

Об электромагнитном излучении, связанном с нулевой и первой модами капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле

А. И. Григорьев^{а*}, Н. Ю. Колбнева^{б**}, С. О. Ширяева^{а***}

^аИнститут проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,
г. Москва, 119526, Россия

^бЯрославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
г. Ярославль, 150000, Россия, *e-mail: grigorai@mail.ru; **e-mail: kolbneva-nata@yandex.ru;
***e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 02.02.2022

После доработки 27.06.2022

Принята к публикации 01.07.2022

Рассматривается электромагнитное излучение, порождаемое капиллярными осцилляциями нулевой и первой мод капли во внешнем электростатическом поле. Предполагается, что капля идеальной несжимаемой электропроводной жидкости имеет нулевой суммарный электрический заряд и заряжена во внешнем однородном электростатическом поле индуцированными зарядами противоположных знаков. Обсуждаемое излучение обнаруживается в аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций капли во внешнем электростатическом поле. Найдены аналитическое выражение для интенсивности электромагнитного излучения, связанного с осцилляциями нулевой и первой мод, и зависимости интенсивности излучения от величины напряженности поля, размера капли, величины коэффициента поверхностного натяжения.

Ключевые слова: капля, электростатическое поле, капиллярные осцилляции, центрально-симметричная и трансляционная моды, электромагнитное излучение

УДК 532.6:534.1:551.501.8: 551.594

<https://doi.org/10.52577/eom.2023.59.1.19>

ВВЕДЕНИЕ

Дипольная и квадрупольная компоненты полного электромагнитного излучения от осциллирующей во внешнем электростатическом поле капли (как заряженной, так и незаряженной), связанные с осцилляциями высоких мод, неоднократно становились объектами исследования [1–3]. Этого нельзя сказать о компоненте полного излучения, связанной с осцилляциями нулевой (центрально-симметричной) и первой (трансляционной) мод. В [3–4] показано, что в асимптотических расчетах более высокого порядка малости, чем первый, по безразмерной амплитуде осцилляций в спектре возбужденных мод капиллярных осцилляций капли во внешнем электростатическом поле появляется нулевая мода, соответствующая радиальным пульсациям капли, невозможным в расчетах первого порядка малости из-за наложенного условия несжимаемости жидкости. То же относится и к первой (трансляционной) моде, которая возбуждается, если в спектре изначально возбужденных мод имеются две с последовательными номерами. Трансляционная мода не возбуждается в расчетах первого порядка малости из-за принимаемой неподвижности центра масс капли (из-за первого закона Ньютона).

Следует также отметить, что для капли, заряженной зарядами с одинаковым отношением заряда к массе носителей заряда, излучения при осцилляциях не возникает [5, с. 227; 6, с. 123].

Поскольку квадрупольная и дипольная компоненты электромагнитного излучения генерируются в основном осцилляциями более высоких мод капли [3], представляется целесообразным оценить особенности генерации осциллирующей каплей излучения, связанного именно с нулевой и первой модами.

ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим нелинейно осциллирующую незаряженную каплю жидкости, висющую в облаке в однородном электростатическом поле напряженностью \vec{E}_0 в суперпозиции аэродинамического потока среды и поля сил тяжести. Для упрощения нижеследующих расчетов жидкость примем идеальной, несжимаемой, идеально проводящей. Массовую плотность жидкости обозначим ρ , а коэффициент поверхностного натяжения – σ . Примем, что в отсутствии \vec{E}_0 капля имеет сферическую форму радиуса R , температура капли и окружающей

среды, а также объем жидкой фазы не изменяются. Ось симметрии капли OZ будет направлена коллинеарно электростатическому полю, вдоль которого она вытягивается [6–8]. Согласно экспериментальным данным [7–8], во внешнем электростатическом поле \vec{E}_0 капля вытягивается вдоль него в сфероид с эксцентриситетом $e = \sqrt{9E_0^2 R / 16\pi\sigma}$.

Оценим величину эксцентриситета для внутриоблачной капли грозового облака с типичными характеристиками $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³ и напряженностью внешнего электрического поля $E_0 = 50$ В/см. При радиусе капли $R = 3$ мкм получим $e \sim 1 \times 10^{-4}$. Для капли размером $R = 30$ мкм найдем $e \sim 5 \times 10^{-4}$.

Для упрощения последующих расчетов введем безразмерные переменные, в которых $R = \rho = \sigma = 1$. Остальные физические величины задачи будут выражены в долях своих характерных значений:

$$[E_0] = R^{-1/2} \sigma^{1/2}, [t] = R^{3/2} \rho^{1/2} \sigma^{-1/2}, \\ [V] = R^{-1/2} \rho^{-1/2} \sigma^{1/2}, [r] = R, [P] = R^{-1} \sigma.$$

В соответствии с полученными выше оценками величина квадрата эксцентриситета e^2 , определяющая стационарную деформацию капли, много меньше безразмерного радиуса капли. Поскольку проводимые расчеты имеют качественный вид, то, чтобы избежать в нижеследующих вычислениях излишней громоздкости, будем пренебрегать вытянутостью капли и для проведения аналитических асимптотических расчетов форму равновесной поверхности капли будем принимать сферической.

Согласно общефизическим законам [9], во внешнем электростатическом поле \vec{E}_0 в капле индуцируются электрические заряды, ускоренно движущиеся при осцилляциях поверхности капли, и, следовательно, излучающие электромагнитные волны [5–6, 9].

Вследствие теплового движения молекул жидкости на поверхности капли генерируется капиллярное волновое движение весьма малой амплитуды $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$ (для большинства жидкостей, включая жидкие металлы, амплитуда тепловых осцилляций поверхности капли не превышает ангстрема), где κ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура [10].

Рассмотрение задачи ограничим осесимметричными осцилляциями поверхности капли в сферической системе координат (r, θ, φ) (угол θ отсчитывается от направления \vec{E}_0) с началом в центре масс капли.

Поверхностные, индуцированные электростатическим полем заряды будут распределены по сфере с плотностью $\nu(r, \theta, \varphi)$. Величины разномименных индуцированных зарядов найдем путем интегрирования поверхностной плотности зарядов $\nu(r, \theta, t)$ по поверхностям S_1 и S_2 разномименно заряженных половинок капли в виде:

$$q_+(r, \theta, t) = \int_{S_1} dq_+(r, \theta, t) = \int_{S_1} \nu(r, \theta, t) dS_1; \\ q_-(r, \theta, t) = \int_{S_2} dq_-(r, \theta, t) = \int_{S_2} \nu(r, \theta, t) dS_2.$$

Этим зарядам поставим в соответствие равновеликие точечные заряды, которые поместим на оси симметрии сферы в положениях «эффективных» центров положительного $q_+(r, \theta, t)$ и отрицательного $q_-(r, \theta, t)$ зарядов, то есть получим «эффективный» диполь.

Радиус-векторы расположения «эффективных» индуцированных зарядов задаются соотношениями:

$$\vec{R}_{q_+}(r, \theta, t) = \frac{1}{q_+(r, \theta, t)} \int_{S_1} \vec{r} dq_+(r, \theta, t) = \\ = \frac{1}{q_+(r, \theta, t)} \int_{S_1} r \cos \theta \vec{e}_z dq_+(r, \theta, t); \\ \vec{R}_{q_-}(r, \theta, t) = \frac{1}{q_-(r, \theta, t)} \int_{S_2} \vec{r} dq_-(r, \theta, t) = \\ = \frac{1}{q_-(r, \theta, t)} \int_{S_2} r \cos \theta \vec{e}_z dq_-(r, \theta, t); \\ S_1 \equiv \left[r = r(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right]; \\ S_2 \equiv \left[r = r(\theta, t); \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right];$$

где $r = r(\theta, t)$ – уравнение возмущенной поверхности капли.

«Центры» этих точечных зарядов и величины «эффективных» индуцированных зарядов будут осциллировать при капиллярных осцилляциях поверхности капли (в том числе и на нулевой и первой модах) и, следовательно, излучать электромагнитные волны. Излучение, связанное с изменением во времени величины дипольного момента системы, называется «дипольным» [5].

В общей теории излучения интенсивность электромагнитного излучения дипольного типа для системы ускоренно движущихся зарядов вычисляется по формуле [5, с. 227; 6, с. 120]:

$$I = \frac{2}{3c^3} \left(\frac{\partial^2 \vec{d}}{\partial t^2} \right)^2; \quad \vec{d} \equiv \sum_{i=1}^N q_i \times \vec{R}_{q_i}; \quad (2)$$

где \vec{d} – дипольный момент; q_i – один из зарядов системы; \vec{R}_{q_i} – радиус-вектор положения заряда q_i , определяемый в нашем случае (1).

В нижеследующем рассмотрении рассчитаем поправки к основному дипольному излучению электропроводной капли, совершающей нелинейные осцилляции конечной амплитуды во внешнем электростатическом поле, связанные с ее периодическими осесимметричными пульсациями.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Положим, что в начальный момент времени равновесная сферическая капля имеет осесимметричное возмущение $\xi(\theta)$ фиксированной амплитуды, много меньшей радиуса невозмущенной капли ($\max|\xi(\theta)| \ll R$). Отношение $\max|\xi(\theta)|$ к радиусу капли R примем за малый параметр $\varepsilon \equiv (\max|\xi(\theta)|/R)$ [3].

Так как начальное возмущение сферической поверхности капли мало и обладает осевой симметрией, положим, что форма капли осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени. Ввиду этого упрощения запишем уравнение формы поверхности капли в произвольный момент времени t в безразмерных переменных:

$$r(\theta, t) = 1 + \xi(\theta, t); \quad |\xi| \ll 1. \quad (3)$$

Пусть в капле существует потенциальное движение жидкости, связанное с ее осцилляциями. Тогда поле скоростей течения жидкости в капле $\vec{V}(r, \theta, t)$ определяется функцией потенциала скорости $\psi(r, \theta, t)$: $\vec{V}(r, \theta, t) = \nabla\psi(r, \theta, t)$ [11] и имеет в безразмерной форме тот же порядок малости, что гидродинамический потенциал $\psi(r, \theta, t)$ и амплитуда осцилляций капли $\xi(\theta, t)$: $|\vec{V}(r, \theta, t)| \sim \psi(r, \theta, t) \sim \varepsilon$.

Принимая, что скорость распространения электромагнитных взаимодействий много больше скорости гидродинамических движений жидкости в капле, электрическое поле вокруг капли будем считать постоянным в любой момент времени с электрическим потенциалом $\Phi(r, \theta, t)$, связанным с напряженностью поля \vec{E} как: $\vec{E} = -\nabla\Phi(r, \theta, t)$ [5].

Математическая формулировка задачи о расчете спектра возникающих капиллярных осцилляций незаряженной капли, находящейся

во внешнем однородном электростатическом поле, имеет вид:

$$\Delta\psi(r, \theta, t) = 0; \quad \Delta\Phi(r, \theta, t) = 0; \quad (4)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty:$$

$$\Phi(r, \theta, t) \rightarrow -E_0 r \cos\theta; \quad (5)$$

$$r = 1 + \xi(\theta, t):$$

$$\frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi(r, \theta, t)}{\partial\theta} \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial\theta}; \quad (6)$$

$$P(r, \theta, t) + P_E(r, \theta, t) = P_\sigma(r, \theta, t); \quad (7)$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi_s(t). \quad (8)$$

Систему уравнений (4)–(8) необходимо дополнить условиями сохранения полного объема капли, неподвижности ее центра масс и отсутствия собственного заряда капли:

$$\int_V r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi;$$

$$\int_V \vec{r} \times r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = 0; \quad (9)$$

$$V = [0 \leq r \leq 1 + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}, \nabla\Phi) dS = 0;$$

$$S = [r = 1 + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (10)$$

Начальные условия включают уравнения начальной деформации равновесной сферы и равенства нулю начальной скорости движения ее возмущенной поверхности:

$$t = 0: \quad \xi(\theta) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu);$$

$$\sum_{j \in \Xi} h_j = 1; \quad \frac{\partial\xi(\theta)}{\partial t} = 0; \quad (11)$$

где $\mu \equiv \cos\theta$, h_j – коэффициенты, определяющие парциальный вклад j -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение; Ξ – множество значений номеров изначально возбужденных колебательных мод; $P_j(\mu)$ – полином Лежандра j -го порядка; j – целое число, начальные ξ_0 и ξ_1 – амплитуды нулевой (радиально симметричной) и трансляционной мод осцилляций, вычисляемые из условий (9) при $t = 0$ с точностью до слагаемых ε^3 :

$$\xi_0 \approx -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{h_j^2}{(2j+1)} + O(\varepsilon^3);$$

$$\xi_1 \approx -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \frac{9jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)} + O(\varepsilon^3). \quad (12)$$

В уравнениях (7)–(10) символом $\Phi_s(t)$ обозначено постоянное вдоль поверхности капли значение ее электрического потенциала, $P = P_0 - \frac{\partial \psi(r, \theta, t)}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \psi(r, \theta, t))^2$ – гидродинамическое давление; P_0 – постоянное давление в состоянии равновесия; $P_E = (\nabla \Phi)^2 / 8\pi$ – давление электрического поля, $P_\sigma = \text{div } \vec{n}(r, \theta, t)$ – капиллярное давление; $\vec{n}(r, \theta, t)$ – единичный вектор нормали к возмущенной поверхности капли, вычисляемый как:

$$\vec{n}(r, \theta, t) = \frac{\nabla(r - r(\theta, t))}{|\nabla(r - r(\theta, t))|} \Big|_{r=r(\theta, t)}. \quad (13)$$

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН

Сформулированную задачу (4)–(11) будем решать в квадратичном приближении по ε , используя метод многих масштабов [12]. В рамках данного асимптотического метода искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(r, \theta, t)$, $\Phi(r, \theta, t)$, а также давления $P(r, \theta, t)$, $P_E(r, \theta, t)$, $P_\sigma(r, \theta, t)$, входящие в динамическое граничное условие (7), разложим в ряды по степеням малого параметра ε с точностью до ε^2 и будем считать зависимыми от двух временных масштабов: $T_0 = \varepsilon^0 \times t$, $T_1 = \varepsilon^1 \times t$ [12]:

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, T_0) + O(\varepsilon^3);$$

$$\psi(r, \theta, t) = \varepsilon \psi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \psi^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3);$$

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi^{(0)}(r, \theta) + \varepsilon \Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 \Phi^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3);$$

$$P(r, \theta, t) = P^{(0)}(r, \theta) + \varepsilon P^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 P^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3);$$

$$P_E(r, \theta, t) = P_E^{(0)}(r, \theta) + \varepsilon P_E^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 P_E^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3);$$

$$P_\sigma(r, \theta, t) = P_\sigma^{(0)}(r, \theta) + \varepsilon P_\sigma^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1) + \varepsilon^2 P_\sigma^{(2)}(r, \theta, T_0) + O(\varepsilon^3), \quad (14)$$

где $\Phi^{(0)}(r, \theta) = E_0 r \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) P_1(\mu)$ – электрический

потенциал в окрестности невозмущенной сферы во внешнем электрическом поле [13, с. 32]; $\Phi^{(1)}(r, \theta, T_0, T_1)$, $\Phi^{(2)}(r, \theta, T_0)$ – добавки к электрическому потенциалу, связанные с

искажением равновесной сферической поверхности капли.

Производные по времени будем находить с учетом различных масштабов электрического потенциала в следующем виде [12]:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon^1 \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2).$$

Поправки к электрическому потенциалу $\Phi^{(m)}$ и потенциалу скорости $\psi^{(m)}$, являющиеся решениями уравнений Лапласа (4) и удовлетворяющие условиям ограниченности (5), и поправки к равновесной поверхности капли $\xi^{(m)}$ найдем в виде разложений по полиномам Лежандра:

$$\psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) r^n P_n(\mu); \quad (15)$$

$$\Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) r^{-(n+1)} P_n(\mu); \quad (16)$$

$$\xi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) P_n(\mu); \quad (m=1; 2). \quad (17)$$

Подстановка разложений (14) в систему уравнений (4)–(11) и приравнивание слагаемых одного порядка малости позволяют получить задачи первого и второго порядков по ε для отыскания неизвестных коэффициентов $D_n^{(m)}$, $F_n^{(m)}$, $M_n^{(m)}$, ($m=1; 2$) в разложениях (15)–(17).

ЗАДАЧА ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ε

Для нахождения амплитудных коэффициентов $D_n^{(1)}$, $F_n^{(1)}$, $M_n^{(1)}$ в (15)–(17) при $m=1$ запишем систему уравнений, получающуюся из (6)–(10) путем группировки слагаемых первого порядка по ε :

$$r=1: \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}; \quad (18)$$

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0} = (2 + \hat{L}_\theta) \xi^{(1)}; \quad \hat{L}_\theta \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right); \quad (19)$$

$$\Phi^{(1)} - 3E_0 \xi^{(1)} \cos \theta = \Phi_s^{(1)}; \quad (20)$$

$$\int_0^\pi \xi^{(1)} \sin \theta d\theta = 0; \quad \int_0^\pi \xi^{(1)} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0; \quad (21)$$

$$\int_0^\pi \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \sin \theta d\theta = 0. \quad (22)$$

Подстановка разложений (14)–(16) при $m = 1$ в граничные условия (18), (20), (21), (22) позволяет найти соотношения для амплитудных коэффициентов $M_0^{(1)}(T_0, T_1)$, $M_1^{(1)}(T_0, T_1)$, $D_n^{(1)}(T_0, T_1)$, $F_n^{(1)}(T_0, T_1)$ в следующей форме:

$$\begin{aligned} M_0^{(1)}(T_0, T_1) &= M_1^{(1)}(T_0, T_1) = 0; \\ D_0^{(1)}(T_0, T_1); D_n^{(1)}(T_0, T_1) &= \frac{1}{n} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0}; \\ &(n \geq 1); \quad (23) \\ F_0^{(1)}(T_0, T_1) &= 0; \\ F_n^{(1)}(T_0, T_1) &= \\ &= E_0 \left(M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1) l_1(n) + M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1) l_2(n) \right); \\ &(n \geq 1); \quad (24) \\ l_1(n) &= \frac{3n}{(2n-1)}; \quad l_2(n) = \frac{3(n+1)}{(2n+3)}. \end{aligned}$$

Отметим, что поправка первого порядка малости к потенциалу поверхности капли равна $\Phi_s^{(1)}(t) = 0$.

Используя полученные решения (17), (23), из динамического граничного условия (19) получим систему связанных однородных дифференциальных уравнений второго порядка, записанных относительно амплитуд $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$ при $n \geq 2$:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} M_n^{(1)}(T_0, T_1) + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1) = 0,$$

где $\omega_n^2 = n(n-1)(n+2)$ – квадрат частоты собственных осцилляций незаряженной сферической капли.

Полагая, что амплитуды $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$ зависят от времени T_0 гармонически, представим решение дифференциального уравнения в следующей форме:

$$\begin{aligned} M_n^{(1)}(T_0, T_1) &= A_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + \text{к.с.}; \quad n \geq 2; \\ A_n^{(1)}(T_1) &= a_n^{(1)}(T_1) \exp(i b_n^{(1)}(T_1)), \quad (25) \end{aligned}$$

где зависимость функций $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$ от временного масштаба T_1 определяется из решения задачи второго порядка малости, аббре-

виатурой к.с. обозначены слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным.

ЗАДАЧА ВТОРОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ε

Для определения коэффициентов $D_n^{(2)}$, $F_n^{(2)}$, $M_n^{(2)}$ в (15)–(17) при $m = 2$ в уравнениях (6)–(10) приравняем друг другу величины второго порядка малости по ε :

$$\begin{aligned} r=1: \quad & \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = \\ & = \frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial r^2} \xi^{(1)} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \theta}; \quad (26) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \Psi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial T_1} + \frac{\partial^2 \Psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \xi^{(1)} + \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right) \right) = \quad (27)$$

$$= -(2 + \hat{L}_0) \xi^{(2)} + 2 \xi^{(1)} (1 + \hat{L}_0) \xi^{(1)};$$

$$\int_0^\pi \left(\xi^{(2)} + \left(\xi^{(1)} \right)^2 \right) \sin \theta d\theta = 0;$$

$$\int_0^\pi \left(2 \xi^{(2)} + 3 \left(\xi^{(1)} \right)^2 \right) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} + \left(2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} \right) \xi^{(1)} + \right. \\ \left. + 3 E_0 \xi^{(1)} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial P_1(\mu)}{\partial \theta} - \xi^{(1)} P_1(\mu) \right) \right) \sin \theta d\theta = 0; \quad (29) \end{aligned}$$

$$\Phi^{(2)} + \xi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} +$$

$$+ 3 E_0 \left(\left(\xi^{(1)} \right)^2 - \xi^{(2)} \right) \cos \theta = \Phi_s^{(2)}. \quad (30)$$

Подставляя в систему граничных условий (26), (28), (29), (30) разложения (15)–(17) при $m = 1; 2$ и решения первого порядка (23), (24), найдем выражения для нелинейных поправок к амплитудным коэффициентам нулевой и первой мод $M_0^{(2)}$, $M_1^{(2)}$ и $D_n^{(2)}$, $F_n^{(2)}$ в виде:

$$M_0^{(2)}(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(M_k^{(1)}(t) \right)^2;$$

$$M_1^{(2)}(t) = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{9k}{(2k-1)(2k+1)} M_k^{(1)}(t) M_{k-1}^{(1)}(t);$$

$$D_0^{(2)}(t) = 0;$$

$$D_n^{(2)}(T_0) = \frac{1}{n} \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0)}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_1} \right\} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} l_0(m, k, n) \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} M_k^{(1)}(T_0, T_1);$$

$$(n \geq 1); \quad (31)$$

$$l_0(m, k, n) = -\left(m(m-1)K_{m,k,n} - \alpha_{m,k,n} \right) \frac{1}{nm};$$

$$F_0^{(2)}(t) = 0;$$

$$F_n^{(2)}(t) = E_0 \left[M_{n-1}^{(2)}(t)l_1(n) + M_{n+1}^{(2)}(t)l_2(n) + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(M_{m-1}^{(1)}(t)l_3(m, k, n) + M_{m+1}^{(1)}(t)l_4(m, k, n) \right) M_k^{(1)}(t) \right];$$

$$(n \geq 1); \quad (32)$$

$$l_3(m, k, n) = \frac{3m^2}{2m-1} K_{m,k,n};$$

$$l_4(m, k, n) = \frac{3m(m+1)}{2m+3} K_{m,k,n};$$

$$K_{m,k,n} = \left[C_{k0,m0}^{n0} \right]^2;$$

$$\alpha_{m,k,n} = -\sqrt{m(m+1)k(k+1)} C_{m0,k0}^{n0} \times C_{m-1,k1}^{n0},$$

где $C_{mk,lp}^{nq}$ – коэффициенты Клебша–Гордана [14], отличные от нуля в случае, когда индексы удовлетворяют соотношениям $|m-l| \leq n \leq m+l$, $m+l+n$ – четное и $k+p=q$.

При этом поправка второго порядка малости к величине потенциала капли имеет вид:

$$\Phi_s^{(2)}(t) = -E_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6k(k-2)}{(2k-1)(2k+1)} M_k^{(1)}(t) M_{k-1}^{(1)}(t).$$

Подставляя решение первого порядка (31) в динамическое граничное условие, получим неоднородное дифференциальное уравнение для определения амплитудных коэффициентов $M_n^{(2)}(t)$ при $n \geq 2$:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} M_n^{(2)}(T_0, T_1) + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0, T_1) =$$

$$= G_1 \exp(i\omega_n T_0) +$$

$$(33)$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\lambda_0^{(+)} A_m^{(1)}(T_1) A_k^{(1)}(T_1) \exp(i(\omega_m + \omega_k) T_0) + \right.$$

$$\left. + \lambda_0^{(-)} A_m^{(1)}(T_1) \bar{A}_k^{(1)}(T_1) \exp(i(\omega_m - \omega_k) T_0) \right] + \text{к.с.};$$

$$G_1 = -2i\omega_n \frac{\partial A_n^{(1)}(T_1)}{\partial T_1};$$

$$\lambda_0^{(\pm)} = G_2(m, k, n) + \omega_m^2 G_3(m, k, n) \pm \omega_m \omega_k G_4(m, k, n);$$

$$G_2(m, k, n) = 2n(m(m+1)-1)K_{m,k,n};$$

$$G_3(m, k, n) = K_{m,k,n}(1-m+n) + \frac{1}{m} \alpha_{m,k,n};$$

$$G_4(m, k, n) = \left(1-m + \frac{1}{2}n \right) K_{m,k,n} + \frac{1}{m} \left(1 + \frac{n}{2k} \right) \alpha_{m,k,n}.$$

В (33) горизонтальная черта сверху над A_k обозначает комплексное сопряжение.

Для исключения секулярных (неограниченно нарастающих со временем) членов из решения эволюционного уравнения (33) потребуем

выполнение условия: $\frac{\partial A_n^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} = 0$. Выражая

$A_n^{(1)}(T_1)$ через действительные функции $a_n^{(1)}$ и $b_n^{(1)}$ из (25), получим, что $a_n^{(1)}$ не зависит от временного масштаба T_1 и $b_n^{(1)}(T_1) = b_0$, где b_0 – константа, определяемая из начальных условий.

Аналогично тому, как это было проделано для случая линейного приближения по ε , общее решение эволюционного уравнения второго порядка (33) при $n \geq 2$ представим в виде:

$$M_n^{(2)}(T_0) = A_n^{(2)} \exp(i\omega_n T_0) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left[N_0^{(+)} A_m^{(1)} A_k^{(1)} \exp(i(\omega_m + \omega_k) T_0) + \right.$$

$$\left. + N_0^{(-)} A_m^{(1)} \bar{A}_k^{(1)} \exp(i(\omega_m - \omega_k) T_0) \right] + \text{к.с.} \quad (34)$$

$$N_0^{(\pm)} = \frac{\lambda_0^{(\pm)}}{\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_k)^2}.$$

Подстановка разложения (17) при $m = 1; 2$ в (11) и приравнивание слагаемых одного порядка малости по ε дают возможность получить начальные условия первого и второго порядков:

$$t = 0: \xi^{(1)}(\theta, t) = \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu); \quad \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_0} = 0;$$

$$\xi^{(2)}(\theta, t) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu);$$

$$\frac{\partial \xi^{(2)}(\theta, t)}{\partial T_0} = -\frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_1}$$

из которых можно найти неизвестные константы $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$ в решениях (25), (34) эволюционных уравнений.

Удовлетворяя начальным условиям в первом приближении по ε , находим:

$$a_n^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j \in \Xi} h_j \delta_{n,j}; \quad b_n^{(1)} = 0; \quad (n = 0, 1, 2, \dots); \quad (35)$$

где $\delta_{j,n}$ – символ Кронекера.

Во втором приближении по ε получим:

$$a_n^{(2)} = -\frac{1}{4} \sum_{j \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} h_j h_q \left(N_0^{(+)}(j, q, n) + N_0^{(-)}(j, q, n) \right);$$

$$b_n^{(2)} = 0. \quad (36)$$

Подставляя (35) в (25) и (36) в (34), несложно получить окончательные выражения для амплитудных коэффициентов в разложении (17) искажения формы поверхности капли:

$$M_j^{(1)}(t) = \sum_{j \in \Xi} h_j \cos(\omega_j t); \quad (37)$$

$$M_0^{(2)}(t) = - \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{h_j^2}{(2j+1)} \left(\cos(\omega_j t) \right)^2 \right]; \quad (38)$$

$$M_1^{(2)}(t) = - \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{9jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)} \cos(\omega_{j-1}t) \cos(\omega_j t) \right]; \quad (39)$$

$$M_n^{(2)}(t) = \frac{1}{2} \sum_{j \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} h_j h_q \times$$

$$\times \left\{ N_0^{(+)} \left(\cos((\omega_j + \omega_q)t) - \cos(\omega_n t) \right) + \right.$$

$$\left. + N_0^{(-)} \left(\cos((\omega_j - \omega_q)t) - \cos(\omega_n t) \right) \right\}; \quad (n \geq 2). \quad (40)$$

В результате из выражения (2) с учетом (17) функция, определяющая форму возмущенной сферической капли, нелинейно осциллирующей во внешнем электростатическом поле, с точностью до слагаемых второго порядка малости примет вид:

$$r(\theta, t) = 1 + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j^{(1)}(t) P_j(\mu) +$$

$$+ \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu), \quad (41)$$

где амплитуды $M_n^{(m)}(t)$ ($m = 1; 2$) вычисляются по формулам (37)–(40).

Кроме того, подставляя в разложение (16) найденные амплитудные коэффициенты $F_n^{(m)}(t)$ из (24), (32), запишем поправки первого и второго порядков малости к электрическому

потенциалу, вызванные возмущением поверхности капли:

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) =$$

$$= E_0 \sum_{j \in \Xi} \left[M_{j-1}^{(1)}(t) l_1(j) + M_{j+1}^{(1)}(t) l_2(j) \right] r^{-(j+1)} P_j(\mu);$$

$$\Phi^{(2)}(r, \theta, t) =$$

$$= E_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[M_{n-1}^{(2)}(t) l_1(n) + M_{n+1}^{(2)}(t) l_2(n) + \right.$$

$$+ \sum_{j \in \Xi} \sum_{i \in \Xi} \left(M_{j-1}^{(1)}(t) l_3(j, i, n) + \right.$$

$$\left. + M_{j+1}^{(1)}(t) l_4(j, i, n) \right) M_i^{(1)}(t) \left. \right] r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (42)$$

ПОВЕРХНОСТНАЯ ПЛОТНОСТЬ ИНДУЦИРОВАННЫХ ЗАРЯДОВ

Поверхностную плотность $\nu(r, \theta, t)$ зарядов, индуцированных внешним электростатическим полем и распределенных на поверхности капли $r(\theta, t)$, найдем, как [13]:

$$\nu(r, \theta, t) = \frac{E_n(r, \theta, t)}{4\pi} \Big|_{r=r(\theta, t)} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \left(\vec{n}(r, \theta, t), \nabla \Phi(r, \theta, t) \right) \Big|_{r=r(\theta, t)}. \quad (43)$$

В (43) вектор нормали $\vec{n}(r, \theta, t)$ к свободной поверхности капли находится подстановкой в (13) соотношения (3) для $r(\theta, t)$ с учетом разложения (17) для волнового возмущения $\xi(\theta, t)$ в следующем виде:

$$\vec{n}(r, \theta, t) = \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(-\varepsilon \left(\frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial \theta} \right) + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^2 \left(\xi^{(1)}(\theta, t) \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial \theta} - \frac{\partial \xi^{(2)}(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \right) \vec{e}_\theta, \quad (44)$$

где \vec{e}_r и \vec{e}_θ – орты сферической системы координат.

Заметим, что выражение (44) записано с точностью до слагаемых второго порядка малости по ε .

Подставляя в (43) единичный вектор нормали (44) и электрический потенциал (14), получим поверхностную плотность зарядов в виде разложения по степеням малого параметра ε с точностью до слагаемых $\sim \varepsilon^2$:

$$v(r, \theta, t) = \frac{1}{4\pi} \left\{ 3E_0 P_1(\mu) + \varepsilon \left[-6E_0 \xi^{(1)} P_1(\mu) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right] + \varepsilon^2 \left[-\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} - 6E_0 \xi^{(2)} P_1(\mu) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3E_0 P_1(\mu) \left(4 \left(\xi^{(1)} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right) + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} - \xi^{(1)} \left(3E_0 \frac{\partial P_1(\mu)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} \right) \right] \right\} \Bigg|_{r=1}.$$

В итоге, учитывая явный вид линейных и нелинейных поправок к электрическому потенциалу (42) и к равновесной поверхности капли (41), представим поверхностную плотность индуцированных зарядов в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$v(r, \theta, t) = \frac{3}{4\pi} E_0 \times \quad (45) \\ \times \left[P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} \left(M_{j-1}^{(1)}(t) k_1(j) + M_{j+1}^{(1)}(t) k_2(j) \right) P_j(\mu) + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(M_{n-1}^{(2)}(t) k_1(n) + M_{n+1}^{(2)}(t) k_2(n) \right) + \right. \\ \left. + \sum_{j \in \Xi} \sum_{i \in \Xi} \left(M_{j-1}^{(1)}(t) k_3(j, i, n) + M_{j+1}^{(1)}(t) k_4(j, i, n) \right) M_i^{(1)}(t) P_n(\mu) \right]; \\ k_1(j) = \frac{j(j-1)}{(2j-1)}; \quad k_2(j) = \frac{(j+1)(j-1)}{(2j+3)}; \\ k_3(j, i, n) = -\frac{j(j^2 + j - jn - 1)}{(2j-1)} K_{j, i, n}; \\ k_4(j, i, n) = -\frac{j(j+1)(j-n+3)}{(2j+3)} K_{j, i, n}.$$

ВЕЛИЧИНЫ ИНДУЦИРОВАННЫХ ЗАРЯДОВ

Вычислим величины разноименных индуцированных зарядов $q_{\pm}(r, \theta, t)$, распределенных по поверхностям двух половинок проводящей капли S_1 , S_2 (S_1 заряжена положительно; S_2 – отрицательно) на основе формулы:

$$q_{\pm}(r, \theta, t) = \int_{S_{1,2}} dq_{\pm}(r, \theta, t) = \quad (46) \\ = \int_{S_{1,2}} v(r, \theta, t) dS_{1,2} = \\ = \int_{S_{1,2}} \frac{v(r, \theta, t)}{\left(\vec{n}(r, \theta, t), \vec{e}_r \right)} r^2 \Big|_{r=r(\theta, t)} \sin \theta d\theta d\varphi; \\ S_1 \equiv \left[r = r(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right]; \\ S_2 \equiv \left[r = r(\theta, t); \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right];$$

где $r(\theta, t)$ определяется (41).

Ввиду того что противоположно заряженные индуцированные заряды распределены по поверхности капли $r(\theta, t)$ симметрично относительно экваториальной плоскости, при выводе выражения (46) достаточно рассмотреть положительно заряженную половинку капли S_1 .

Подстановка в (46) соотношений для орта нормали (44), поверхностной плотности зарядов (45) и формы возмущенной поверхности капли (41) и вычисление интеграла по поверхности S_1 позволяют получить величину положительного индуцированного заряда q_+ в виде:

$$q_+(t) = \frac{3}{4} E_0 \left\{ 1 + 2\varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j^{(1)}(t) L_0(j) + \right. \\ \left. + 2\varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j \in \Xi} \sum_{i \in \Xi} M_i^{(1)}(t) \times \right. \quad (47) \\ \left. \times \left(M_{j-1}^{(1)}(t) L_1(j, i, n) + M_{j+1}^{(1)}(t) L_2(j, i, n) \right) + M_n^{(2)}(t) L_0(n) \right) \right\},$$

где числовые коэффициенты $L_0(j)$, $L_1(j, i, n)$, $L_2(j, i, n)$ вынесены в приложение.

Отметим, что (47) найдено с учетом слагаемых второго порядка малости по ε . Выражение для отрицательного заряда q_- отличается от (47) лишь знаком.

Используя амплитуды первого и второго порядков $M_j^{(1)}(t)$ и $M_n^{(2)}(t)$ из (37)–(40) и переходя к размерным физическим величинам, запишем окончательное решение для разноименных индуцированных зарядов:

$$q_{\pm}(t) = \pm \frac{3}{4} E_0 R^2 \left\{ 1 + 2\varepsilon \sum_{j \in \Xi} L_0(j) h_j \cos(\omega_j^{\pm} t) + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in \Xi} \sum_{i \in \Xi} \left[S_1(j, i, n) \left(\cos((\omega_i + \omega_{j-1})t) + \cos((\omega_i - \omega_{j-1})t) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + S_2(j, i, n) \left(\cos((\omega_i + \omega_{j+1})t) + \cos((\omega_i - \omega_{j+1})t) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + S_3(j, i, n) \left(\cos((\omega_i + \omega_j)t) - \cos(\omega_n t) \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + S_4(j, i, n) \left(\cos((\omega_i - \omega_j)t) - \cos(\omega_n t) \right) \right] \right\}; \quad (48)$$

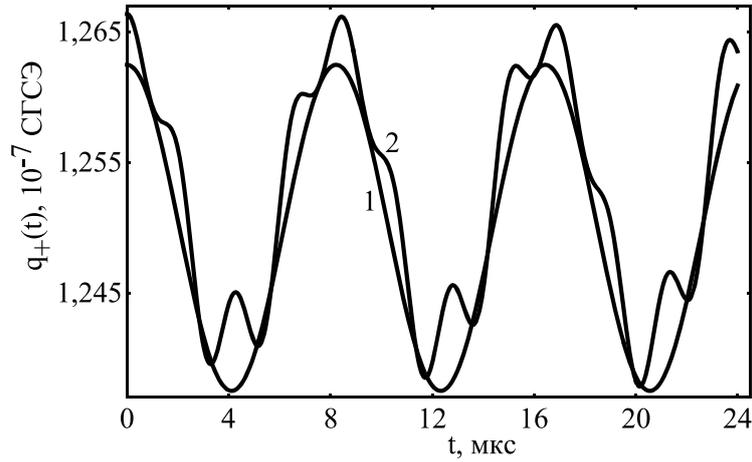


Рис. 1. Зависимость от времени t величины положительного индуцированного заряда капли $q_+(t)$ при начальном возбуждении равновесной формы поверхности капли возмущением вида $\varepsilon[P_2(\mu) + P_3(\mu)]/2$, рассчитанного при $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $R = 10$ мкм, $E_0 = 50$ В/см ($\sim 4 \times 10^{-4} E_{0кр}$). Кривая 1 соответствует $q_+(t)$ при линейных осцилляциях капли, кривая 2 – при нелинейных осцилляциях капли.

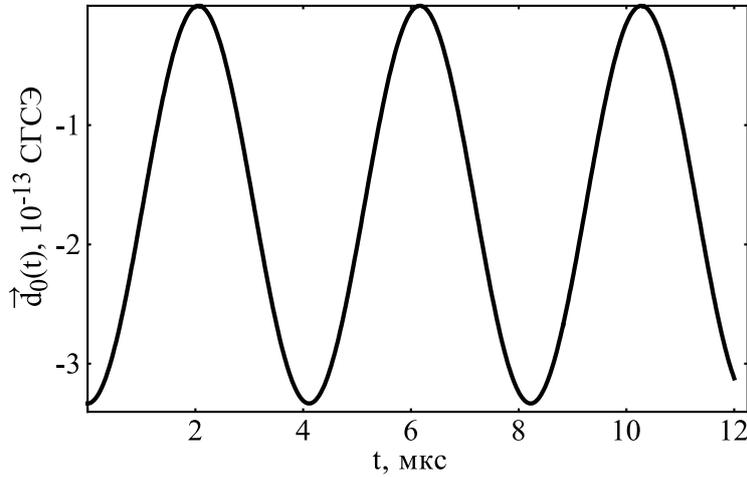


Рис. 2. Зависимость от времени t величины дипольного момента $\vec{d}_0(t)$, рассчитанного при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 1 и $j = 2$.

где числовые коэффициенты $S_1(j, i, n)$ – $S_4(j, i, n)$, зависящие от индексов j , i , n и начальных амплитуд h_i , h_j , $h_{j\pm 1}$, даны в приложении.

На рис. 1 приведена зависимость величины положительного индуцированного заряда капли $q_+(t)$ от времени t . Несложно видеть, что асимптотические расчеты второго порядка малости по ε дают небольшую поправку к величине положительного заряда $q_+(t)$, найденного в расчетах первого порядка.

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Электрический диполь моделируется «эффективными» индуцированными зарядами $q_+(t)$,

$q_-(t)$, разнесенными относительно друг друга по оси симметрии OZ капли. В этом случае дипольный момент определяется как:

$$\vec{d}(t) = q_+(t)(\vec{R}_{q_+}(t) - \vec{R}_{q_-}(t)); \quad (49)$$

В (49) смещения центров разноименных зарядов $\vec{R}_{q_+}(t)$, $\vec{R}_{q_-}(t)$ связаны с возбуждением нулевой моды (с радиальными пульсациями) или первой моды (с трансляционным движением центра масс) осциллирующей капли, обнаруживаемых в асимптотических расчетах второго порядка малости по ε . Тогда на основе формулы (1) и уравнений (38), (39) для амплитуд нулевой $M_0^{(2)}(t)$ и первой $M_1^{(2)}(t)$ мод запишем радиус-векторы положений «эффективных» центров индуцированных зарядов в виде:

$$\begin{aligned}\vec{R}_{0,1q_{\pm}}(t) &= \frac{1}{q_{\pm}(t)} \int_{S_1, S_2} r \cos \theta \vec{e}_z dq_+(t) = \\ &= \frac{1}{q_{\pm}(t)} \int_{S_1, S_2} R_{0,1}(t) \frac{v(t)r^2}{(\vec{n}(t), \vec{e}_r)} \Big|_{r=r(\theta,t)} \vec{e}_z \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi;\end{aligned}\quad (50)$$

где

$$\begin{aligned}R_0(t) &= -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{h_j^2}{(2j+1)} (\cos(\omega_j t))^2 \right]; \\ R_1(t) &= -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{9jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)} \cos(\omega_{j-1}t) \cos(\omega_j t) \right].\end{aligned}$$

Так как амплитуды нулевой и первой мод осцилляций капли обнаруживаются во втором порядке малости по ε , то величину индуцированного заряда и подынтегральное выражение в (50) нужно брать на равновесной поверхности капли $r = 1$.

Из (12), (50) несложно вычислить радиус-векторы расположения «эффективных» центров индуцированных зарядов при наличии нулевой моды в спектре капиллярных осцилляций поверхности капли в размерном виде:

$$\begin{aligned}\vec{R}_{0q_+}(t) &= -\frac{2}{3} \varepsilon^2 R \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{h_j^2}{(2j+1)} (\cos(\omega_j t))^2 \right] \vec{e}_z; \\ \vec{R}_{0q_-}(t) &= \frac{2}{3} \varepsilon^2 R \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{h_j^2}{(2j+1)} (\cos(\omega_j t))^2 \right] \vec{e}_z.\end{aligned}\quad (51)$$

Согласно (51) «эффективные» центры разноименных индуцированных зарядов при возбуждении нулевой моды во втором порядке малости совершают противофазные осцилляции, то есть их центры сближаются и удаляются.

Используя выражения для величины положительно индуцированного заряда (47) нулевого порядка по ε (определяется первым слагаемым в фигурных скобках в (47)) и смещения центров разноименных зарядов (51), из (48) получим соотношение для дипольного момента, найденного в расчетах второго порядка малости по ε :

$$\vec{d}_0(t) = -E_0 R^3 \varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{h_j^2}{(2j+1)} (\cos(\omega_j t))^2 \right] \vec{e}_z.$$

На рис. 2 для иллюстрации приведена зависимость дипольного момента $\vec{d}_0(t)$ от времени t . Видно, что величина $\vec{d}_0(t)$ периодически меняется со временем.

Подставляя в (2) вторую производную по времени от величины дипольного момента:

$$\frac{\partial^2 \vec{d}_0(t)}{\partial t^2} = 2E_0 R^3 \varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{h_j^2}{(2j+1)} \omega_j^2 \cos(2\omega_j t) \right] \vec{e}_z$$

и заменяя в получившемся выражении косинус на его максимальное значение, найдем аналитическое выражение для оценки по порядку величины интенсивности излучения, связанного с возбуждением нулевой моды во втором порядке малости по безразмерной амплитуде осцилляций:

$$I_0 = \frac{8}{3} \frac{E_0^2 R^6 \varepsilon^4}{c^3} \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{h_j^4 \omega_j^4}{(2j+1)^2} \right].\quad (52)$$

Аналогичным образом из (12), (50) определим радиус-векторы положений «эффективных» центров индуцированных зарядов для первой (трансляционной) моды в спектре капиллярных осцилляций капли в размерном виде:

$$\begin{aligned}\vec{R}_{1q_+}(t) &= -6\varepsilon^2 R \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)} \cos(\omega_{j-1}t) \cos(\omega_j t) \right] \vec{e}_z = \\ &= -3\varepsilon^2 R \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)} (\cos(\omega_j + \omega_{j-1})t + \cos(\omega_j - \omega_{j-1})t) \right] \vec{e}_z; \\ \vec{R}_{1q_-}(t) &= 6\varepsilon^2 R \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)} \cos(\omega_{j-1}t) \cos(\omega_j t) \right] \vec{e}_z = \\ &= 3\varepsilon^2 R \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)} (\cos(\omega_j + \omega_{j-1})t + \cos(\omega_j - \omega_{j-1})t) \right] \vec{e}_z.\end{aligned}$$

Заметим, что «эффективные» центры противоположно заряженных индуцированных зарядов осциллируют противофазно в расчетах второго порядка малости по ε .

В этом случае аналитическое выражение дипольного момента имеет вид:

$$\begin{aligned}\vec{d}_1(t) &= -\frac{9}{2} E_0 R^3 \varepsilon^2 \\ &\sum_{j \in \Xi} \left[\frac{jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)} (\cos(\omega_j + \omega_{j-1})t + \cos(\omega_j - \omega_{j-1})t) \right] \vec{e}_z.\end{aligned}\quad (53)$$

На рис. 3 изображен график зависимости дипольного момента $\vec{d}_1(t)$ от времени t . Показано, что величина $\vec{d}_1(t)$ периодически меняется со временем.

На рис. 4 и 5 приведены зависимости частот осцилляций капли центрально-симметричной и трансляционной мод от радиуса капли R и коэффициента поверхностного натяжения σ . Показано, что при увеличении размера капли частоты ее осцилляций быстро уменьшаются примерно по гиперболическому закону. При повышении величины коэффициента поверхностного натяжения жидкости частоты осцилляций капли возрастают: при увеличении коэффициента поверхностного натяжения на

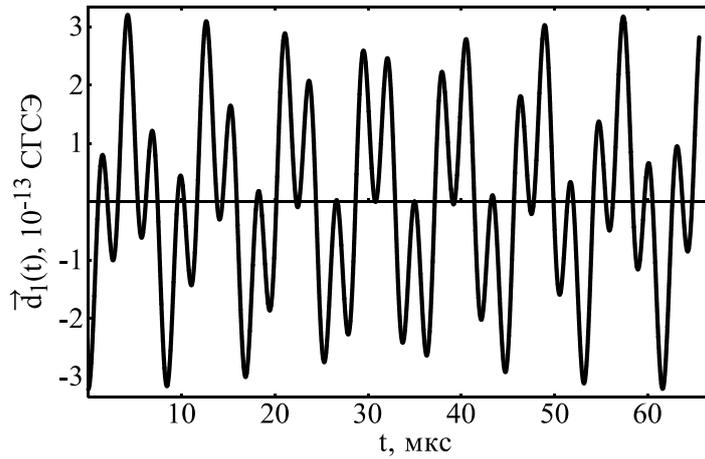


Рис. 3. Зависимость от времени t величины дипольного момента $\vec{d}_1(t)$, рассчитанного при тех же прочих значениях физических величин, что на [рис. 1](#) и $j-1=2, j=3$.

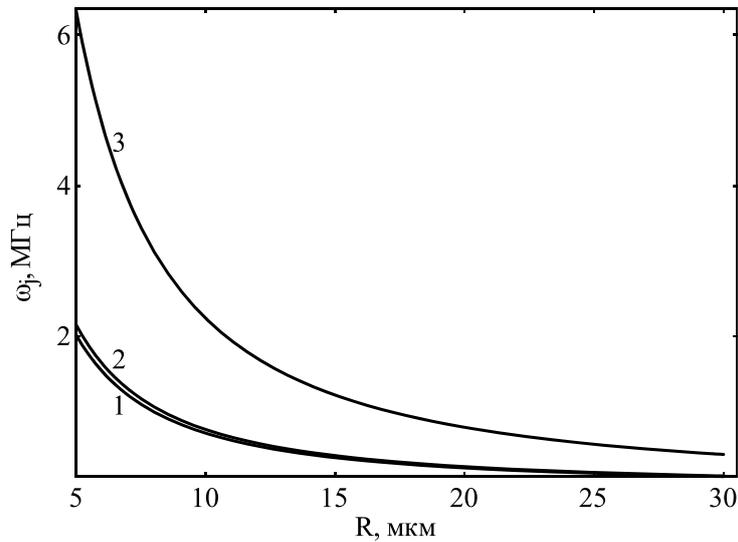


Рис. 4. Зависимость от радиуса капли R частот осцилляций ω_j центрально-симметричной и трансляционной мод, рассчитанных при тех же прочих значениях физических величин, что на [рис. 1](#). Кривая 1 соответствует частоте осцилляций капли $\omega_3-\omega_2$ трансляционной моды, кривая 2 – ω_2 центрально-симметричной моды, кривая 3 – $\omega_3+\omega_2$ трансляционной моды.

порядок частоты осцилляций возрастают в три раза.

Заметим, что частоты осцилляций капли не зависят от напряженности внешнего электрического поля. Слабая зависимость частот от напряженности электрического поля может определяться при учете стационарной деформации капли, обусловленной наличием внешнего поля.

Из [рис. 4](#) и [5](#) несложно видеть, что частота осцилляций трансляционной моды в три раза выше частоты осцилляций центрально-симметричной моды.

Рассчитаем вторую производную по времени от (53) в виде:

$$\frac{\partial^2 \vec{d}_1(t)}{\partial t^2} = \frac{9}{2} E_0 R^3 \varepsilon^2$$

$$\sum_{j \in \Xi} \left[\frac{j h_{j-1} h_j}{(2j-1)(2j+1)} \left((\omega_j + \omega_{j-1})^2 \cos(\omega_j + \omega_{j-1})t + (\omega_j - \omega_{j-1})^2 \cos(\omega_j - \omega_{j-1})t \right) \right] \vec{e}_z.$$

В итоге, подставляя полученное соотношение в (2) и придавая косинусам их максимальные

значения, запишем окончательное выражение для интенсивности излучения, связанного с возбуждением первой (трансляционной) моды во втором порядке малости по ε :

$$I_1 = \frac{27 E_0^2 R^6 \varepsilon^4}{2 c^3} \quad (54)$$

$$\sum_{j \in \Xi} \left[\frac{j h_{j-1} h_j}{(2j-1)(2j+1)} \left((\omega_j + \omega_{j-1})^2 + (\omega_j - \omega_{j-1})^2 \right) \right]^2.$$

Таким образом, используя формулы (52), (54), можно привести численные оценки электромагнитного излучения от различных жидкокапельных систем искусственного и естественного происхождения, например таких, как конвективные облака.

Возможный источник радиоизлучения внутриоблачных капель связан с нелинейными осцилляциями низких мод мелких капель с характерными размерами от 3 до 30 мкм. Концентрация n таких капель в облаке составляет $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$ [15].

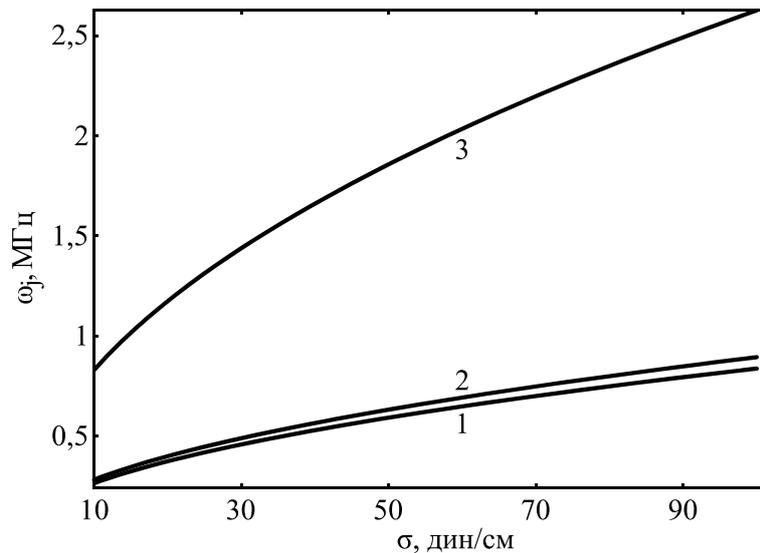


Рис. 5. Зависимость от коэффициента поверхностного натяжения капли σ частот ее осцилляций ω_j нулевой и первой мод, рассчитанных при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 1. Кривая 1 соответствует частоте осцилляций капли $\omega_3 - \omega_2$ трансляционной моды, кривая 2 – ω_2 центрально-симметричной моды, кривая 3 – $\omega_3 + \omega_2$ трансляционной моды.

Отметим, что осцилляции каплей большой амплитуды обусловлены микрофизическими внутриоблачными процессами: коагуляцией с более мелкими частицами, дроблением на более мелкие капли в результате процессов столкновения или реализации электростатической неустойчивости, гидродинамическим и электрическим взаимодействием близко пролетающих каплей, аэродинамическим взаимодействием с развитой мелкомасштабной турбулентностью, характерной для грозových облаков [16, 17].

Согласно данным натурных наблюдений, амплитуда осцилляций внутриоблачных каплей может достигать десятков процентов от радиуса капли [16, 17]. Для нижеследующих численных оценок примем значение безразмерной амплитуды осцилляций, равное 0,1.

По формулам (52), (54) выполним оценку по порядку величины мощности радиоизлучения единичной нелинейно осциллирующей незаряженной капли, находящейся во внешнем электростатическом поле. Для этого примем следующие значения: $\varepsilon = 0,1$, $h_2 = 1$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $E_0 = 50$ В/см ($\sim 2 \times 10^{-4} E_{0кр}$ ($E_{0кр}$ – критическое значение напряженности поля) при $R = 3$ мкм и $\sim 7 \times 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 30$ мкм) [15, 18].

Согласно (52) примем, что возбуждение нулевой моды во втором порядке малости по ε связано с изначально возбужденной колебательной модой $j = 2$. Тогда интенсивность излучения, определяемая периодическими радиальными пульсациями капли при одновре-

менном смещении центров индуцированных зарядов, при $R = 3$ мкм составила $I_0 \sim 4 \times 10^{-33}$ эрг/с. Для капли размером $R = 8$ мкм получено излучение $I_0 \sim 4 \times 10^{-33}$ эрг/с. При радиусе $R = 30$ мкм получено $I_0 \sim 4 \times 10^{-33}$ эрг/с. Иначе говоря, интенсивность излучения весьма слабо зависит от радиуса капли [3].

Используя формулу (54), рассмотрим случай, когда возбуждение во втором порядке малости трансляционной моды связано с присутствием в начальном спектре двух соседних колебательных мод с номерами $j = 2$ и $j = 3$. В результате оценка интенсивности излучения, связанная с периодическим движением центра масс капли и «эффективных» центров индуцированных зарядов, при радиусе капли $R = 3$ мкм составила $I_1 \sim 2 \times 10^{-32}$ эрг/с. При $R = 8$ мкм получена мощность излучения $I_1 \sim 2 \times 10^{-32}$ эрг/с. При $R = 30$ мкм – $I_1 \sim 2 \times 10^{-32}$ эрг/с.

Как видно из вышеприведенных оценок, интенсивности излучения I_0 , I_1 весьма слабо зависят от линейного размера капли.

На рис. 6 приведены зависимости интенсивностей излучения I_0 , I_1 от напряженности внешнего электростатического поля E_0 . Видно, что с ростом величины напряженности электрического поля интенсивность излучения быстро возрастает. Если напряженность электрического поля увеличить в три раза, то мощность излучения возрастет на порядок.

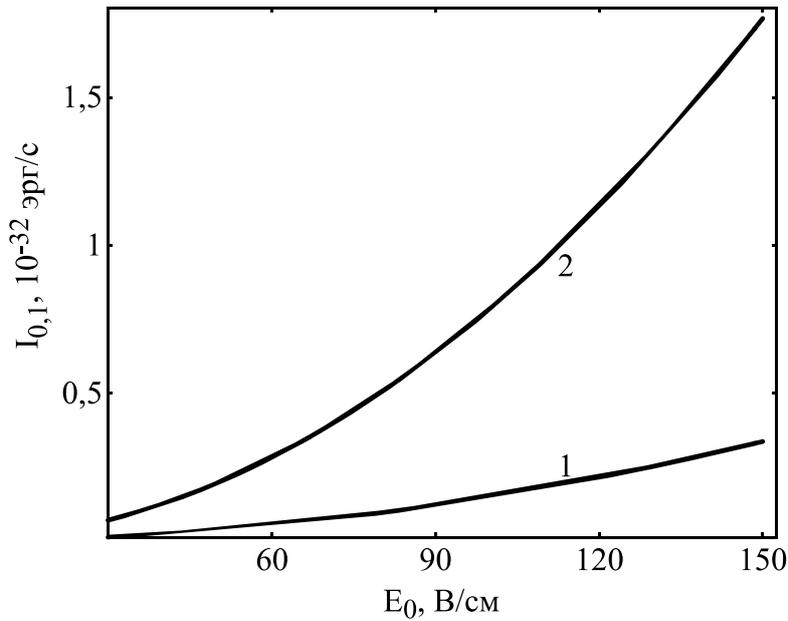


Рис. 6. Зависимость интенсивностей I_0 , I_1 электромагнитного излучения единичной незаряженной капли, нелинейно осциллирующей в однородном электростатическом поле, от величины напряженности внешнего поля E_0 , рассчитанного при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 1. Кривая 1 соответствует интенсивности излучения I_0 при $j = 2$, кривая 2 – I_1 при $j = 2$ и $j = 3$.

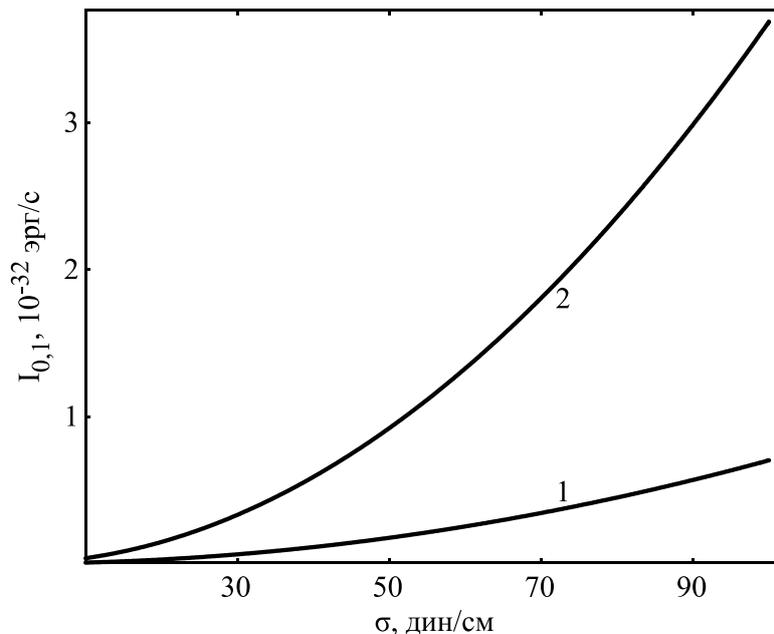


Рис. 7. Зависимость интенсивностей I_0 , I_1 электромагнитного излучения единичной незаряженной капли, нелинейно осциллирующей в однородном электростатическом поле, от величины коэффициента поверхностного натяжения σ , рассчитанного при тех же прочих значениях физических величин, что на рис. 1. Кривая 1 соответствует интенсивности излучения I_0 при $j = 2$, кривая 2 – I_1 при $j = 2$ и $j = 3$.

На рис. 7 изображены графики зависимости интенсивностей излучения I_0 , I_1 от величины коэффициента поверхностного натяжения σ . Видно, что с ростом σ интенсивность излучения увеличивается.

В заключение целесообразно задаться вопросом о причине возбуждения центрально-симметричной и трансляционной мод в асимптотических расчетах более высоких порядков по малому параметру ε , чем первый. Одной из причин может быть сам применяемый асимпто-

тический метод, оставляющий в расчетах порядка n (где n – целое число) погрешность $\sim \varepsilon^n$, которая частично (на величину $\sim \varepsilon$) исправляется в расчетах следующего порядка малости. В этом случае появление в спектре возбуждаемых центрально-симметричной и трансляционной мод носит компенсационный характер, тем более что генерируемое нулевой и первой модами излучение имеет дипольный характер в том же диапазоне изменения частоты, что и основное излучение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для нелинейно осциллирующей незаряженной сферической капли, находящейся во внешнем электростатическом поле, в расчетах второго порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций показано, что поправка к интенсивности дипольного излучения, обусловленного синхронным движением центров, индуцированных внешним полем зарядов противоположных знаков при радиальных пульсациях капли, на порядок слабее поправки к излучению, связанному с возбуждением трансляционной моды (движением центра масс капли) и периодическим движением центров индуцированных зарядов, и на три порядка слабее по сравнению с основным дипольным излучением, найденным в расчетах первого порядка [3, 18].

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690131-7).

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Выражения для коэффициентов $L_0(j)$, $L_1(j, i, n)$, $L_2(j, i, n)$ в (46):

$$L_0(j) = p_1 F_{j-1} + p_2 F_{j+1};$$

$$p_1 = \frac{j^2}{(2j+1)}; \quad p_2 = \frac{(j+1)(j+2)}{(2j+1)};$$

$$L_1(j, i, n) = \frac{j}{(2j-1)} (j(n+1-j) K_{j,i,n} + \alpha_{j,i,n}) F_n;$$

$$L_2(j, i, n) = \frac{(j+1)}{(2j+3)} \left(-(j+1)^2 + j(n+1) \right) K_{j,i,n} + \alpha_{j,i,n} F_n;$$

$$F_j = \int_0^{\pi/2} P_j(\mu) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 1 & (j=0); \\ \frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}} (j-1)!}{2^{j-1} (j+1) \left(\left(\frac{j-1}{2} \right)! \right)^2} & (j=2k+1); \\ 0 & (j=2k). \end{cases}$$

Выражения для коэффициентов $S_1(j, i, n)$ – $S_4(j, i, n)$ в (47):

$$S_1(j, i, n) = h_i h_{j-1} L_1(j, i, n);$$

$$S_2(j, i, n) = h_i h_{j+1} L_2(j, i, n);$$

$$S_3(j, i, n) = h_i h_j N_0^{(+)}(j, i, n) L_0(n);$$

$$S_4(j, i, n) = h_i h_j N_0^{(-)}(j, i, n) L_0(n).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Калечиц, В.И., Нахутин, И.Е., Полуэктов, П.П., О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков, ДАН СССР, 1982, т. 262, № 6, с. 1344.
2. Богатов, Н.А., Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель. Тезисы докладов VI Межд. конф. «Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений». Петропавловск-Камчатский: ДВО РАН, 2013, с. 10.
3. Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., Колбнева, Н.Ю., Электромагнитное излучение капли, осциллирующей в грозовом облаке. Москва–Берлин: Директ-Медиа, 2021. 220 с.
4. Ширяева, С.О., Волкова, М.В., Григорьев, А.И., Нелинейные осцилляции незаряженной электропроводной капли в однородном внешнем электростатическом поле, ЖТФ, 2005, т. 75, вып. 3, с. 36.
5. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., Теоретическая физика. Том 2. Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
6. Левич, В.Г., Курс теоретической физики, Том 1. М.: Наука, 1969. 911 с.
7. O' Kanski, C.J., Thacher, H.C., The distortion of aerosol droplets by an electric field, J. Phys. Chem., 1953, vol. 57, p. 955.
8. Taylor, G.I., Disintegration of water drops in an electric field, Proc. Roy. Soc., 1964, vol. A280, p. 383.
9. Сивухин, Д.В., Общый курс физики. Том 3. Электричество. Часть вторая. М.: Наука, 1996. 320 с.
10. Френкель, Я.И., К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме, ЖЭТФ, 1936, т. 6, № 4, с. 348.
11. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
12. Найфе, А.Х., Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 455 с.
13. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
14. Варшалович, Д.А., Москалев, А.Н., Херсонский, В.К., Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
15. Мазин, И.П., Шметер, С.М., Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеониздат, 1983. 280 с.
16. Beard, K.V. and Tokay, A.A., A field study of small raindrop oscillations, Geophys. Res. Lett., 1991, vol. 18, no. 12, p. 2257.

17. Стерлядкин, В.В., Натурные измерения колебаний капель осадков, *Изв. АН СССР, ФАО*, 1988, т. 24, № 6, с. 613.
18. Ширяева, С.О., Григорьев, А.И., Колбнева, Н.Ю., Асимптотический расчет интенсивности дипольного электромагнитного излучения от осциллирующей в электростатическом поле незаряженной капли, *ЭОМ*, 2017, т. 53, № 4, с. 28.

Summary

The paper deals with electromagnetic radiation generated by capillary oscillations of the zero and first modes of oscillations of a droplet in an external electrostatic field. It is assumed that the droplet of an ideal incompressible electrically conductive liquid has a zero total electric charge and that it is charged in an external

uniform electrostatic field by induced charges of opposite signs. The radiation under discussion is detected via analytical asymptotic calculations of the second order infinitesimal by the dimensionless amplitude of the droplet oscillations in an external electrostatic field. An analytical expression was found for the intensity of the electromagnetic radiation associated with oscillations of the zero and first modes, and the dependence of the intensity of radiation on the value of the field strength, the droplet size, and the value of the surface tension coefficient.

Keywords: droplet, electrostatic field, capillary oscillations, centrally symmetric and translational modes, electromagnetic radiation