-}), \quad (2)$$

где $\vec{R}_{q_{\pm}}$ – радиусы-векторы, определяющие положение центров индуцированных зарядов.

Таким образом, в нижеследующем рассмотрении найдем величину и положение центров зарядов, индуцированных однородным электрическим полем, а также величину дипольного момента для проводящего сплюснутого сфероида в сферических координатах путем перехода от сфероидальных координат.

ПЕРЕХОД ОТ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА, ПОЛУЧЕННОГО В СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ, К ВЫРАЖЕНИЮ, ЗАПИСАННОМУ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Чтобы найти характеристики диполя для проводящего сплюснутого сфероида, прежде всего, необходимо получить аналитическое выражение электрического потенциала, записанного в сферической системе координат.

Для эллипсоида с двумя равными полуосями $a = b > c$ эллипсоидальные координаты (ξ, η, ζ) вырождаются в сплюснутые сфероидальные координаты (ξ, ζ, φ) .

Отметим, что для сплюснутого сфероида ось симметрии z направлена параллельно электростатическому полю \vec{E}_0 . Тогда выражение для электрического потенциала вблизи поверхности сплюснутого проводящего сфероида во внешнем электрическом поле в сфероидальных координатах определяется в виде [19, с. 48]:

$$\Phi = -E_0 z \left\{ 1 - \left(\sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a^2}{c^2} - 1} \right)^{-1} \right\}. \quad (3)$$

Здесь координата ξ находится из решения уравнения:

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \xi} + \frac{z^2}{c^2 + \xi} - 1 = 0. \quad (4)$$

Отметим, что в (4) цилиндрические координаты z, ρ определяются через эллипсоидальные координаты ξ, η в виде:

$$z = \pm \sqrt{\frac{(\xi + c^2)(\eta + c^2)}{c^2 - a^2}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{(\xi + a^2)(\eta + a^2)}{a^2 - c^2}}.$$

Решение (3) записывается как:

$$\xi_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ -\left(a^2 + c^2 \right) + z^2 + \rho^2 \pm \sqrt{\left(-\left(a^2 + c^2 \right) + z^2 + \rho^2 \right)^2 + 4\left(c^2 \rho^2 + a^2 \left(z^2 - c^2 \right) \right)} \right\}. \quad (5)$$

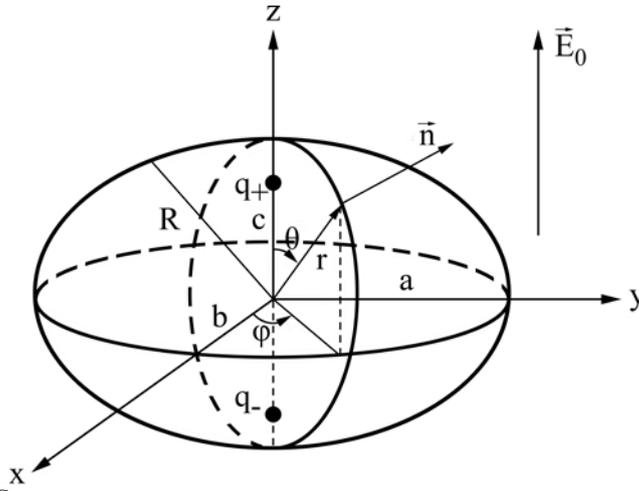


Рис. 1. Схема расположения индуцированных зарядов в сплюснутом сфероиде.

Из (5) выберем такое ξ , что в пространстве вне эллипсоида координата ξ принимает значения $0 \leq \xi < \infty$.

Если в (5) оценить выражение в фигурных скобках, то можно увидеть, что один из корней уравнения (4) является положительным, другой – отрицательным.

Таким образом, получим:

$$\xi = \frac{1}{2} \left\{ -(a^2 + c^2) + z^2 + \rho^2 \pm \sqrt{\left(-(a^2 + c^2) + z^2 + \rho^2 \right)^2 + 4(c^2 \rho^2 + a^2(z^2 - c^2))} \right\}. \quad (6)$$

В (6) большая a и малая c полуоси сфероида связаны с эксцентриситетом e на основе соотношений:

$$a = R(1 - e^2)^{-1/6}, \quad c = R(1 - e^2)^{1/3}. \quad (7)$$

Выразим z , ρ через сферические координаты в виде:

$$z = r \cos \theta, \quad \rho = r \sin \theta. \quad (8)$$

В итоге, подставляя (6)–(8) в (3) и раскладывая получившееся выражение в ряд по степеням малого параметра квадрата эксцентриситета e^2 ($e^2 \ll 1$), найдем электрический потенциал в окрестности сплюснутого сфероида, расположенного во внешнем электрическом поле, в сферических координатах в линейном приближении по e^2 :

$$\Phi(r, \theta) = E_0 \left[r P_1(\mu) \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) - \frac{2R^3}{5r^2} e^2 \left(P_1(\mu) + \frac{3R^2}{2r^2} P_3(\mu) \right) \right], \quad (9)$$

где $P_n(\mu)$ – осесимметричный полином Лежандра n -го порядка [23]; n – целое число, $\mu \equiv \cos \theta$.

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА СПЛЮСНУТОГО СФЕРОИДА В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Для отыскания электрического потенциала в окрестности осесимметричного сплюснутого сфероида во внешнем электрическом поле сформулируем краевую задачу, состоящую из уравнения Лапласа:

$$\Delta \Phi(r, \theta) = 0 \quad (10)$$

условия поведения электрического потенциала на бесконечности:

$$r \rightarrow \infty: \Phi(r, \theta) \rightarrow -E_0 r \cos \theta \quad (11)$$

постоянства электрического потенциала вдоль поверхности сфероида:

$$r = r(\theta): \Phi(r, \theta) = \text{const} \quad (12)$$

и равенства нулю суммарного заряда:

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}(r, \theta), \nabla \Phi(r, \theta)) dS = 0,$$

$$S = [r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi], \quad (13)$$

где $r = r(\theta)$ – уравнение сплюснутого сфероида; $\vec{n}(r, \theta)$ – единичный вектор нормали к поверхности сфероида, определяемый в виде:

$$\vec{n}(r, \theta) = \frac{\nabla(r - r(\theta))}{|\nabla(r - r(\theta))|} \Big|_{r=r(\theta)}. \quad (14)$$

Электрический потенциал $\Phi(r, \theta)$ представим в виде ряда по степеням малого параметра e^2 :

$$\Phi(r, \theta) \approx \Phi^{(0)}(r, \theta) + \Phi^{(1)}(r, \theta) + O(e^4), \quad (15)$$

где $\Phi^{(0)}(r, \theta)$ – электрический потенциал нулевого порядка малости по e^2 , $\Phi^{(1)}(r, \theta)$ – добавка к потенциалу первого порядка по e^2 . Верхний индекс в (15) указывает на порядок малости.

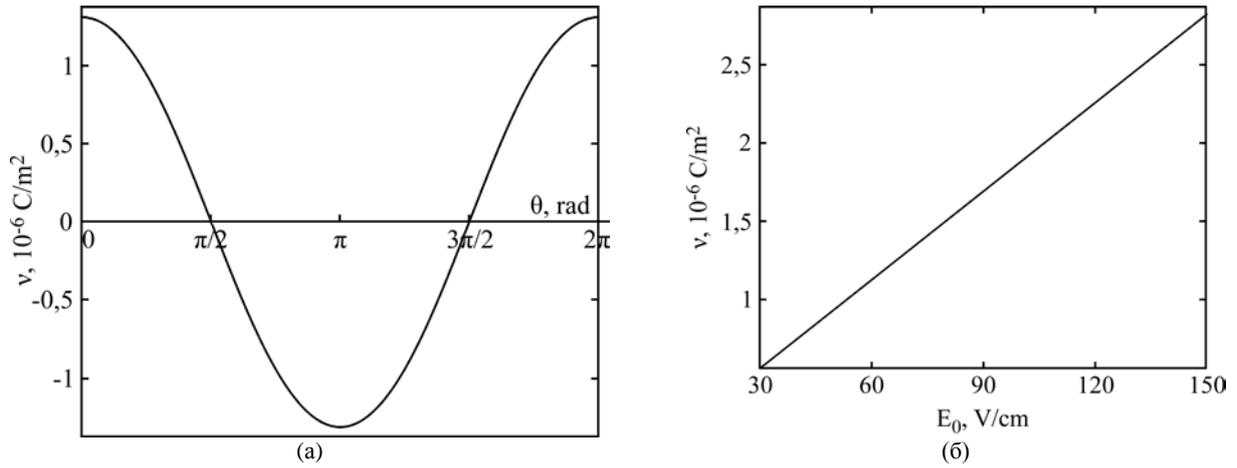


Рис. 2. Зависимость величины поверхностной плотности индуцированного заряда v от полярного угла θ (а), рассчитанная при $E_0 = 50$ В/см, $e^2 = 0,03$, и от напряженности внешнего электростатического поля E_0 (б), рассчитанная при $e^2 = 0,03$.

Подставляя разложение (15) в исходную систему уравнений (10)–(13), выделим краевую задачу для нахождения $\Phi^{(0)}(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi^{(0)}(r, \theta) &= 0, \\ r \rightarrow \infty: \Phi^{(0)}(r, \theta) &\rightarrow -E_0 r \cos \theta, \\ r = R: \Phi^{(0)}(r, \theta) &= \text{const}, \\ r = R: \int_0^\pi \frac{\partial \Phi^{(0)}(r, \theta)}{\partial r} R^2 \sin \theta d\theta &= 0 \end{aligned}$$

и краевую задачу для определения поправки к потенциалу $\Phi^{(1)}(r, \theta)$, связанному с отклонением сфероидальной формы от сферической:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi^{(1)}(r, \theta) &= 0, \\ r \rightarrow \infty: \Phi^{(1)}(r, \theta) &\rightarrow 0, \\ r = R: \Phi^{(1)}(r, \theta) - \frac{1}{3} \text{Re}^2 \frac{\partial \Phi^{(0)}(r, \theta)}{\partial r} P_2(\mu) &= \text{const}, \\ r = R: \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} - \frac{1}{3} e^2 \left(2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} + R \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times P_2(\mu) - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial \theta} \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \right) \right) R^2 \sin \theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

Последовательно решая эти задачи аналогично тому, как это было проделано в [25], получим уравнение для потенциала электрического поля, хорошо согласующееся с решением (9).

РАСЧЕТ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ ИНДУЦИРОВАННОГО ОДНОРОДНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ПОЛЕМ ЗАРЯДА НА ПОВЕРХНОСТИ СПЛЮСНУТОГО СФЕРОИДА В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В проводящем сфероиде, находящемся во внешнем электрическом поле, индуцируются поверхностные разноименные заряды. Отметим,

что вектор напряженности электрического поля \vec{E}_0 направлен по оси симметрии сфероида от отрицательного заряда q_- к положительному q_+ . Распределение индуцированных внешним электрическим полем зарядов по поверхности осесимметричного сплюснутого сфероида $r(\theta)$ характеризуется поверхностной плотностью $v(r, \theta)$.

Рассчитаем $v(r, \theta)$ при помощи известного выражения:

$$\begin{aligned} v(r, \theta) &= \frac{E_n(r, \theta)}{4\pi} \Big|_{r=r(\theta)} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} (\vec{n}(r, \theta), \nabla \Phi(r, \theta)) \Big|_{r=r(\theta)}, \end{aligned} \quad (16)$$

где единичный вектор нормали $\vec{n}(r, \theta)$ согласно формуле (14) имеет вид:

$$\vec{n} = \vec{e}_r + \frac{1}{3} \frac{R}{r} e^2 \frac{\partial P_2(\mu)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta, \quad (17)$$

где \vec{e}_r и \vec{e}_θ – радиальный и полярный орты сферической системы координат.

В итоге, подставляя в (16) выражения для электрического потенциала (9) и орта нормали (17), определим поверхностную плотность индуцированных зарядов в первом приближении по e^2 :

$$v(\theta) = \frac{3E_0}{4\pi} \cos \theta \left(1 + e^2 \left(\frac{3}{5} - \cos^2 \theta \right) \right). \quad (18)$$

Заметим, что в случае $e^2 = 0$ поверхностная плотность индуцированных зарядов, распределенных на осесимметричной сфере, имеет вид $v(\theta) = \frac{3E_0}{4\pi} \cos \theta$.

Для иллюстрации на рис. 2 приведены зависимости поверхностной плотности v индуцированного заряда от величины полярного угла θ и напряженности внешнего электрического поля E_0 , рассчитанные по (18).

Видно, что при изменении полярной координаты θ функция v имеет гармоническую зависимость, а с ростом напряженности поля E_0 поверхностная плотность заряда v увеличивается по линейному закону.

ПЕРЕХОД ОТ ВЫРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНОЙ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА, ПОЛУЧЕННОГО В СФЕРОИДАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ, К ВЫРАЖЕНИЮ, ЗАПИСАННОМУ В СФЕРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Распределение индуцированных зарядов по поверхности проводящего сфероида во внешнем поле, направленного вдоль оси z , задается равенством [19, с. 47]:

$$v = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\xi=0} = -\frac{1}{4\pi h_1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = E_0 \frac{v_z}{4\pi n(z)}, \quad (19)$$

где коэффициент деполяризации определяется в виде:

$$n(z) = \left(2 - \frac{c^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)^{-3/2} \times \left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}\right) \quad (20)$$

и введено обозначение:

$$v_z = \frac{z}{2c^2 h_3} \Big|_{\xi=0}. \quad (21)$$

В (21) элемент длины вдоль направления нормали выражается через эллипсоидальные координаты ζ, η :

$$h_3 \Big|_{\xi=0} = \frac{\sqrt{\zeta \eta}}{2a^2 c}. \quad (22)$$

В случае равенства двух полуосей сфероида $a = b$ координата ζ заменяется на постоянную величину $\zeta = -a^2$, а координата η находится по формуле:

$$\eta = \frac{1}{4} \left(\sqrt{\left(\rho + \sqrt{a^2 - c^2}\right)^2 + z^2} - \sqrt{\left(\rho - \sqrt{a^2 - c^2}\right)^2 + z^2} \right)^2 - a^2. \quad (23)$$

В результате подстановка в исходную формулу (19) соотношений (20)–(23) с учетом выражений для полуосей сфероида a, c (7) и координат z, ρ (8) дает поверхностную плотность индуцированных зарядов в сферической системе координат с точностью до слагаемых первого порядка малости:

$$v(r, \theta) = \frac{3E_0}{4\pi} \frac{r}{R} \cos \theta \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \left(\frac{13}{15} - \cos^2 \theta\right)\right). \quad (24)$$

Используя уравнение (1) сплюснутого сфероида $r(\theta)$, найдем окончательное выражение поверхностной плотности индуцированных зарядов, совпадающее с результатом (18), полученным непосредственно в сферических координатах.

ВЕЛИЧИНА И ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРОВ ИНДУЦИРОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЗАРЯДОВ СПЛЮСНУТОГО СФЕРОИДА

Радиусы-векторы $\vec{R}_{q_{\pm}}$, задающие положения разноименных индуцированных зарядов, вычисляются по формулам:

$$\vec{R}_{q_{\pm}}(r, \theta) = \frac{1}{q_{\pm}(r, \theta)} \int_{S_{1,2}} \vec{r} dq_{\pm}(r, \theta) = \frac{1}{q_{\pm}(r, \theta)} \int_{S_{1,2}} r \vec{e}_r dq_{\pm}(r, \theta), \quad (25)$$

$$S_1 \equiv \left[r = r(\theta); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right],$$

$$S_2 \equiv \left[r = r(\theta); \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right].$$

В (25) единичный радиальный вектор \vec{e}_r сферической системы координат разложим по единичным векторам декартовой системы координат:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_z \cos \theta. \quad (26)$$

Ввиду того, что осью симметрии сфероида является ось z , из (25), (26) имеем:

$$\vec{R}_{q_{\pm}}(r, \theta) = \frac{1}{q_{\pm}(r, \theta)} \int_{S_{1,2}} r \cos \theta \vec{e}_z dq_{\pm}(r, \theta) = \frac{1}{q_{\pm}(r, \theta)} \int_{S_{1,2}} v(r, \theta) r^3 \Big|_{r=r(\theta)} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (27)$$

Для отыскания величины индуцированных зарядов q_{\pm} , распределенных по противоположно заряженным половинкам сфероида S_1, S_2 (S_1 заряжена положительно, S_2 – отрицательно), воспользуемся равенствами:

$$q_{\pm}(r, \theta) = \int_{S_{1,2}} dq_{\pm}(r, \theta) = \int_{S_{1,2}} v(r, \theta) dS_{1,2} = \int_{S_{1,2}} v(r, \theta) r^2 \Big|_{r=r(\theta)} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (28)$$

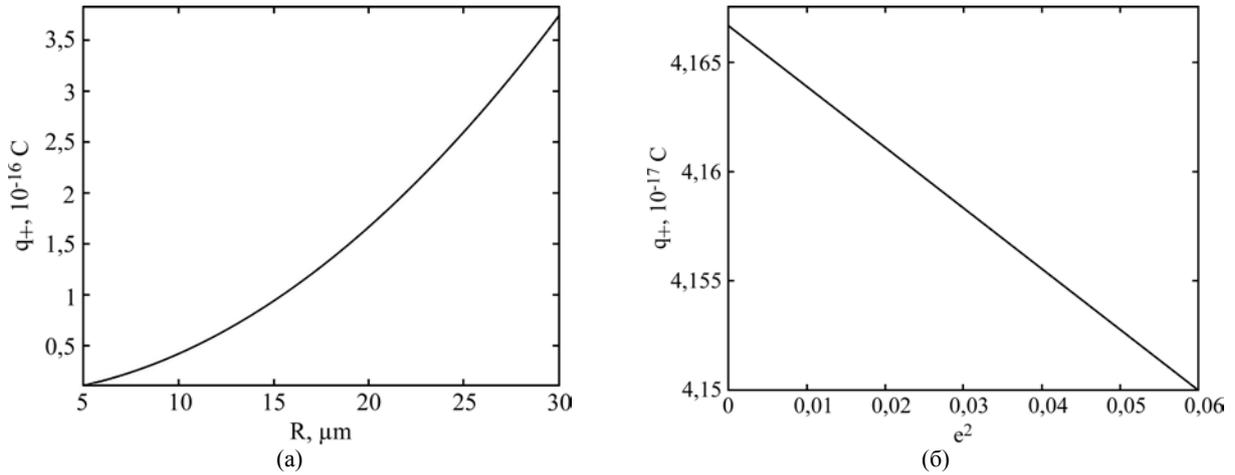


Рис. 3. Зависимость величины положительного индуцированного заряда q_+ сплюснутого сфероида от радиуса R равновеликой сферы (а), рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 2а, и от квадрата эксцентриситета e^2 (б), рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 3а, и при $R = 10$ мкм.

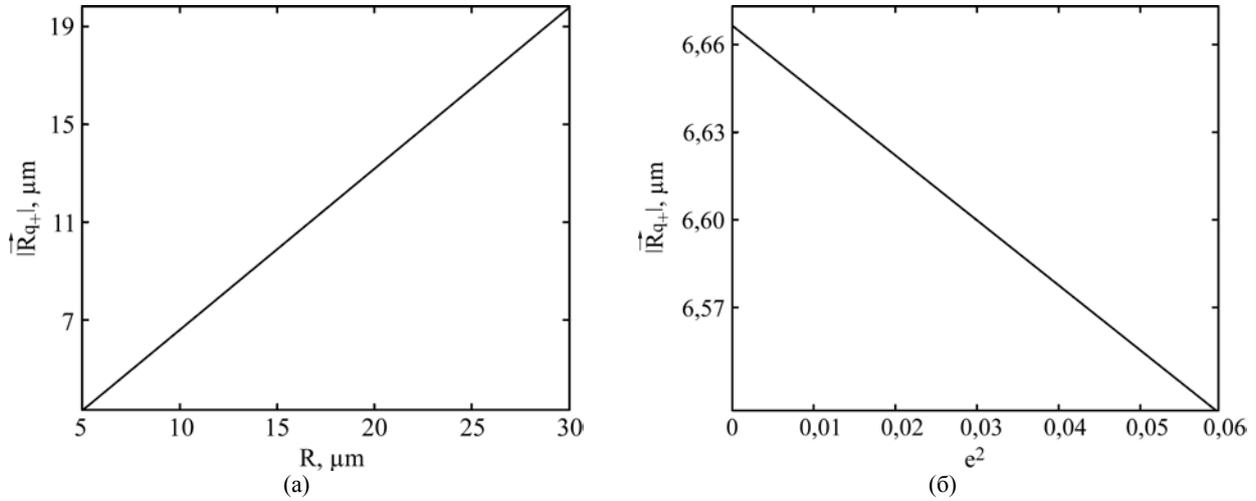


Рис. 4. Зависимость величины радиуса-вектора $|\vec{R}_{q_+}|$, определяющего положение центра положительного индуцированного заряда сплюснутого сфероида, от радиуса R равновеликой сферы, при $e^2 = 0,03$ (а) и от квадрата эксцентриситета e^2 (б), рассчитанная при $R = 10$ мкм.

Подставляя в (28) поверхностную плотность заряда (18), уравнение сплюснутого сфероида (1) и интегрируя получившееся выражение, найдем величины индуцированных зарядов в линейном приближении по e^2 :

$$q_{\pm} = \pm \frac{3}{4} R^2 E_0 \left(1 - \frac{1}{15} e^2 \right). \quad (29)$$

Из формулы (29) и рис. 3 несложно видеть, что с ростом радиуса сфероида R значение положительного индуцированного заряда q_+ быстро увеличивается (по параболическому закону), а при увеличении квадрата эксцентриситета e^2 показатель q_+ немного снижается по линейному закону.

В подынтегральное выражение в (27) подставим (1), (18), проинтегрируем и учтем величину заряда (29). В результате, разлагая получившееся соотношение по степеням квадрата эксцентриситета, определим положения индуцированных зарядов на оси симметрии сплюснутого сфероида с точностью до слагаемых порядка $\sim e^2$:

$$\vec{R}_{q_{\pm}} = \pm \frac{2}{3} R \left(1 - \frac{1}{3} e^2 \right) \vec{e}_z. \quad (30)$$

На рис. 4а показано, что увеличение радиуса сфероида R приводит к линейному возрастанию величины положения центра положительного индуцированного заряда $|\vec{R}_{q_+}|$. Из рис. 4б нетрудно заметить, что поведение зависимости $|\vec{R}_{q_+}|$ от квадрата эксцентриситета e^2 качественно схоже с $q_+(e^2)$ (рис. 3б).

При использовании (29), (30) для дипольного момента (2) будет справедливо соотношение:

$$\vec{d} = R^3 E_0 \left(1 - \frac{2}{5} e^2 \right) \vec{e}_z. \quad (31)$$

Легко убедиться, что уравнение (31) совпадает с решением, полученным по общей формуле [19, с. 44]:

$$\vec{d} = E_0 \frac{V}{4\pi n^{(z)}} \vec{e}_z,$$

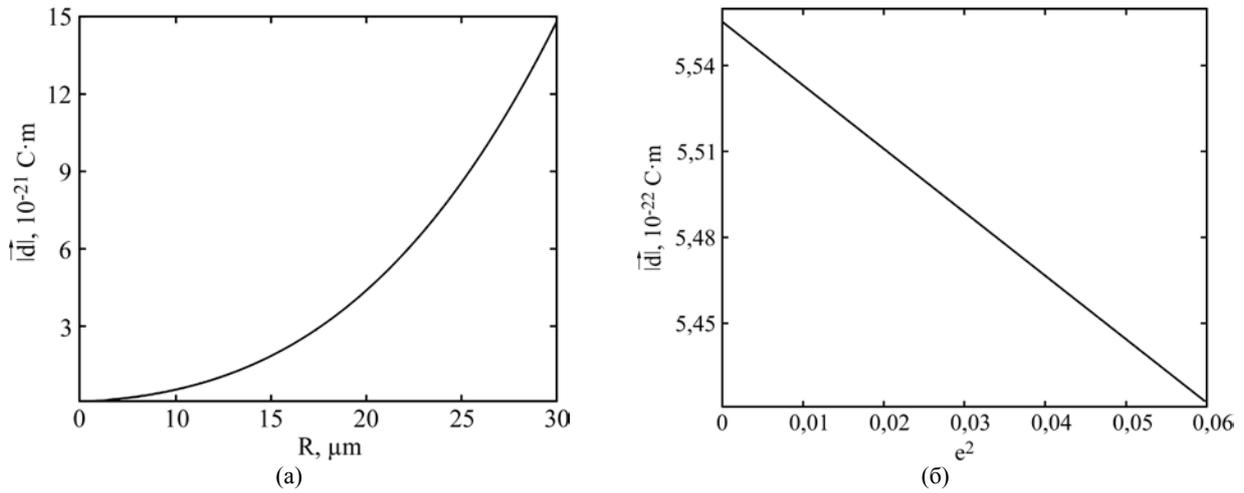


Рис. 5. Зависимость величины дипольного момента $|\vec{d}|$ сплюснутого сфероида от радиуса R равновеликой сферы (а), рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 2а, и от квадрата эксцентриситета e^2 (б), рассчитанная при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 3б.

где $V = \frac{4\pi}{3}R^3$ – объем равновеликой сферы, коэффициент деполяризации $n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}e^2$ в приближении $e^2 \ll 1$ [19, с. 46].

Данное обстоятельство подтверждает хорошее согласование результатов расчетов, выполненных двумя методами: путем перехода от сфероидальных координат в сферическую систему координат и прямым решением краевой электрической задачи.

Из (31) и рис. 5а следует, что при увеличении радиуса сфероида R величина дипольного момента $|\vec{d}|$ весьма быстро растет: при возрастании R в два раза $|\vec{d}|$ увеличивается на порядок. На рис. 5б проиллюстрирована зависимость $|\vec{d}|$ от квадрата эксцентриситета e^2 , качественно повторяющая кривые, приведенные на рис. 3б и 4б. При этом зависимости характеристик эквивалентного диполя q_+ , $|\vec{d}|$ от напряженности электрического поля E_0 видны из приведенных аналитических выражений (29), (31) и аналогичны поведению $v(E_0)$ (рис. 2б).

Следует заметить, что полученные аналитические выражения (9), (17), (18), (29)–(31) отличаются от аналогичных решений для вытянутого вдоль поля проводящего сфероида только знаком при e^2 [25].

Обратим внимание, что коэффициенты деполяризации вдоль оси симметрии сплюснутого и вытянутого сфероидов (в случае малых отклонений сферической формы от сфероидальной) имеют противоположные знаки при слагаемом $\sim e^2$ [19, с. 46]. Ввиду этого, учитывая результаты работы [25], *a priori* в уравнении для дипольного момента (31) можно предсказать

знак стационарной деформации e^2 . Однако для определения характеристик сплюснутого сфероида (а именно знака при e^2) данный вывод может носить лишь предварительный качественный характер, требующий проведения строгих математических расчетов.

Таким образом, используемая методика решения, проведенная в рамках теории возмущений при малых деформациях сфероида, может быть успешно применена для реальных физических задач, в которых равновесная форма капли во внешнем поле, заряженной собственным или индуцированными электрическим полем зарядами, моделируется сфероидом для любой степени сплюснутости (величины квадрата эксцентриситета).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В асимптотической процедуре первого порядка малости по квадрату эксцентриситета получены аналитические выражения величины и положений индуцированных внешним электрическим полем зарядов проводящего сплюснутого сфероида, а также величина дипольного момента. Найдены аналитические выражения электрического потенциала вблизи сплюснутого сфероида и поверхностной плотности зарядов в сферических координатах в линейном приближении по квадрату эксцентриситета путем перехода от известных соотношений в сфероидальных координатах. Такие же выражения получены решением краевой электрической задачи.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет, что у нее нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стерлядкин, В.В., Натурные измерения колебаний капель осадков, *Изв. АН СССР. ФАО*, 1988, т. 24, № 6, с. 613.
2. Качурин, Л.Г., Кармов, М.И., Медалиев, Х.Х., Основные характеристики радиоизлучения конвективных облаков, *Изв. АН СССР. ФАО*, 1974, т. 10, № 11, с. 1163.
3. Мазин, И.П., Хргиан, А.Х., Имянитов, И.М., *Облака и облачная атмосфера. Справочник*. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
4. Грин, Х., Лейн, В., *Аэрозоли – пыли, дымы и туманы*, Л.: Химия, 1969. 428 с.
5. Jones, D.M., The shape of raindrops, *J. Meteorology*, 1959, vol. 16, № 5, p. 504.
6. Ausman, E.L. and Brook, M., Distortion and disintegration of water drops in strong electric fields, *J. Geophys. Res.*, 1967, vol. 72, no. 24, p. 6131.
7. Pruppacher, H.R. and Piter, R.L., A semi-empirical determination of the shape of cloud and rain drop, *J. Atm. Sci.*, 1971, vol. 28, no. 1, p. 86.
8. Macky, W.A., Some investigations on the deformation and breaking of water drops in strong electric fields, *Proc. Roy. Soc. (London)*, 1931, vol. A133, no. 822, p. 565.
9. Шкадов, В.Я., Шутов, А.А., Деформация капель и пузырьков в электрическом поле, *Изв. АН СССР. МЖГ*, 2002, № 5, с. 54.
10. Torza, S., Cox, R.G. and Mason, S.G., Electrohydrodynamic deformation and burst of liquid drops, *Phil. Trans. R. Soc. (London)*, 1971, vol. A269, p. 295.
11. Александров, М.Л., Галль, Л.Н., Иванов, В.Я., Николаев, В.И., Расчет свободной поверхности проводящей жидкости, находящейся в сильном электрическом поле, *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1983, № 6, с. 165.
12. Шутов, А.А., Форма капли в постоянном электрическом поле, *ЖТФ.*, 2002, т. 72, вып. 12, с. 15.
13. Григорьев, А.И., Неустойчивости заряженных капель в электрических полях (обзор), *ЭОМ*, 1990, № 6, с. 23.
14. Григорьев, А.И., Колбнева, Н.Ю., Ширяева, С.О., Об акустическом излучении слабо заряженных капель, осциллирующих во внешнем однородном электростатическом поле, *Изв. РАН. МЖГ*, 2022, № 5, с. 80.
15. Григорьев, А.И., Колбнева, Н.Ю., Ширяева, С.О., Капиллярные волны и дипольное электромагнитное излучение, создаваемое нелинейными осцилляциями незаряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле, *Коллоидн. журн.*, 2022, т. 84, № 2, с. 141.
16. Natarajan, R. and Brown, R.A., Third-order resonance effects and the nonlinear stability of drops oscillations, *J. Fluid Mech.*, 1987, vol. 183, p. 95.
17. Trinch, E. and Wang, T.G., Large amplitude free and driven drop-shape oscillations: experimental observations, *J. Fluid Mech.*, 1982, vol. 122, p. 315.
18. Ширяева, С.О., Григорьев, А.И., Колбнева, Н.Ю., Асимптотический расчет интенсивности дипольного электромагнитного излучения от осциллирующей в электростатическом поле незаряженной капли, *ЭОМ*, 2017, т. 53, № 4, с. 28.
19. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука, 1957. 532 с.
20. Батыгин, В.В., Топтыгин, И.Н., *Сборник задач по электродинамике*. М.: Наука, 1970. 503 с.
21. Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., Критические условия неустойчивости сплюснутой сферической сильно заряженной капли, *ЖТФ*, 1999, т. 69, вып. 7, с. 10.
22. Щекин, А.К., Варшавский, В.Б., Равновесная форма, химический потенциал и работа образования диэлектрической капли в электрическом поле диполя ядра конденсации, *Коллоидн. журн.*, 1996, т. 58, № 4, с. 564.
23. Варшалович, Д.А., Москалев, А.Н., Херсонский, В.К., *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975. 436 с.
24. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля*. М.: Наука. 1973. 504 с.
25. Колбнева, Н.Ю., Ширяева, С.О., Кузьмичев, Ю.Б., О величине поляризационных зарядов и электростатического диполя вытянутого сфероид, расположенного коллинеарно однородному электростатическому полю, *ЭОМ*, 2017, т. 53, № 1, с. 9.

Summary

The values of the surface induced charges, the positions of their centers and the value of the equivalent dipole of an oblate conducting spheroid are determined by transition from spheroidal coordinates to a spherical system of coordinates in the analytical asymptotic calculations of the first order of smallness with respect to the squared eccentricity. The characteristics of the equivalent dipole are obtained depending on the value of the electrostatic field strength, squared eccentricity, and the radius of an equal sphere.

Keywords: oblate spheroidal drop, electrostatic field, electrostatic potential, centers of induced charges, dipole