

# Об инкрементах неустойчивости капиллярных волн на поверхности заряженной электропроводной струи, движущейся относительно материальной среды

С. О. Ширяева\*, А. И. Григорьев\*\*, Н. А. Петрушов

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
г. Ярославль, 150000, Россия, \*e-mail: [shir@uniyar.ac.ru](mailto:shir@uniyar.ac.ru); \*\*e-mail: [grigorai@mail.ru](mailto:grigorai@mail.ru)

Поступила в редакцию 31.08.2021

После доработки 05.11.2021

Принята к публикации 11.11.2021

Исследованы инкременты неустойчивости капиллярных волн, их величины и зависимости от физических параметров задачи, положение зон неустойчивости на множестве волновых чисел первых азимутальных мод заряженной струи электропроводной несжимаемой жидкости. Выяснено, что ширина диапазонов волновых чисел неустойчивых волн и величина инкрементов неустойчивости зависят от квадрата напряженности электростатического поля и квадрата скорости относительного движения, увеличиваясь с ростом напряженности поля и скорости. При отсутствии заряда на струе изгибная неустойчивость имеет пороговый характер и реализуется начиная с некоторой конечной ее величины скорости.

*Ключевые слова:* струя жидкости, заряд, материальная среда, инкремент неустойчивости, азимутальное число

УДК 532.517.013.4:77.051.15

<https://doi.org/10.52577/eom.2022.58.4.12>

## ВВЕДЕНИЕ

Явление электродиспергирования жидкости широко используется в различных академических, технических и технологических приложениях: от каплеструйной печати и распыления лаков, красок и ядохимикатов до жидкостной масс-спектрометрии органических и нелетучих жидкостей биологического происхождения и жидкометаллических источников ионов (см., например, [1–6] и указанную там литературу). В связи со сказанным явление многократно исследовалось как экспериментально, так и теоретически [1, 3, 6–10]. Но тем не менее остаются неохваченными некоторые аспекты потери устойчивости капиллярными волнами различной азимутальной симметрии на струях идеально проводящих несжимаемых жидкостей. Сказанное относится к инкрементам неустойчивости, ширине диапазонов неустойчивых волн и их положению на множестве волновых чисел, к величинам инкрементов.

Этой проблеме и посвящена настоящая работа.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу об исследовании устойчивости капиллярных волн на однородно заряженной с поверхностной плотностью заряда

двух несжимаемой струи идеальной жидкости радиуса  $R$  с коэффициентом межфазного натяжения  $\sigma$  и плотностью  $\rho_2$ , движущейся со скоростью  $U_0$  по оси  $z$ , где  $z$  – орт продольной координаты, в идеальной несжимаемой диэлектрической среде, имеющей плотность  $\rho_1$  и диэлектрическую проницаемость, равную единице. Задачу будем решать в инерциальной системе отсчета, связанной с осью симметрии струи и движущейся со струей со скоростью  $U_0$ , в цилиндрических координатах, орт  $e_z$  которой совпадает по направлению с  $U_0$  и осью симметрии невозмущенной капиллярным волновым движением цилиндрической поверхности струи. Все рассмотрение проведем в безразмерных переменных, в которых  $R = \rho_2 = \sigma = 1$ , а поверхность раздела сред, возмущенная капиллярным волновым движением, описывается соотношением:

$$F(r, z, \varphi, t) \equiv r - 1 - \xi(z, \varphi, t) = 0, \quad |\xi| \ll 1$$

где  $\xi(z, \varphi, t)$  – малое возмущение цилиндрической поверхности струи;  $\varphi$  – азимутальный угол.

Полная математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_2 = 0, \quad \Delta \Phi = 0;$$

$$\partial_t u_{1r} + (u_{1r}) u_{1r} - \nu \nabla_{\perp}^2 u_{1r} = -\rho_1 u_{1z} - \rho_2 u_{2z} + (u_{2r}) u_{2r} - \nu \nabla_{\perp}^2 u_{2r},$$

$$\begin{aligned}
 r \rightarrow 0: & \quad \psi_1 = 0, \\
 r \rightarrow \infty: & \quad \psi_1 = 0, \quad \nabla \Phi \rightarrow 0; \\
 r = \xi: & \quad \frac{dF}{dt} = 0, \quad \psi_1 = \psi_2,
 \end{aligned}$$

$$p_2 - p_1 + p_E - p_\sigma = 0; \quad \Phi(\xi, \varphi, z, t);$$

где  $\psi_j$  – поля скоростей течения жидкости в среде ( $j = 1$ ) и в струе ( $j = 2$ ), генерируемые капиллярными волнами на поверхности раздела сред;  $p_j \equiv p_j(\xi, \varphi, z, t)$  – гидродинамические давления в среде ( $j = 1$ ) и струе ( $j = 2$ );  $p_E$  и  $p_\sigma$  – давление электрических сил и давление сил поверхностного натяжения на границе раздела сред соответственно;  $\Phi \equiv \Phi(\xi, \varphi, z, t)$  – потенциал электростатического поля;  $\Phi_s(t)$  – потенциал поверхности струи;  $\mathbf{n}$  – орт нормали к поверхности струи;  $\rho$  – безразмерная плотность среды.

В качестве дополнительных условий примем условие постоянства объема струи, приходящегося на одну длину волны  $\lambda$  (при одноволновой деформации границы раздела сред):

$$\int_V dV = \pi \lambda;$$

$$V = \{0 \leq r \leq 1 + \xi(z, \varphi, t); 0 \leq \varphi \leq 2\pi; z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\};$$

и условие сохранения заряда на отрезке струи длиной  $\lambda$ :

$$-\int_S \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} = 2\pi \chi \lambda;$$

$$S = \{r = 1 + \xi(z, \varphi, t); 0 \leq \varphi \leq 2\pi; z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\}.$$

### СКАЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

В силу идеальности и несжимаемости жидкостей, которыми моделируются капля и среда, воспользуемся моделью потенциального волнового движения жидкостей, в рамках которой можно ввести потенциалы полей скоростей  $\psi_1(\xi, \varphi, z, t)$  и  $\psi_2(\xi, \varphi, z, t)$  [11]:

$$\mathbf{v}_j = \nabla \psi_j, \quad j = 1, 2.$$

Потенциалы  $\psi_j(\xi, \varphi, z, t)$  так же, как и  $\Phi(\xi, \varphi, z, t)$  [12], при этом будут гармоническими функциями:

$$\Delta \psi_1 = 0; \quad \Delta \psi_2 = 0;$$

удовлетворяющими условиям ограниченности:

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_2 \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi_1 \rightarrow 0.$$

Введение потенциалов скоростей позволяет проинтегрировать уравнения Эйлера и получить выражения для давлений в обеих средах:

$$p_1 = -\rho \partial_t \psi_1 - \frac{\rho}{2} (-U_0 + \nabla \psi_1)^2 + \rho C_1;$$

$$p_2 = -\partial_t \psi_2 - \frac{1}{2} (\nabla \psi_2)^2 + C_2;$$

где  $C_j$  – константы интегрирования.

### ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ [13]

Поскольку потенциалы  $\psi_j(\xi, \varphi, z, t)$  описывают ту часть поля скоростей, которая порождается волновыми движениями поверхности раздела сред, примем, что в безразмерном виде они являются величинами того же порядка малости, что и возмущение границы раздела сред:

$$|\psi_j| \ll \xi.$$

Потенциал электростатического поля в окрестности струи представим в виде суперпозиции  $\Phi_0$  – потенциала в окрестности цилиндрической струи, являющегося величиной нулевого порядка малости по  $|\xi|$  и поправки  $\Phi_1$ , порождаемой волновой деформацией цилиндрической поверхности струи, которая будет величиной того же порядка малости, что и возмущение границы раздела сред и гидродинамические потенциалы:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1.$$

Указанные обстоятельства позволяют линеаризовать систему уравнений и граничных условий, разложив исходную векторную задачу на две скалярные задачи для величин нулевого и первого порядков малости.

**Задача нулевого порядка малости** описывает стационарное состояние системы [14]:

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \quad p_1^{(0)} = -\frac{\rho}{2} U_0^2 + C_1; \quad p_2^{(0)} = C_2; \quad \Delta \Phi_0 = 0;$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \Phi_0 \rightarrow 0; \quad r = 1: \quad \Phi_0 = \Phi_s^{(0)};$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \Big|_{r=1} d\varphi dz = 2\pi \chi \lambda;$$

$$p_2^{(0)} - p_1^{(0)} + \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi_0)^2 - 1 = 0;$$

и имеет решение:

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \Phi_0 = -4\pi \chi \ln r; \quad p_1^{(0)} = p_0;$$

$$p_2^{(0)} = p_0 - 2\pi \chi^2 + 1.$$

Здесь  $p_j^{(0)}$ , где ( $j = 1; 2$ ), и  $\Phi_0$  – гидродинамические давления в обеих средах и электростатический потенциал в стационарном состоянии;  $p_0$  – константа, равная гидростатическому давлению во внешней среде.

**Задача первого порядка** запишется в виде [14]:

$$\Delta \psi_1 = 0; \quad \Delta \psi_2 = 0; \quad \Delta \Phi_1 = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_2 \rightarrow 0; \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi_1 \rightarrow 0; \quad \Phi_1 \rightarrow 0;$$

$$\begin{aligned}
r=1: \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial r} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} - U_0 \frac{\partial \xi}{\partial z}; \\
\partial_r \Phi_0 \xi + \Phi_1 &= 0; \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial t}; \\
-\partial_r \psi_2 + \rho \partial_r \psi_1 + \rho U_0 \times \nabla \psi_1 + \frac{1}{8\pi} \frac{\partial (\nabla \Phi_0)^2}{\partial r} \xi + \\
&+ \frac{1}{4\pi} (\nabla \Phi_0 \times \nabla \Phi_1) + \xi + \Delta_S \xi = 0; \\
\int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \xi \, d\varphi \, dz &= 0; \\
\int_0^{2\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \xi + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial r^2} \xi + \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \right) d\varphi \, dz &= 0; \\
\Delta_S &\equiv \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.
\end{aligned}$$

Решение этой задачи ищем в виде элементарных бегущих волн:

$$\begin{aligned}
\xi(\varphi, z, t) &= \alpha(t) \exp(ikz + im\varphi); \\
\psi_1(\varphi, z, t) &= b(t) \exp(ikz + im\varphi) \times K_m(kr); \\
\psi_2(\varphi, z, t) &= c(t) \exp(ikz + im\varphi) \times I_m(kr); \\
\Phi_1(\varphi, z, t) &= a(t) \exp(ikz + im\varphi) \times K_m(kr); \quad (1)
\end{aligned}$$

где  $I_m(kr)$  и  $K_m(kr)$  – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, порядка  $m$  [15],  $m$  – азимутальный параметр. Кинематическое граничное условие и условие эквипотенциальности поверхности струи позволяют выразить неизвестные амплитуды  $a(t)$ ,  $b(t)$  и  $c(t)$  в решениях для гидродинамических и электростатического потенциалов через амплитуду  $\alpha(t)$  волн на границе раздела сред:

$$\begin{aligned}
b(t) &= \frac{\alpha'(t)}{k I_m'(k)}; \\
c(t) &= \frac{1}{k K_m'(k)} [\alpha'(t) - \alpha(t) i k U_0]; \\
a(t) &= \alpha(t) \frac{4\pi\chi}{K_m(k)}. \quad (2)
\end{aligned}$$

Подставляя проекты решений (1) с учетом (2) в динамическое граничное условие, получим дифференциальное уравнение относительно неизвестной амплитуды  $\alpha(t)$ :

$$\beta_m \times \alpha''(t) - 2i\delta_m \times \alpha'(t) + \kappa_m \times \alpha(t) = 0; \quad (3)$$

$$\beta_m(k) \equiv \rho h_m^{-1} - g_m^{-1} \equiv \frac{\rho g_m - h_m}{g_m h_m};$$

$$\delta_m(k, U_0) \equiv k\rho U_0 h_m^{-1};$$

$$\begin{aligned}
\kappa_m(k, \chi, U_0) &\equiv \left\{ [1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)] - We \times k^2 h_m^{-1} \right\}; \\
h_m(k) &\equiv \frac{k K_m'(k)}{K_m(k)} \equiv m - \frac{k K_{m+1}(k)}{K_m(k)}; \\
g_m(k) &\equiv \frac{k I_m'(k)}{I_m(k)} \equiv m + \frac{k I_{m+1}(k)}{I_m(k)}; \\
w &\equiv 4\pi\chi^2; \quad We \equiv \rho U_0^2.
\end{aligned}$$

Решение уравнения (3) естественно искать в периодическом виде:

$$\alpha(t) = \dots, \quad (4)$$

где  $s$  – частота капиллярных волн, в общем случае комплексная. Подставим (4) в (3) и получим дисперсионное уравнение задачи:

$$s^2 - \frac{2\delta_m}{\beta_m} s - \frac{\kappa_m}{\beta_m} = 0.$$

Несложно видеть, что при  $U_0 = 0$  это дисперсионное уравнение сводится к дисперсионному уравнению для капиллярных волн на поверхности идеальной несжимаемой электропроводной струи, неподвижной относительно идеальной несжимаемой диэлектрической среды, а при  $\rho = 0$  – к дисперсионному уравнению для струи в вакууме.

Решения дисперсионного уравнения имеют вид:

$$s_{1,2} = \frac{\delta_m}{\beta_m} \pm \sqrt{\left(\frac{\delta_m}{\beta_m}\right)^2 + \frac{\kappa_m}{\beta_m}};$$

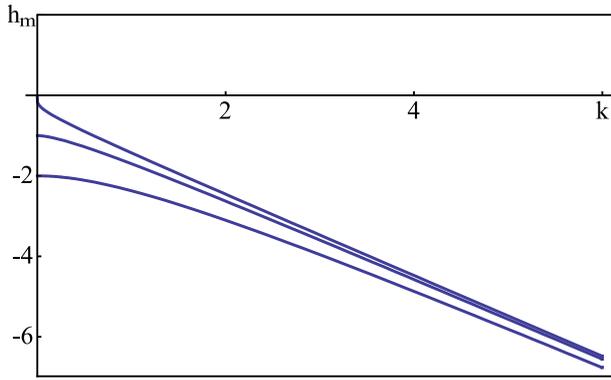
или

$$\begin{aligned}
s_{1,2} &= \frac{g_m}{(\rho g_m - h_m)} k\rho U_0 \pm \\
&\pm \sqrt{\left[\frac{g_m k\rho U_0}{(\rho g_m - h_m)}\right]^2 + \frac{[(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m))h_m g_m - We \times k^2 g_m]}{(\rho g_m - h_m)}}. \quad (5)
\end{aligned}$$

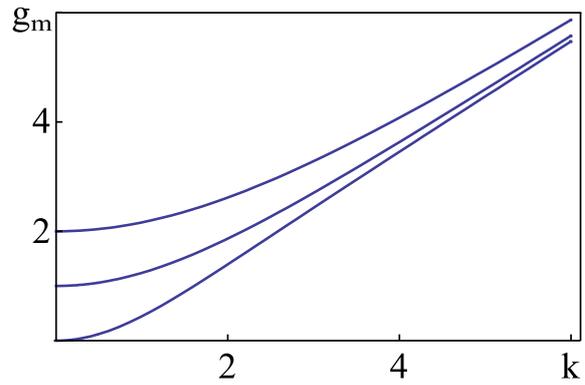
При изменении физических параметров системы волны на поверхности раздела сред будут сохранять устойчивость, пока частоты  $s_{1,2}$  остаются вещественными, то есть пока подкоренное выражение в (5) положительно. Когда подкоренное выражение станет отрицательным, у частот  $s_{1,2}$  появится мнимая часть, и они образуют пару комплексно-сопряженных корней:  $s \equiv \text{Re } s \pm i \text{Im } s$ . При этом амплитуда волны с отрицательной мнимой частью частоты, пропорциональная

$$\exp[i(\text{Re } s - i|\text{Im } s|)t] \dots \exp[i \text{Re } s \times t],$$

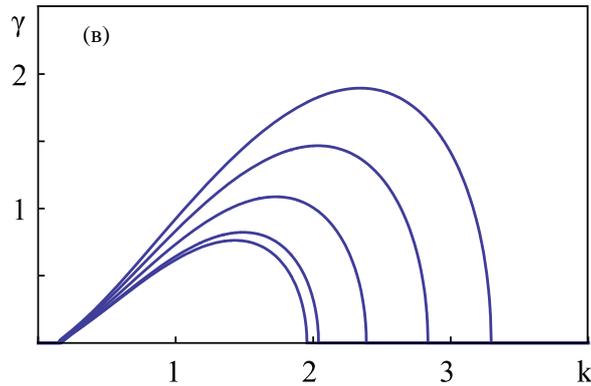
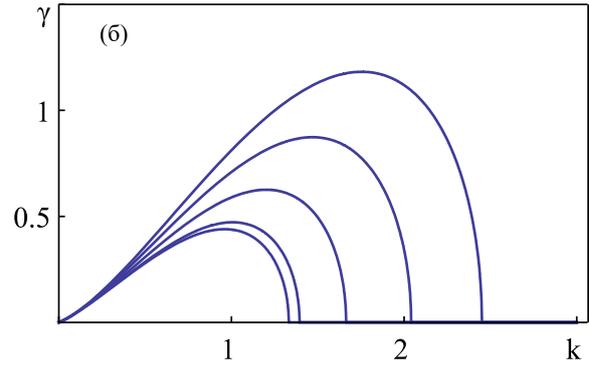
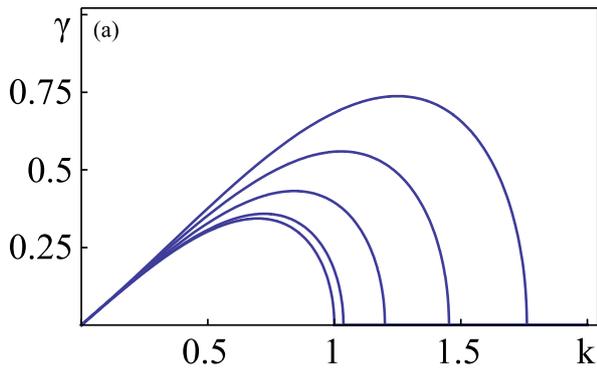
будет экспоненциально со временем увеличивать свою амплитуду с инкрементом  $\gamma \equiv |\text{Im } s|$ , что приведет к распаду струи на отдельные капли.



**Рис. 1.** Зависимости от безразмерного волнового числа коэффициента  $h_m(k)$ , построенные при различных значениях азимутального числа:  $m = 0; 1; 2$  (сверху вниз).



**Рис. 2.** Зависимости от безразмерного волнового числа коэффициента  $g_m(k)$ , построенные при различных значениях азимутального числа:  $m = 0; 1; 2$  (снизу вверх).



**Рис. 3.** Зависимости от безразмерного волнового числа величины инкремента неустойчивости осесимметричных волн ( $m = 0$ ), построенные при  $\rho = 0,001$  для различных значений безразмерного параметра  $We$ . Снизу вверх:  $We = 0; 0,1; 0,5; 1; 1,5$ : (а) –  $w = 0$ ; (б) –  $w = 1$ ; (в) –  $w = 2$ .

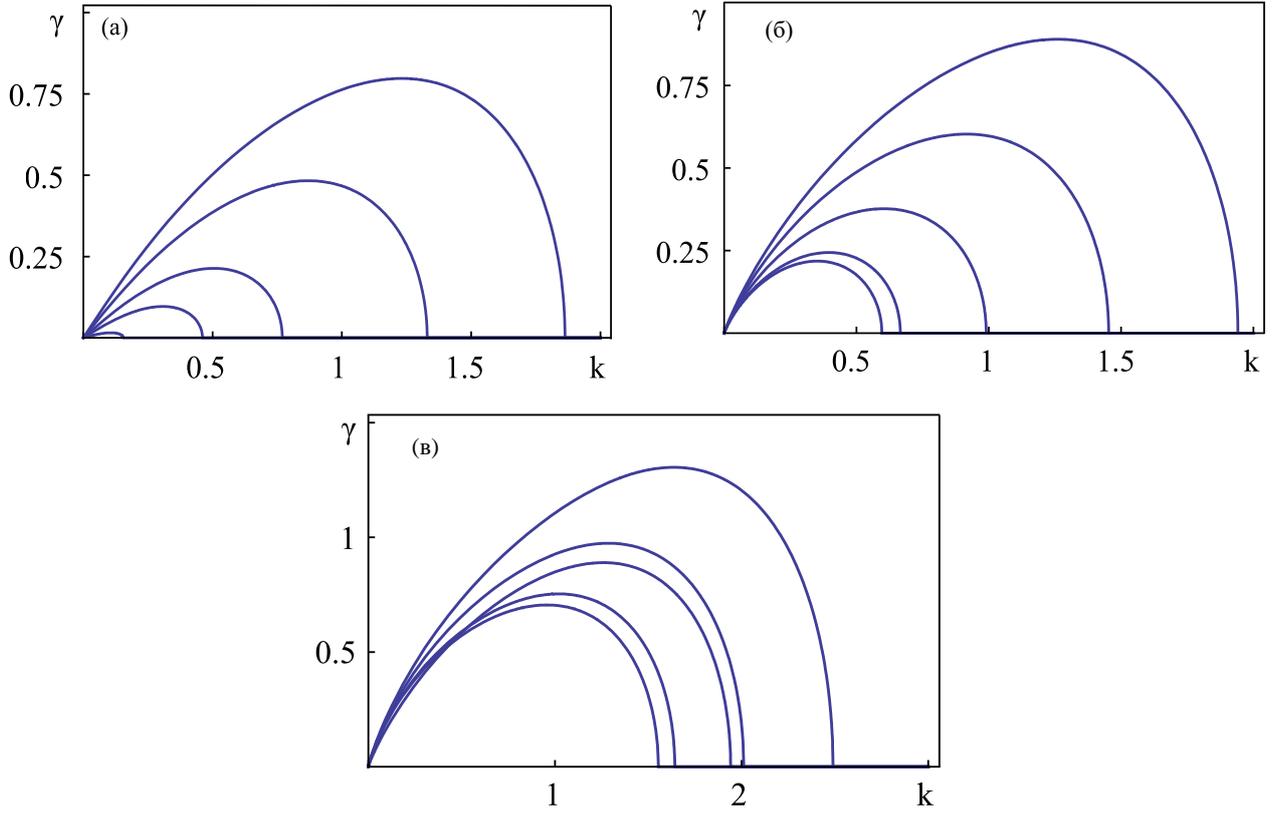
Для удобства качественного анализа соотношения (5) на рис. 1 и рис. 2 для первых трех значений азимутального числа  $m$  приведены графики зависимостей  $h_m = h_m(k)$  и  $g_m = g_m(k)$  соответственно. Из (5) видно, что, поскольку независимо от номера азимутального числа  $h_m < 0$ , а  $g_m > 0$ , то для ситуации жидкой струи в газообразной среде ( $\rho$  [см<sup>3</sup>]) при любых разумных скоростях ( $U_0 \leq 1000$  см/с) для волн с волновыми числами, представляющими интерес в плане капиллярно-электростатического дробления струи ( $k \sim 1$ ), второе слагаемое под радикалом в (5), как правило, отрицательно и

фактически определяет величину инкремента неустойчивости.

Приравнявая в (5) подкоренное выражение нулю, получим критическое условие перехода от устойчивых волн к неустойчивым:

$$\rho k^2 We + \left[ (1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m)) \frac{h_m}{g_m} - k^2 We \times \frac{1}{g_m} \right] \times (\rho g_m - h_m) = 0. \quad (6)$$

Из (6) легко найти критическое для начала реализации неустойчивости значение параметра  $We$ , пропорционального квадрату скорости:



**Рис. 4.** Зависимости от безразмерного волнового числа величины инкремента неустойчивости осесимметричных волн с  $m = 1$  (изгибных волн), построенные при  $\rho = 0,001$  для различных значений безразмерного параметра  $We$ . Снизу вверх: (а) –  $We = 1,05; 1,25; 1,5; 2; 2,5$ ,  $w = 0$ ; (б) –  $We = 0,001; 0,1; 0,5; 1; 1,5$ ,  $w = 1$ ; (в) –  $We = 0,001; 0,1; 0,5; 1; 1,5$ ,  $w = 2$ .

$$We = \frac{[-1 + m^2 + k^2 + w(1 + h_m)](\rho g_m - h_m)}{k^2}. \quad (7)$$

Здесь следует отметить, что безразмерный параметр  $We$ , будучи выражен через размерные переменные, имеет вид:  $We \equiv (\rho_1 R U_0^2 / \sigma)$  и согласно экспериментальным данным (см., например, [16]) в газообразной среде его величина ограничена сверху значением:  $We \sim 1$ .

Из (7) несложно видеть, что с увеличением  $\chi$  – поверхностной плотности электрического заряда на границе раздела сред (параметра  $w$ ) критическая для начала распада струи величина скорости стационарного движения  $U_0$  (параметра  $We$ ) снижается, и при

$$w = \frac{(1 - m^2 - k^2)}{(h_m + 1)} \quad (8)$$

обращается в ноль. При значении параметра  $W$ , определяемом соотношением (8), реализуется электростатически-капиллярная неустойчивость волны с азимутальным числом  $m$ .

Для отыскания волнового числа  $k_m$  наиболее неустойчивой волны (волны, обладающей максимальным инкрементом  $\gamma$  и определяющей феноменологию разбиения струи на капли)

следует приравнять нулю  $\Upsilon \equiv \partial\gamma/\partial k$  производную по волновому числу  $k$  от инкремента неустойчивости

$$\gamma \equiv - \left| \operatorname{Im} \left( \sqrt{\frac{g_m k \rho U_0}{(\rho g_m - h_m)}}^2 + \frac{[(1 - m^2 - k^2 - w(1 + h_m))h_m g_m - We \times k^2 g_m]}{(\rho g_m - h_m)} \right) \right| \quad (9)$$

и разрешить получившееся уравнение  $\Upsilon(k) = 0$  относительно  $k$ . В силу громоздкости получающегося уравнения, содержащего функции Бесселя первого и второго родов и их производные, такая задача аналитически неразрешима, но ее можно решить графически.

Из рис. 3а, на котором приведены графики зависимости величины инкремента осесимметричных волн ( $m = 0$ ) на границе раздела сред от волнового числа  $k$  при нескольких фиксированных значениях параметров  $We$  и  $w = 0$ , видно, что с увеличением параметра  $We$  ширина области волновых чисел, соответствующих неустойчивым волнам, расширяется, а величина волнового числа, соответствующего волне с максимальным инкрементом, смещается в область больших значений волновых чисел. В самом деле, для струи в вакууме (при  $We = 0$ ) капиллярную неустойчивость претерпевают волны с волновыми числами  $k^2 < 1$  [3, 10]. При наличии материальной внешней среды ( $We \neq 0$ )

в отсутствие электрического заряда ширина диапазона волновых чисел неустойчивых осесимметричных волн расширяется до  $k^2 < |h_0| / (|h_0| - We)$ . Видно, что чем больше  $We$ , тем шире зона неустойчивости. При наличии на капле заряда при прочих равных условиях правая граница зоны неустойчивости еще сильнее смещается в область больших волновых чисел, так же как и волновое число волны с максимальным инкрементом (см. рис. 3б), а величины инкрементов увеличиваются. При больших зарядах на струе левая граница зоны неустойчивости отрывается от начала координат и смещается вправо, в область больших значений волновых чисел (см. рис. 3в). Такое поведение зон неустойчивости обязано сильному влиянию электрического заряда, наиболее ярко проявляющемуся при отсутствии относительного движения струи и среды. Согласно [10] зона капиллярной неустойчивости струи при отсутствии электрического заряда определяется соотношением:  $k^2 < 1$ . По мере увеличения заряда зона капиллярной неустойчивости целиком смещается в область больших значений волновых чисел и расширяется согласно условию:

$$k^2 \leq 1 - w(1 + h_0). \quad (10)$$

В (10) множитель  $(1 + h_0)$  положителен при малых значениях волновых чисел (при  $k < 0,595$ , см. рис. 1) и отрицателен при больших значениях (при  $k > 0,595$ ). Из (10) видно, что при достаточно больших значениях заряда (параметра  $w$ ) и при малых волновых числах (при  $k < 0,595$ ) правая часть (10), там где  $w(1 + h_0) > 1$ , становится отрицательной, что и будет соответствовать исчезновению неустойчивых решений или, что то же самое, смещению зоны неустойчивости в область больших величин волновых чисел.

Несколько иная картина влияния относительного движения капли и среды складывается для изгибной моды ( $m = 1$ ). На рис. 4а приведены зависимости инкрементов неустойчивости от волновых чисел неосесимметричных волн с  $m = 1$  при нулевом заряде на струе ( $w = 0$ ). Видно, что с ростом скорости (с ростом параметра  $We$ ) ширина зоны неустойчивости расширяется, величины инкрементов увеличиваются, а положение волнового числа, соответствующего волне с максимальным инкрементом, смещается в область больших значений волновых чисел. Интересно, что неустойчивость изгибной моды при  $w = 0$  имеет пороговый по  $We$  (по скорости) характер и реализуется при  $We > 1$ . В самом деле, для изгибной моды из (9)

при  $w = 0$  несложно получить критическое условие реализации неустойчивости в виде:  $We > |h_1|$ . А поскольку согласно рис. 1 при  $m = 1$  минимальное значение  $|h_1|$  есть единица, то мы получаем аналитическое подтверждение полученных расчетных данных.

При увеличении электрического заряда, приходящегося на единицу длины струи, изгибная неустойчивость струи реализуется уже при весьма маленьких значениях относительной скорости струи и среды (параметра  $We$ ). Ширина области неустойчивости и величина инкремента, как и волновое число волны, обладающей максимальным инкрементом, увеличиваются с ростом скорости (параметра  $We$ ), как это видно из рис. 4б,в.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В проведенном анализе выяснилось, что движение струи идеальной несжимаемой идеально электропроводной жидкости относительно несжимаемой диэлектрической среды приводит к дестабилизации как осесимметричных, так и изгибных волн на цилиндрической границе раздела сред. Для осесимметричных волн увеличение скорости движения струи приводит к уменьшению размеров капель, на которые дробится струя. Для незаряженной струи неустойчивость изгибных волн имеет пороговый характер: реализуется при конечном значении скорости относительного движения струи и среды.

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bailey, A.G., The theory and practice of electrostatic spraying, *Atomization Spray Technol.*, 1986, vol. 2, p. 95.
2. Бураев, Т.К., Верещагин, И.П., Пашин, Н.М., Исследование процесса распыления жидкостей в электрическом поле, *Сильные электрические поля в технологических процессах*, М.: Энергия, 1979, вып. 3, с. 87.
3. Ентов, В.М., Ярин, А.Л., Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей, *ВИНИТИ. Итоги науки и техники, Сер. «Механика жидкости и газа»*, 1984, т. 17, с. 112.
4. Габович, М.Д., Жидкометаллические эмиттеры ионов, *УФН*, 1983, т. 140, № 1, с. 137.
5. Fenn, J.B., Mann, M., Meng, C.K., Wong, Sh.F., et al., Electrospray ionization for mass spectrometry of large biomolecules, *Science*, 1989, vol. 246, no. 4926, p. 64.

6. Eggers, J., Villermaux, E., Physics of liquid jets, *Rep. Prog. Phys.*, 2008, vol. 71, 036601.
7. Cloupeau, M. and Prunet-Foch, B., Electrohydrodynamic spraying functioning modes: a critical review, *J. Aerosol Sci.*, 1994, vol. 25, no. 6, p. 1021.
8. Jaworek, A. and Krupa, A., Classification of the modes of end spraying, *J. Aerosol Sci.*, 1999, vol. 30, no. 7, p. 873.
9. Inyong Park, Sang Bok Kim, Won Seok Hong and Sang Soo Kim, Classification of electrohydrodynamic spraying modes of water in air at atmospheric pressure, *J. Aerosol Sci.*, 2015, vol. 89, no. 6, p. 26.
10. Левич, В.Г., *Физико-химическая гидродинамика*, М.: Физматгиз, 1959. 700 с.
11. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986. 733 с.
12. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Теория поля*, М.: Наука, 1973. 504 с.
13. Найфе, А.Х., *Методы возмущений*, М.: Мир, 1976. 455 с.
14. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Электродинамика сплошных сред*, М.: Наука, 1992. 662 с.
15. Абрамовиц, М., Стиган, И., *Справочник по специальным функциям*, М.: Наука, 1979. 830 с.
16. Ширяева, С.О., Григорьев, А.И., Святченко, А.А., *Классификация режимов работы электрогидродинамических источников ионов*, Препринт ИМ РАН №25, Ярославль, 1993. 118 с.

### Summary

For the first azimuthal modes of a charged jet of an electrically conductive incompressible liquid, the increments of the instability of capillary waves, their magnitude and dependence on the physical parameters of the task, the position of the instability zones on the set of wave numbers were investigated. In the conducted studies, it was found that the widths of the ranges of wave numbers of unstable waves and the values of instability increments depend on the square of the intensity of an electrostatic field and the square of the speed of relative motion, increasing at a higher field strength and speed. In the absence of a charge on the jet, bending instability has a threshold character, and it is realized not at any low speed value but starting from some final value of it.

*Keywords:* liquid jet, charge, material medium, instability increment, azimuthal number