

# О взаимодействии азимутальных мод капиллярных волн на поверхности струи эллиптического сечения в однородном электростатическом поле

С. О. Ширяева\*, А. И. Григорьев\*\*

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
г. Ярославль, 150000, Россия,

\*e-mail: [shir@uniyar.ac.ru](mailto:shir@uniyar.ac.ru); \*\*e-mail: [grigorai@mail.ru](mailto:grigorai@mail.ru)

Поступила в редакцию 08.10.2021

После доработки 23.03.2022

Принята к публикации 29.03.2022

Исследуется нелинейное по произведению двух независимых малых параметров взаимодействие капиллярных волн для первых азимутальных мод струи эллиптического сечения в перпендикулярном ее оси однородном электростатическом поле. Взаимодействие возникает из-за эллиптичности перпендикулярного струе сечения. Во взаимодействии участвуют три азимутальные моды: либо четные, либо нечетные. При сравнении со струей в радиальном электростатическом поле устойчивость струи в перпендикулярном однородном электростатическом поле снижается. Характерное время реализации неустойчивости уменьшается с ростом начальных амплитуд взаимодействующих мод и с увеличением напряженности внешнего электростатического поля, а также зависит от величины волнового числа.

*Ключевые слова:* эллиптическая струя, электростатическое поле, азимутальные моды, взаимодействие капиллярных волн, неустойчивость

УДК 537.77:544.7

<https://doi.org/10.52577/eom.2022.58.5.27>

## ВВЕДЕНИЕ

Явление электродиспергирования жидкости имеет весьма широкий спектр приложений (см., например, обзоры [1–3]). Но если неустойчивость капиллярных волн на струе в продольном и радиальном электростатических полях в теоретическом отношении хорошо исследована [3–4], то капиллярные волны на струе в поперечном ее оси симметрии (невозмущенной капиллярным волновым движением) электростатическом поле никто не исследовал. Поэтому решение задачи о неустойчивости капиллярных волн на струе эллиптического сечения представляется актуальным. Строго говоря, вопрос об устойчивости капиллярных волн на струе эллиптического сечения поднимался [5], но лишь в той ситуации, когда эллиптическое сечение струи вращается вокруг оси струи с периодом, обусловленным инерционностью жидкости, в связи со старыми экспериментами [6], связанными с продавливанием струи через отверстия разных форм и осциллирующих вследствие инерционности в окрестности круговой цилиндрической формы.

В настоящей работе исследуется неустойчивость круговой струи, имеющей в перпендикулярном сечении окружность, помещенной в перпендикулярное ее оси симметрии (при отсутствии возмущений) однородное электростати-

ческое поле, в котором поперечное сечение струи принимает примерно эллиптическую форму. На верхней и нижней половинках струи образуются индукционные заряды разных знаков, влияющие на ее устойчивость.

Предполагается исследовать устойчивость различных азимутальных мод (различающихся степенью симметрии относительно продольной оси, вдоль которой бежит струя).

Следует отметить, что эта задача решалась в [7], но там исследование было ограничено выводом и анализом дисперсионного уравнения, полученного в нулевом порядке по квадрату эксцентриситета, а взаимодействию мод капиллярных волн, появляющемуся пропорционально произведению малых параметров: безразмерной амплитуде осцилляций и квадрату эксцентриситета эллипса, внимания не было уделено. Этот пробел должна заполнить настоящая работа.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ

Примем, что бесконечно длинная цилиндрическая струя круговым поперечным сечением радиуса  $R$  идеальной, несжимаемой, электропроводной жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$ , массовой плотностью  $\rho$  движется с постоянной скоростью  $\vec{U}$ . Положим также, что струя находится в поперечном ее оси однородном электростатическом поле

напряженностью  $\vec{E}_0$ , в котором струя принимает вытянутую вдоль  $\vec{E}_0$  форму (примерно эллиптическую в поперечном сечении) [7]. Уравнение равновесной поверхности струи, невозмущенной капиллярным волновым движением, примет вид:  $r = r(\varphi)$  в цилиндрической системе координат, орт  $\vec{e}_z$  которой параллелен оси струи. Координата  $r$  – расстояние от произвольной точки внутри струи до оси невозмущенной струи по перпендикуляру, а  $\varphi$  – азимутальная угловая переменная. Примем, что начало системы координат находится на оси невозмущенной струи и движется со скоростью струи  $\vec{U}$ . Задачу будем решать в инерциальной системе отсчета, связанной с осью симметрии струи невозмущенной капиллярным волновым движением.

В реальной ситуации поверхность жидкости (в нашем случае струи) возмущена капиллярным волновым движением бесконечно малой (тепловой) амплитуды [8, 9]. Капиллярные волны теплового происхождения генерируются тепловым движением молекул жидкости и имеют амплитуды  $\sim \sqrt{\kappa T/\sigma}$ , где  $\kappa$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура жидкости [9]. Для большинства жидкостей эти амплитуды не превышают одной десятой нанометра.

Уравнение поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, будем описывать формулой:

$$r = r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t),$$

где  $\xi(\varphi, z, t)$  – малое возмущение равновесной поверхности  $\sim 10^{-10}$  м, а отношение  $\varepsilon \equiv (\max|\xi|/R) \ll 1$  примем в качестве основного малого параметра задачи. Если  $R \sim 10^{-4}$ , то  $\varepsilon \sim 10^{-6}$  будет служить малым параметром задачи, решение которой будем искать в первом приближении по  $\varepsilon$ . Вторым малым параметром будет величина квадрата эксцентриситета эллипса в поперечном сечении струи  $e^2 \sim 10^{-1}$ .

#### ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

В предположении, что гидродинамическая скорость движения частицы жидкости много меньше релятивистской, выпишем математическую формулировку задачи:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{V}(\vec{r}, t) &= 0; \\ \partial_t \vec{V}(\vec{r}, t) + (\vec{V}(\vec{r}, t) \times \nabla) \vec{V}(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p(\vec{r}, t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0; \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}, t) = 0; \\ r \rightarrow \infty: \vec{E}(\vec{r}, t) &\rightarrow \vec{E}_0; r \rightarrow 0: \vec{V}(\vec{r}, t) \rightarrow 0; \\ r &= r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t); \\ \frac{dF(r, \varphi, z, t)}{dt} &= 0; \\ F(r, \varphi, z, t) &\equiv r - r(\varphi) - \xi(\varphi, z, t); \\ p(\vec{r}, t) + p_E(\vec{r}, t) - p_\sigma(\vec{r}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\vec{V}(\vec{r}, t)$  и  $p(\vec{r}, t)$  – поля скорости течения жидкости и давления в струе;  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  – напряженность электрического поля у поверхности возмущенной струи;  $p_E(\vec{r}, t) \equiv \vec{E}(\vec{r}, t)^2/8\pi$  – давление электрического поля на возмущенную поверхность струи [10];  $p_\sigma(\vec{r}, t) \equiv \sigma \operatorname{div} \vec{n}(\vec{r}, t)$  – давление сил поверхностного натяжения [11];  $\vec{n}(\vec{r}, t)$  – орт нормали к возмущенной поверхности струи:

$$r = r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t): \vec{n}(\vec{r}, t) \equiv \frac{\nabla F(r, \varphi, z, t)}{|\nabla F(r, \varphi, z, t)|}.$$

Граничное условие для электрического поля на поверхности струи заключается в отсутствии касательной компоненты вектора напряженности:

$$\vec{\tau}(\vec{r}, t) \times \vec{E}(\vec{r}, t) = 0,$$

где  $\vec{\tau}(\vec{r}, t)$  – орт касательной к поверхности струи.

Учтем также условия постоянства объема участка струи длиной, равной длине капиллярной волны  $\lambda$ , и сохранения заряда на том же участке струи:

$$\begin{aligned} r &= r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t): \\ \int_a^{c+\lambda} \int_0^{2\pi} \int_0^{r(\varphi)+\xi(\varphi, z, t)} r dr d\varphi dz &= \pi R^2 \lambda; \\ r &= r(\varphi) + \xi(\varphi, z, t): \int_c^{c+\lambda} \int_0^{2\pi} \chi(\vec{r}, t) dS = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $c$  – фиксированная координата вдоль оси струи (оси OZ);  $\chi(\vec{r}, t)$  – поверхностная плотность заряда на возмущенной струе.

Исходную векторную задачу сведем к скалярной, введя стандартными способами гидродинамический  $\psi(\vec{r}, t)$  [11] и электрический  $\Phi(\vec{r}, t)$  [12] потенциалы. Саму задачу будем решать в безразмерных переменных, положив  $R = \sigma = \rho = 1$ , сохранив за всеми физическими величинами их прежние обозначения.

Так как движение жидкости в струе вызывается капиллярными волнами теплового происхождения, то в безразмерных переменных потенциал поля скоростей  $\psi(r, \varphi, z, t)$  должен иметь тот же порядок величины, что и возмущение равновесной поверхности  $\xi(\varphi, z, t)$ .

Искомые функции  $\xi(\varphi, z, t)$ ,  $\psi(r, \varphi, z, t)$  и  $\Phi(r, \varphi, z, t)$  представим в виде разложений по малому параметру  $\varepsilon$  [13]:

$$\begin{aligned}\xi(\varphi, z, t) &= \varepsilon \times \xi_1(\varphi, z, t) + O(\varepsilon^2); \\ \psi(r, \varphi, z, t) &= \varepsilon \times \psi_1(r, \varphi, z, t) + O(\varepsilon^2); \\ \Phi(r, \varphi, z, t) &= \Phi_0(r, \varphi) + \\ &+ \varepsilon \times \Phi_1(r, \varphi, z, t) + O(\varepsilon^2).\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь  $O$  – символ порядка малости [13].

Нижние индексы в обозначениях функций соответствуют порядку малости по  $\varepsilon$  значения соответствующей величины.

Подставляя разложения в исходную задачу и раскладывая полученные выражения в ряд по  $\varepsilon$ , сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями малого параметра. В результате получим краевые задачи различных порядков малости.

#### РАВНОВЕСНАЯ ФОРМА СТРУИ. ВТОРОЙ МАЛЫЙ ПАРАМЕТР

Равновесная форма струи найдется из решения задачи нулевого порядка малости по  $\varepsilon$  стандартным методом, например, как это делалось в [7, 14].

Выражение для равновесной формы струи получится в итоге в виде:

$$r = r(\varphi) \approx 1 + h(\varphi) \equiv 1 + \frac{E_0^2}{12\pi} \cos(2\varphi). \quad (4)$$

Сравним форму поперечного сечения струи с эллипсом. Для этого разложим уравнение эллипса, записанное в полярных координатах, в ряд по квадрату эксцентриситета  $e^2$ , который, согласно сказанному выше, принимается за второй малый параметр, существенный для рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned}r &= \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \varphi}} \approx \\ &\approx 1 + e^2 \frac{1}{4} \cos(2\varphi) + O(e^4).\end{aligned}\quad (5)$$

Сравнивая (5) с выражением (4), несложно заметить, что форму поперечного сечения струи

в линейном приближении по  $e^2$  можно считать эллипсом, вытянутым вдоль электростатического поля с эксцентриситетом, величина которого определяется величиной напряженности внешнего электростатического поля:

$$e^2 \approx E_0^2 / 3\pi.$$

Следует отметить, что полученное выражение справедливо лишь при малых значениях  $e^2$  и  $E_0^2$ . При больших значениях  $E_0^2$  зависимость  $e^2$  от  $E_0^2$  будет более слабой [15]. Дело в том, что эксцентриситет по определению этой геометрической характеристики эллипса ограничен сверху единицей, тогда как  $E_0^2$  ограничений не имеет.

#### ЗАДАЧА ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ОБОИМ МАЛЫМ ПАРАМЕТРАМ $\varepsilon$ , $e^2$ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Линеаризованная по величине равновесного искажения  $h(\varphi)$  цилиндрической формы струи задача первого порядка малости по  $\varepsilon$  имеет вид [7]:

$$\Delta \psi_1(r, \varphi, z, t) = 0; \quad \Delta \Phi_1(r, \varphi, z, t) = 0; \quad (6)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_1(r, \varphi, z, t) \rightarrow 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_1(r, \varphi, z, t) \rightarrow 0; \quad (7)$$

$$\begin{aligned}r=1: \quad & -\partial_t \xi_1(\varphi, z, t) + \\ & + (\partial_r \psi_1(r, \varphi, z, t) -\end{aligned}\quad (8)$$

$$-h'(\varphi) \partial_\varphi \psi_1(r, \varphi, z, t) + h(\varphi) \partial_{r,\varphi} \psi_1(r, \varphi, z, t)) = 0;$$

$$\partial_{z,z} \xi_1(\varphi, z, t) - h'(\varphi) \partial_\varphi \xi_1(\varphi, z, t) - 2h''(\varphi) \xi_1(\varphi, z, t) +$$

$$+ (1 - 2h(\varphi)) (\xi_1(\varphi, z, t) + \partial_{\varphi,\varphi} \xi_1(\varphi, z, t)) -$$

$$-\pi^{-1} E_0^2 \times \cos^2 \varphi \times \xi_1(\varphi, z, t) -$$

$$-\left[ \partial_t \psi_1(r, \varphi, z, t) + (2\pi)^{-1} \cos \varphi \times$$

$$\times E_0 \times \partial_r \Phi_1(r, \varphi, z, t) + h(\varphi) \partial_{r,\varphi} \psi_1(r, \varphi, z, t) \right] = 0;$$

$$\Phi_1(r, \varphi, z, t) - 2E_0 \cos \varphi \times \xi_1(\varphi, z, t) = 0; \quad (9)$$

$$\int_c^{c+\lambda} \int_0^{2\pi} (1 + h(\varphi)) \xi_1(\varphi, z, t) d\varphi dz = 0;$$

$$\int_c^{c+\lambda} \int_0^{2\pi} \partial_r \Phi_1(r, \varphi, z, t) \Big|_{r=1} dz d\varphi = 0.$$

Решения уравнений Лапласа для функций  $\psi_1(r, \varphi, z, t)$  и  $\Phi_1(r, \varphi, z, t)$  гармонические по координатам  $\varphi$  и  $z$ , удовлетворяющие условиям ограниченности будем искать в виде:

$$\Phi_1(r, \varphi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (B_{m,k}(t) \times \exp(i m \varphi) \times \exp(i k z) \times K_m(kr)) dk; \quad (10)$$

$$\Psi_1(r, \varphi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (A_{m,k}(t) \times \exp(i m \varphi) \times \exp(i k z) \times I_m(kr)) dk, \quad (11)$$

где  $I_m(kr)$  и  $K_m(kr)$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [16];  $k$  и  $m$  – волновое и азимутальное числа;  $A_{m,k}$  и  $B_{m,k}$  – неизвестные, зависящие от времени коэффициенты.

Поскольку функция  $\xi_1(\varphi, z, t)$  связана с  $\Psi_1(\varphi, z, t)$  кинематическим граничным условием, будем искать выражение для нее в виде:

$$\xi_1(\varphi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} C_{m,k}(t) \times \exp(i m \varphi) \times \exp(i k z) dk, \quad (12)$$

где  $C_{m,k}(t)$  – неизвестные амплитудные коэффициенты, зависящие от времени, имеющие первый порядок малости по  $\varepsilon$ .

Подставляя выражения (10)–(12) в условия (8) и (9), выразим  $A_{m,k}(t)$  и  $B_{m,k}(t)$  через  $C_{m,k}(t)$ . Результаты подставим в динамическое граничное условие первого порядка по  $\varepsilon$  и получим:

$$\begin{aligned} & C''_{m,k}(t) + \frac{3e^2}{4} \times \\ & \times (C''_{m+2,k}(t) \times A_m(k) + C''_{m-2,k}(t) \times X_m(k)) + \\ & + C_{m,k}(t) \left( G_m(k)(m^2 + k^2 - 1) + \frac{3e^2}{4} F_m(k) \right) + \\ & + \frac{3e^2}{4} [C_{m+2,k}(t) \Gamma_m(k) + C_{m-2,k}(t) N_m(k)] = 0; \\ & A_m(k) = \frac{1}{6} \left( G_m(k) - (k^2 + m(m+2)) \frac{1}{G_{m+2}(k)} + 1 \right); \\ & X_m(k) = \frac{1}{6} \left( G_m(k) - (k^2 + m(m-2)) \frac{1}{G_{m-2}(k)} + 1 \right); \\ & F_m(k) = G_m(k) (H_{m+1}(k) + H_{m-1}(k) + 2); \\ & \Gamma_m(k) = G_m(k) \left( H_{m+1}(k) - \frac{(m+1)(m+2)}{3} \right); \\ & N_m(k) = G_m(k) \left( H_{m-1}(k) - \frac{(m-2)(m-1)}{3} \right); \\ & H_j(k) = \frac{k K'_j(k)}{K_j(k)}; G_j(k) = \frac{k I'_j(k)}{I_j(k)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Система (13) является связанной системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций  $C_{m,k}(t)$ , описывающих временную эволюцию возмущения свободной поверхности струи. Из нее, в частности, следует, что выделенная азимутальная мода с заданным  $m$  взаимодействует с двумя соседними азимутальными же модами той же четности – с  $(m-2)$ -й и с  $(m+2)$ -й. Появление взаимодействия мод, проявляющееся во втором порядке малости по малому параметру, обусловлено тем, что в рассматриваемой задаче имеются два малых параметра: безразмерная амплитуда  $\varepsilon$  и квадрат эксцентриситета  $e^2$  поперечного сечения струи, имеющего эллиптическую форму. Из системы (13), полученной в первом порядке малости по  $\varepsilon$  и по  $e^2$ , видно, что взаимодействие волн описывается слагаемыми, пропорциональными  $\varepsilon e^2$ . Такое же явление имеет место и для сферoidalной капли [17].

Разрешим систему (13) методом последовательных приближений, учитывая, что  $e^2$  – малый параметр. Слагаемые, ответственные за связанность системы уравнений (13), пропорциональны  $e^2$ . Поэтому можно получить в нулевом порядке малости по  $e^2$  систему несвязанных уравнений:

$$C''_{m,k}(t) + C_{m,k}(t) \left[ G_m(k)(m^2 + k^2 - 1) \right] = 0. \quad (14)$$

Решениями этих уравнений являются гармонические функции времени:

$$C_{m,k}(t) = \alpha_{m,k} \times \exp(i \omega_{m,k} t); \quad (15)$$

где  $\alpha_{m,k}$  – это константы, имеющие смысл безразмерных начальных амплитуд, а безразмерные  $\omega_{m,k}$  – частоты капиллярных волн, определяемые дисперсионным уравнением, которое следует из (14) при подстановке туда (15):

$$\omega_{m,k}^2 = G_m(k)(m^2 + k^2 - 1). \quad (16)$$

Отметим, что «ноль» или «единица» в обозначении частоты (сразу после « $\omega$ », см., например, (16)) означают порядок малости частоты по второму малому параметру  $e^2$ .

Решения системы (13) в линейном по  $e^2$  приближении будем искать, используя в амплитудных функциях решения вида (15). В результате получим систему неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} & C''_{m,k}(t) + \left[ \omega_{m,k}^2 + \frac{3e^2}{4} F_m(k) \right] C_{m,k}(t) = \\ & = \frac{3e^2}{4} \left[ \alpha_{m+2,k} \exp(i \omega_{m+2,k} t) (\omega_{m+2,k}^2 A_m(k) - \Gamma_m(k)) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \alpha_{m-2,k} \exp(i\omega 0_{m-2,k} t) \left( \omega 0_{m-2,k}^2 X_m(k) - N_m(k) \right)]. \quad (17)$$

Общее решение (17) является суперпозицией общих решений соответствующих однородных уравнений и частных решений неоднородных уравнений.

Однородные уравнения для системы (17) имеют вид:

$$C_{m,k}(t) = \alpha_{m,k} \times \exp(i\omega 1_{m,k} t),$$

где  $\omega 1_{m,k}$  будут решениями нижеследующего дисперсионного уравнения:

$$\omega 1_{m,k}^2 = G_m(k) (m^2 + k^2 - 1) + w F_m(k). \quad (16a)$$

где  $w \approx 3e^2/4$  – полевой параметр, характеризующий устойчивость поверхности струи к индуцированному заряду.

С целью сравнения дисперсионного уравнения (16a) для струи эллиптического сечения с дисперсионным уравнением струи кругового сечения воспользуемся дисперсионным соотношением, полученным в [18] для струи, находящейся в радиальном электростатическом поле, не меняющем ее форму кругового цилиндра:

$$\omega_{m,k}^2 = \left( k^2 + m^2 - 1 + w(1 + H_m(k)) \right) G_m(k). \quad (18)$$

Согласно (18), мода с  $m = 0$  становится неустойчивой для всех  $k \geq 1$  при каком угодно малом  $w$  (вблизи левой границы  $k \approx 1$ ); мода с  $m = 1$  также становится неустойчивой для всех  $k \geq 0$  при каком угодно малом значении параметра  $w$  (вблизи левой границы  $k \approx 0$ ). Иное дело моды с  $m \geq 2$ , у этих мод неустойчивость имеет пороговый характер. Так, изгибно-деформационная мода азимутальная с  $m = 2$  теряет устойчивость только при  $w = 2,904$  на волне с  $k \approx 0,78$ , а мода с  $m = 3$  – при  $w = 4$  на волне с  $k = 0$ .

Частные решения неоднородных уравнений (17) будем искать в виде, соответствующем виду функции неоднородности:

$$C_{m,k}^{nonu}(t) = \beta_{m,k} \exp(i\omega 0_{m+2,k} t) + \chi_{m,k} \exp(i\omega 0_{m-2,k} t).$$

Подставляя проект решений в неоднородные уравнения и приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, получим выражения для  $\beta_{m,k}$  и  $\chi_{m,k}$ :

$$\beta_{m,k} = \frac{3e^2 \alpha_{m+2,k} (\omega 0_{m+2,k}^2 A_m(k) - \Gamma_m(k))}{4 (\omega 0_{m,k}^2 - \omega 0_{m+2,k}^2)};$$

$$\chi_{m,k} = \frac{3e^2 \alpha_{m-2,k} (\omega 0_{m-2,k}^2 X_m(k) - N_m(k))}{4 (\omega 0_{m,k}^2 - \omega 0_{m-2,k}^2)}.$$

В этих выражениях  $\omega 0_{m,k}^2$ ,  $\omega 0_{m-2,k}^2$ ,  $\omega 0_{m+2,k}^2$  определены (16). В результате общее решение системы связанных уравнений (13) в линейном по  $e^2$  приближении будет иметь вид:

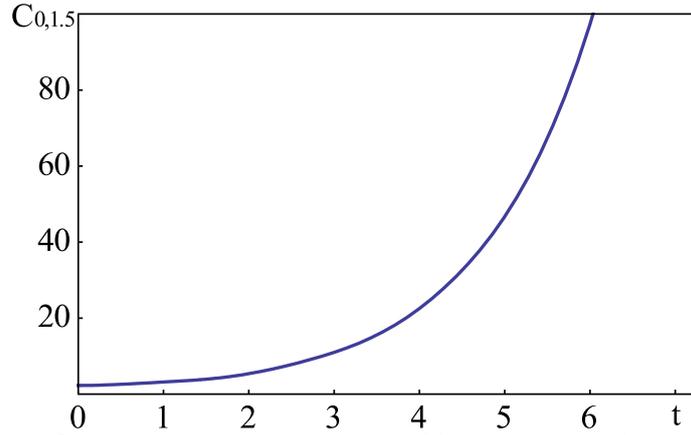
$$C_{m,k}(t) = \alpha_{m,k} \exp(i\omega 1_{m,k} t) + \frac{3e^2}{4} \left[ \alpha_{m+2,k} \exp(i\omega 0_{m+2,k} t) \frac{(\omega 0_{m+2,k}^2 A_m(k) - \Gamma_m(k))}{\omega 0_{m,k}^2 - \omega 0_{m+2,k}^2} + \alpha_{m-2,k} \exp(i\omega 0_{m-2,k} t) \frac{(\omega 0_{m-2,k}^2 X_m(k) - N_m(k))}{\omega 0_{m,k}^2 - \omega 0_{m-2,k}^2} \right]. \quad (19)$$

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АЗИМУТАЛЬНЫХ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН

Система дифференциальных уравнений второго порядка для нахождения коэффициентов  $C_{m,k}(t)$ , описывающая взаимодействие мод капиллярных волн с различной азимутальной симметрией, имеет вид (13). Ее решение  $C_{m,k}(t)$  с сохранением членов  $\sim e^2$  и в пренебрежении членами  $\sim e^4$  имеет вид (19).

Чтобы построить графики коэффициентов  $C_{m,k}(t)$ , необходимо задаться начальными условиями, а именно: начальными значениями безразмерной амплитуды  $\alpha_{m,k}$  выделенной азимутальной моды, а также мод  $\alpha_{m-2,k}$  и  $\alpha_{m+2,k}$ , с которыми выделенная азимутальная мода связана взаимодействием.

Азимутальный параметр  $m$  формально изменяется от 0 до  $\infty$ . На практике никто осознанно не исследовал экспериментально устойчивость струй со значениями  $m \geq 2$ , но все экспериментальные исследования для них [19–21] проводились на качественном уровне. Причина этого в том, что для струй хорошо проводящих жидкостей уже для моды с  $m = 2$  экспериментальным исследованиям мешает коронный разряд в окрестности струи. Моды же с  $m \geq 3$  становятся неустойчивыми при заметно более высоких значениях напряженности электростатического поля [22]. Сказывается и несовершенство измерительной аппаратуры в области высоких напряжений. Исследования устойчивости высоких азимутальных мод с  $m \geq 3$  пока возможны только теоретическим образом, например, как это проделано в [22] для радиального поля. Если говорить об экспериментальном исследовании устойчивости заряженной струи во внешнем электрическом поле, когда



**Рис. 1.** График зависимости безразмерного амплитудного коэффициента  $C_{0,k}(t)$  от безразмерного времени при  $w = 0,8$ ,  $k = 1,5$ ;  $\alpha_{0,k} = 0,6$ ;  $\alpha_{2,k} = 0,000001$ .

возбуждаются азимутальные моды с  $m \geq 2$ , то можно вспомнить лишь работу [23].

Принимая в качестве выделенной азимутальной моды моду с  $m = 0$ , получим, что ее амплитудный коэффициент  $\alpha_{0,k}$  по порядку величины определится эксцентриситетом эллипса поперечного сечения струи  $e$  (зависящим от величины напряженности внешнего электростатического поля). В нашем модельном случае примем  $\alpha_{0,k} = 0,6$ .

В настоящей работе мы проводим исследование при условии, что одна из мод капиллярных волн есть одна из первых двух волн, которые наиболее легко теряют устойчивость:  $m = 0$  или  $m = 1$ . Они могут потерять устойчивость при каких угодно малых значениях полевого параметра  $w$  (в зависимости от величины волнового числа).

Для моды  $\alpha_{-2,k}$ , которая не существует, естественно принять:  $\alpha_{-2,k} = 0$ . Для моды  $\alpha_{2,k}$  примем, что ее начальная амплитуда является тепловой [8] и в размерных величинах она не превышает 0,1 нм. В принятых безразмерных единицах эту величину следует разделить на радиус струи. Если радиус струи принять равным 100 мкм  $\equiv 10^5$  нм, то  $\alpha_{2,k} \sim 10^{-6}$ . Так же можно определить и безразмерные начальные амплитуды азимутальных мод с  $m \geq 3$ .

В итоге выражение для временной зависимости амплитуды выделенной азимутальной моды с  $m = 0$  примет вид:

$$C_{0,k}(t) = \alpha_{0,k} \exp(i\omega l_{0,k} t) + w \alpha_{2,k} \exp(i\omega l_{2,k} t) \frac{(\omega l_{2,k}^2 A_0(k) - \Gamma_0(k))}{\omega l_{0,k}^2 - \omega l_{2,k}^2},$$

или, подставляя значения безразмерных начальных амплитуд:

$$C_{0,k}(t) = 0,6 \times \exp(i\omega l_{0,k} t) + w \times 10^{-6} \times \exp(i\omega l_{2,k} t) \frac{(\omega l_{2,k}^2 A_0(k) - \Gamma_0(k))}{\omega l_{0,k}^2 - \omega l_{2,k}^2}.$$

График зависимости  $C_{0,k}(t)$  от безразмерного времени при  $w = 0,8$ ,  $k = 1,5$  приведен на рис. 1. Несложно видеть, что временной рост амплитуды примерно экспоненциальный.

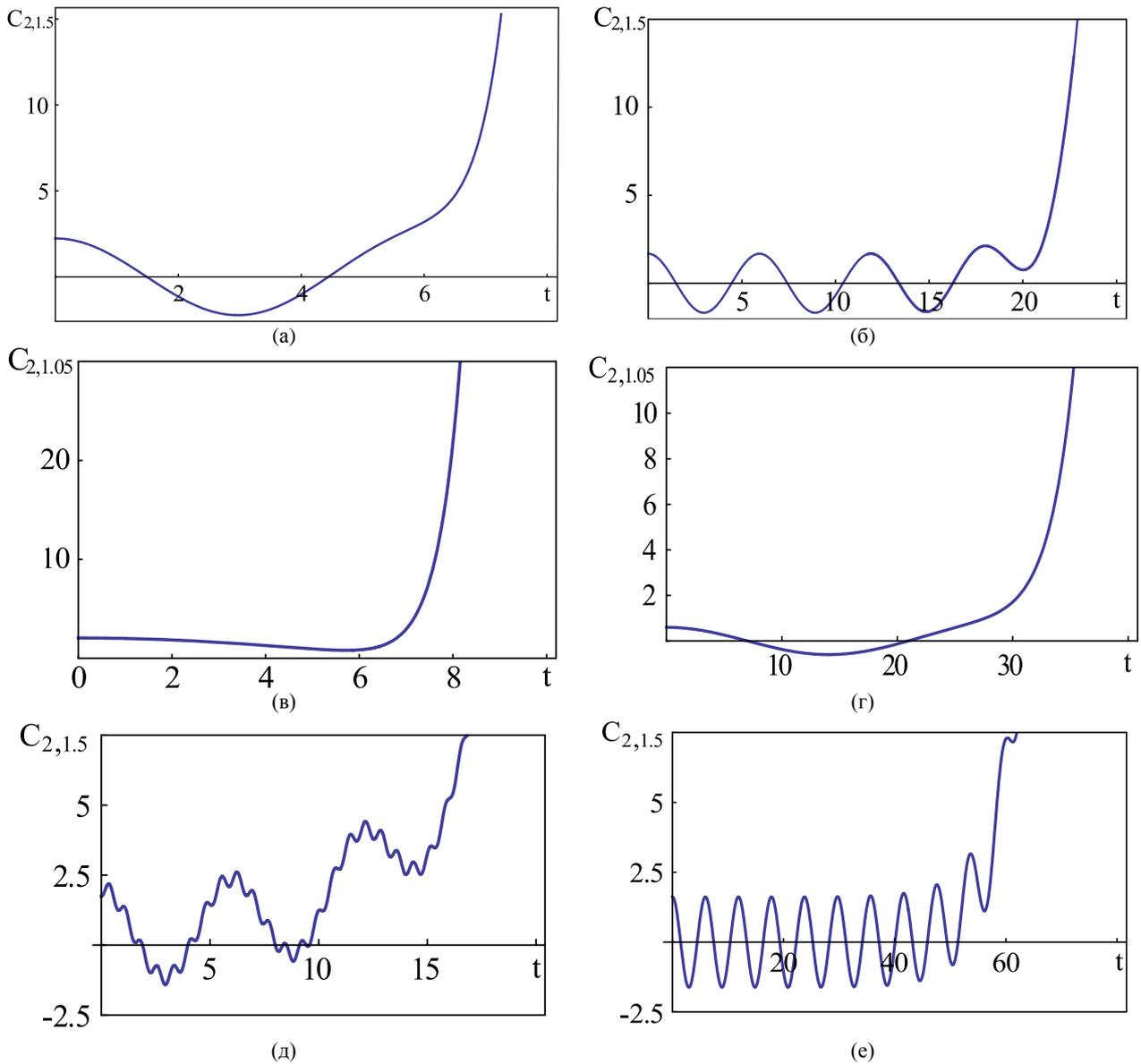
Используя зависимость (19), найдем зависимость от безразмерного времени амплитуды  $C_{2,k}(t)$ . Примем, что азимутальная мода с  $m = 0$  уже неустойчива с начальной амплитудой  $\alpha_{0,k} = 0,6$ , а начальные амплитуды азимутальных мод с  $m = 2$  и  $m = 4$  тепловые и определяются как  $\alpha_{2,k} = \alpha_{4,k} \sim 10^{-6}$ . Получим аналитическое выражение:

$$C_{2,k}(t) = \alpha_{2,k} \exp(i\omega l_{2,k} t) + w \left[ \alpha_{0,k} \exp(i\omega l_{0,k} t) \frac{(\omega l_{0,k}^2 X_2(k) - \Omega_2(k))}{\omega l_{2,k}^2 - \omega l_{0,k}^2} + \alpha_{4,k} \exp(i\omega l_{4,k} t) \frac{(\omega l_{4,k}^2 A_2(k) - \Gamma_2(k))}{\omega l_{2,k}^2 - \omega l_{4,k}^2} \right],$$

или, подставляя значения безразмерных начальных амплитуд, получим:

$$C_{2,k}(t) = 10^{-6} \exp(i\omega l_{2,k} t) + w \left[ 0,6 \times \exp(i\omega l_{0,k} t) \frac{(\omega l_{0,k}^2 X_2(k) - \Omega_2(k))}{\omega l_{2,k}^2 - \omega l_{0,k}^2} + 10^{-6} \exp(i\omega l_{4,k} t) \frac{(\omega l_{4,k}^2 A_2(k) - \Gamma_2(k))}{\omega l_{2,k}^2 - \omega l_{4,k}^2} \right].$$

Графики зависимости  $C_{2,k}(t)$  от безразмерного времени при различных  $k$  и  $w$  приведены на



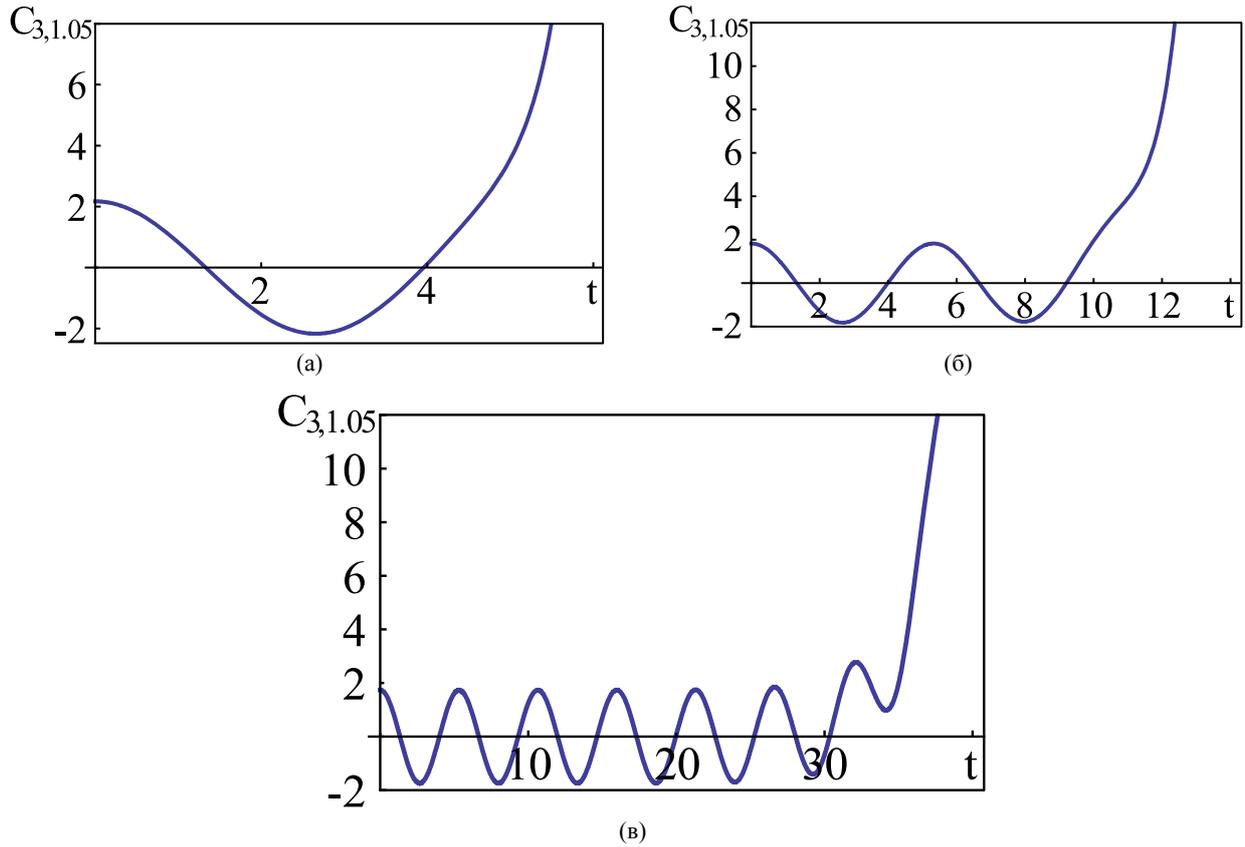
**Рис. 2.** График зависимости безразмерного амплитудного коэффициента  $C_{2,k}(t)$  от безразмерного времени  $t$ , рассчитанный при: (а)  $w = 2$ ;  $k = 1,5$ ;  $\alpha_{0,k} = 0,6$ ;  $\alpha_{2,k} = 0,000001$ ;  $\alpha_{4,k} = 0,000001$ ; (б)  $w = 1,5$ ;  $k = 1,5$ ;  $\alpha_{0,k} = 0,6$ ;  $\alpha_{2,k} = 0,000001$ ;  $\alpha_{4,k} = 0,000001$ ; (в)  $w = 2$ ;  $k = 1,05$ ;  $\alpha_{0,k} = 0,6$ ;  $\alpha_{2,k} = 0,000001$ ;  $\alpha_{4,k} = 0,000001$ ; (г)  $w = 1,4$ ;  $k = 1,05$ ;  $\alpha_{0,k} = 0,25$ ;  $\alpha_{2,k} = 0,000001$ ;  $\alpha_{4,k} = 0,000001$ ; (д)  $w = 1,45$ ;  $k = 1,5$ ;  $\alpha_{0,k} = 0,6$ ;  $\alpha_{2,k} = 0,1$ ;  $\alpha_{4,k} = 0,1$ ; (е)  $w = 1,45$ ;  $k = 1,5$ ;  $\alpha_{0,k} = 0,6$ ;  $\alpha_{2,k} = 0,000001$ ;  $\alpha_{4,k} = 0,000001$ .

**рис. 2.** Из сравнения **рис. 2а,б**, и несложно видеть, что уменьшение полевого параметра от  $w = 2$  до  $w = 1,5$  при прочих равных условиях почти в пять раз увеличивает характерное время реализации неустойчивости (примерно такой же результат имеет место при сравнении **рис. 2в** с **рис. 2г**), а уменьшение волнового числа с  $k = 1,5$  до  $k = 1,05$  приводит к качественному изменению зависимости  $C_{2,k}(t)$  по сравнению с **рис. 2а,б**. Сравнение **рис. 2д** с **рис. 2е** указывает на важную роль начальных амплитуд азимутальных волн  $\alpha_{2,k}$  и  $\alpha_{4,k}$ , участвующих во взаимодействии.

Сравнивая между собой **рис. 1** и **рис. 2**, отметим, что имеется несколько действующих факторов, от которых могут зависеть

критические условия реализации неустойчивости струи. Из них можно отметить  $m$  – номер теряющей устойчивость азимутальной моды; волновое число  $k$ , на котором мы исследуем условия потери устойчивости данной азимутальной моды капиллярных волн на струе; величину полевого параметра  $w$ ; величины начальных амплитуд  $\alpha_{m-2,k}$ ,  $\alpha_{m,k}$  и  $\alpha_{m+2,k}$  волн, участвующих во взаимодействии.

Теперь построим графики, аналогичные приведенным выше на **рис. 2**, но для нечетных мод, полагая, что первая азимутальная мода уже потеряла устойчивость. Зависимость амплитудного коэффициента четвертой азимутальной моды ( $m = 3$ ) от времени определится выражением:



**Рис. 3.** График зависимости  $C_{3,k}(t)$  от безразмерного времени  $t$ , рассчитанный при: (а)  $w = 2,5$ ;  $k = 1,05$ ;  $\alpha_{1,k} = 0,6$ ;  $\alpha_{3,k} = 0,000001$ ;  $\alpha_{5,k} = 0,000001$ ; (б)  $w = 2,1$ ;  $k = 1,05$ ;  $\alpha_{1,k} = 0,6$ ;  $\alpha_{3,k} = 0,000001$ ;  $\alpha_{5,k} = 0,000001$ ; (в)  $w = 2$ ;  $k = 1,05$ ;  $\alpha_{1,k} = 0,6$ ;  $\alpha_{3,k} = 0,000001$ ;  $\alpha_{5,k} = 0,000001$ .

$$C_{3,k}(t) = \alpha_{3,k} \exp(i\omega_{3,k}t) + \\ + w \left[ \alpha_{1,k} \exp(i\omega_{1,k}t) \frac{(\omega_{1,k}^2 X_3(k) - \Omega_3(k))}{\omega_{3,k}^2 - \omega_{1,k}^2} + \right. \\ \left. + \alpha_{5,k} \exp(i\omega_{5,k}t) \frac{(\omega_{5,k}^2 A_3(k) - \Gamma_3(k))}{\omega_{1,k}^2 - \omega_{5,k}^2} \right]$$

или после подстановки в это выражение начальных амплитуд:

$$C_{3,k}(t) = 10^{-6} \exp(i\omega_{3,k}t) + \\ + w \left[ 0,6 \times \exp(i\omega_{1,k}t) \frac{(\omega_{1,k}^2 X_3(k) - \Omega_3(k))}{\omega_{3,k}^2 - \omega_{1,k}^2} + \right. \\ \left. + 10^{-6} \exp(i\omega_{5,k}t) \frac{(\omega_{5,k}^2 A_3(k) - \Gamma_3(k))}{\omega_{3,k}^2 - \omega_{5,k}^2} \right].$$

Временной рост амплитуды изгибной азимутальной моды с  $m = 1$  качественно аналогичен приведенному на рис. 1, и воспроизводить его не будем. Остановимся на росте амплитуды азимутальной моды с  $m = 3$ . Соответствующие графики приведены на рис. 3. Примем, что в начальный момент неустойчива первая (изгибная азимутальная) мода, а начальные амплитуды третьей и пятой мод тепловые. Как и ранее, примем, что на критические условия реализации

неустойчивости азимутальной моды с  $m = 3$  струи влияют:  $m$  – номер теряющей устойчивость азимутальной моды; волновое число  $k$ , на котором мы исследуем условия потери устойчивости данной азимутальной моды капиллярных волн на струе; величина полевого параметра  $w$ ; величины начальных амплитуд  $\alpha_{1,k}$ ,  $\alpha_{3,k}$  и  $\alpha_{5,k}$  волн, участвующих во взаимодействии.

Несложно видеть, что общие закономерности качественных зависимостей полевого параметра эквивалентны тем, что следуют из рис. 2: его рост от  $w = 2$  до  $w = 2,5$  приводит к сокращению характерного времени реализации неустойчивости более чем в шесть раз.

Внимательное рассмотрение рис. 2 и рис. 3 позволяет предположить, что: 1) значение полевого параметра  $w$  является определяющим – от его величины зависит время задержки реализации неустойчивости, которое тем больше, чем ближе к критическому значению полевого параметра  $w_{cr}$  значение параметра  $w$ , принятое при расчетах; 2) начальная амплитуда моды, принятой изначально неустойчивой, особой роли не играет – она мало влияет на амплитуды других азимутальных мод, на время задержки реализации неустойчивости; 3) заметную роль играет волновое число моды, устойчивость которой исследуется, точнее

степень его близости к критическому значению  $k_{cr}$  (для принятого значения параметра  $w$ ).

В целом создается впечатление, что в реализации неустойчивости азимутальных мод играет роль не энергия, вложенная в выделенную моду [24], а энергия, накопленная в трех модах, связанных взаимодействием.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследована устойчивость азимутальных мод струи эллиптического сечения во внешнем электростатическом поле. Оказалось, что по сравнению со струей в радиальном электростатическом поле устойчивость снижается. Получено дисперсионное уравнение в первом порядке приближений по безразмерной амплитуде капиллярных волн и в том же порядке приближений по квадрату эксцентриситета эллипса в поперечном сечении струи.

Построена зависимость амплитудных коэффициентов нескольких первых азимутальных волн от времени. Оказалось, что характерное время реализации неустойчивости уменьшается с ростом начальных амплитуд взаимодействующих мод и с увеличением напряженности внешнего электростатического поля, а также нелинейным образом зависит от величины волнового числа.

Все множество азимутальных мод капиллярных волн на поверхности эллиптической струи в смысле возможности взаимодействия с соседними модами распадается на две части: четные и нечетные. Каждая выделенная азимутальная мода взаимодействует с двумя соседними: четная мода взаимодействует с ближайшими четными, а нечетная – с нечетными.

### КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов, В.М., Ярин, А.Л., *Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей*. ВИНТИ. Итоги науки и техники. Сер. «Механика жидкости и газа». М.: ВИНТИ, 1984. Т. 17, с. 112.
2. Аметистов, Е.В., Блаженков, В.В., Городов, А.К., и др., *Монодиспергирование вещества: принципы и применение*. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
3. Eggers, J., *Physics of liquid jet*, *Rev. Mod. Phys.*, 1997, vol. 69, no. 3, p. 865.
4. Gamero-Castano, M., Hruby, V., *Electric measurements of charged sprays emitted by cone-jets*, *J. Fluid Mech.*, 2002, vol. 459, p. 245.
5. Amini, Gh., Lv, Yu, Dolatabadi, A., Ihme, M., *Instability of elliptic liquid jets: Temporal linear stability theory and experimental analysis*, *Physics of fluids*, 2014, vol. 26, 114105.
6. Стретт, Дж. В., *Теория звука*, т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
7. Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., *Устойчивость капиллярных волн произвольной симметрии на струе в перпендикулярном однородном электростатическом поле*, *Изв. РАН, Механика жидкости и газа*, 2021, № 2, с. 29.
8. Френкель, Я.И., *Теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме*, *ЖЭТФ*, 1936, т. 6, № 4, с. 348.
9. Taylor, G.I., *Disintegration of water drops in an electric field*, *Proc. Roy. Soc. A*, 1964, vol. 280, p. 383.
10. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука, 1992. 662 с.
11. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986. 733 с.
12. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Теория поля*. М.: Наука, 1973. 504 с.
13. Найфе, А.Х., *Методы возмущений*. М.: Мир, 1976. 455 с.
14. Левич, В.Г., *Физико-химическая гидродинамика*. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
15. O'Konski, C.T., Harris, F.E., *Electric free energy and the deformation of droplets in electrically conducting system field*, *J. Phys. Chem.*, 1957, vol. 61, p. 1172.
16. *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 831 с.
17. Ширяева, С.О., Петрушов, Н.А., Григорьев, А.И., *О линейном по безразмерной амплитуде осцилляций взаимодействии мод несферической заряженной капли во внешнем электростатическом поле*, *ЖТФ*, 2016, т. 86, № 1, с. 37.
18. Григорьев, А.И., *Электростатическая неустойчивость сильно заряженной струи электропроводной жидкости*, *ЖТФ*, 2009, т. 79, № 4, с. 36.
19. Cloupeau, M., Prunet-Foch, B., *Electrostatic spraying of liquids: Main functioning modes*, *J. Electrostatics*, 1990, vol. 25, p. 165.
20. Cloupeau, M., Prunet-Foch, B., *Electrohydrodynamic spraying functioning modes: a critical review*, *J. Aerosol Sci.*, 1994, vol. 25, no. 6, p. 1021.
21. Jaworek, A., Krupa, A., *Classification of the modes of EHD spraying*, *J. Aerosol Sci.*, 1999, vol. 30, no. 7, p. 873.
22. Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., *Электростатическая неустойчивость высоких азимутальных мод заряженной струи*, *Изв. РАН, Механика жидкости и газа*, 2021, № 3, с. 48.
23. Kim, O.V., Dunn, P.F., *Control production by in-flight electro spraying*, *Langmuir*, 2010, vol. 26, p. 15807.

24. Бреховских, Л.М., Гончаров, В.В., *Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн)*. М.: Наука, 1982. 335 с.

### Summary

Nonlinear interaction of capillary waves for the first azimuthal modes of an elliptical jet in an electric cross-section field is examined by the product of two independent small parameters. The interaction itself arises due to the ellipticity of the section perpendicular to the jet. Three azimuth modes participate in the interaction:

either even or odd ones. When compared with a jet in a radial electrostatic field, the stability of the jet in a perpendicular uniform electrostatic field is reduced. It turned out that the characteristic time for implementing instability decreases with an increase in the initial amplitudes of the interacting modes and with an increase in the intensity of the external electrostatic field, and it also depends on the value of the wave number.

*Keywords:* elliptical jet, electrostatic field, azimuthal modes, capillary wave interaction, instability