

О влиянии вязкости жидкости на закономерности каплеобразования при реализации электрогидродинамической неустойчивости

А. И. Григорьев*, С. О. Ширяева**

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
г. Ярославль, 150000, Россия, *e-mail: grig@uniyar.ac.ru, **e-mail: shir@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию 09.03.2021

После доработки 07.04.2021

Принята к публикации 09.04.2021

Теоретическим аналитическим путем исследованы особенности влияния вязкости электропроводной жидкости на ее электродиспергирование с торца капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему, или при распаде сильно заряженной капли. Показано, что при электродиспергировании электропроводной маловязкой жидкости она эмитирует сильно заряженные мелкие капельки, изначально неустойчивые по отношению к собственному заряду, распадающиеся на пару сотен еще более мелких и сильно заряженных капелек, вокруг которых зажигается коронный разряд. В итоге на вершине мениска жидкости на торце капилляра или на вершине распадающейся заряженной капли появляется веерообразное свечение. Для вязкой электропроводной жидкости серия последовательных распадов заряженных дочерних капелек сразу прерывается в силу демпфирующего влияния вязкости после однократного деления пополам и образования устойчивых по отношению к собственному заряду капелек и факел коронного разряда не формируется.

Ключевые слова: заряженный мениск, неустойчивость, веерное свечение, капля, заряд, вязкость, струя

УДК 544.773.3

<https://doi.org/10.52577/eom.2022.58.1.30>

ВВЕДЕНИЕ

Капиллярное электродиспергирование жидкости широко используется в науке и технике при создании ионно-кластерно-капельных пучков в жидкостной масс-спектрометрии (для анализа труднолетучих веществ и веществ органического происхождения), в жидкометаллических источниках ионов, в жидкометаллической эпитаксии и литографии, при получении порошков тугоплавких металлов, в реактивной космической технике, для быстрого рассеяния оптически плотных аэродисперсных систем, при создании потоков монодисперсных капель в термоядерном синтезе, в капле струйной печати, ускорителях макрочастиц, при электро-распылении инсектицидов, горюче-смазочных материалов, лаков и красок. Кроме того, явление диспергирования заряженных капель во внешних электрических полях используется для истолкования разнообразных геофизических феноменов: огней Св. Эльма, свечения воронок смерчей, инициирования разряда молнии и сбора ею зарядов с отдельных облачных капель для поддержания своего существования. В частности, осцилляции заряженных капель во

внешних электрических полях приводят к появлению радиоизлучения из грозовых облаков [1].

Последние несколько десятков лет не прекращаются попытки разработки классификации наблюдаемых режимов электродиспергирования жидкости как на экспериментально-феноменологической основе [2–6], так и на теоретической [7]. К настоящему времени выделено несколько десятков режимов, и их количество продолжает увеличиваться, поскольку при изменении любого физико-химического свойства диспергируемой жидкости, при изменении рабочей жидкости или изменении параметров установки и внешней среды феноменология явления электродиспергирования меняется. В этой связи представляется полезным разобраться с особенностями образования капель при реализации электростатической неустойчивости.

В начале 20-го века, на заре исследования газовых разрядов, Дж. Зелени провел первые эксперименты (см., например, [8–10]) по изучению электрических разрядов с жидкого мениска на вершине капилляра, по которому жидкость подавалась в разрядную систему. Через десяток лет эксперименты Зелени по

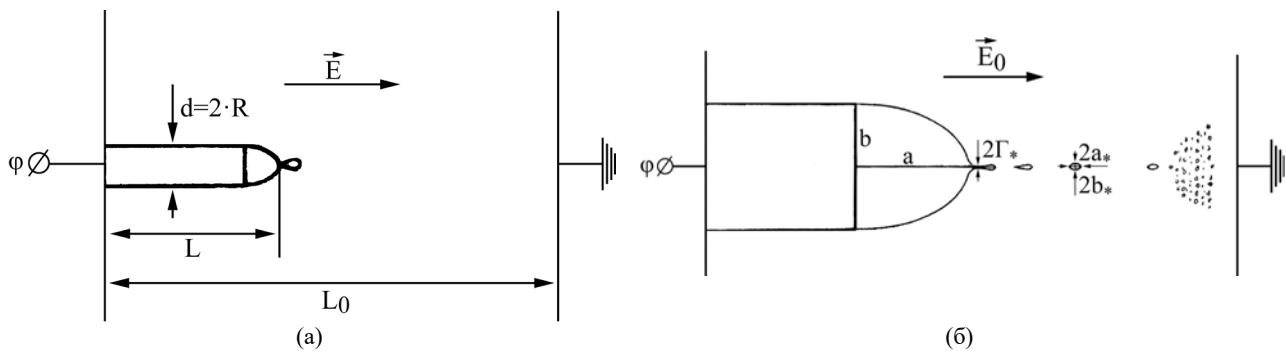


Рис. 1. Схема устройства для электродиспергирования жидкости (а). Общий вид мениска маловязкой жидкости на торце капилляра, выбрасывающего капельку во внешнем электростатическом поле (б).

электрическим разрядам с жидкого электрода повторил Инглиш [11] с использованием более совершенного оборудования, обладая более полными знаниями о газовых разрядах, и в целом подтвердил выводы Зелени.

В экспериментах [8–11] электрический разряд с жидкого мениска сопровождался выбросом в межэлектродное пространство сильно (выше рэлеевского предела [12, 13]) заряженных капель, вокруг которых загорался коронный разряд и появлялось свечение. Совокупность светящихся капель формировала у вершины мениска светящуюся область в форме веера (при наблюдении сбоку), и потому все свечение Зелени назвал «веерным». Гораздо позже в других экспериментах (выполненных в связи с изучением огней Св. Эльма) также наблюдалось веерное свечение в окрестности сильно заряженных капель, осевших на слабо проводящих предметах [14–15]. Выяснилось, что феноменология формирования свечения при разряде с жидкого мениска зависит от вязкости жидкости. Так, оно возникает только при электродиспергировании маловязких жидкостей (спирта или воды), начинаясь непосредственно у вершины мениска на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему, или у вершины сильно заряженной капли, на расстоянии порядка диаметра эмитируемой дочерней капельки [8, 10]. Веерное свечение формируется непосредственно в окрестности мениска (капли) за счет электростатического распада на несколько сотен дочерних капелек сильно заряженных (выше рэлеевского предела [12, 13]) дочерних капелек, которые, в свою очередь, распадаются, и зажигания свечения коронного разряда вокруг них. Для вязких же жидкостей с вершины мениска выбрасывается тоненькая струйка жидкости, распадающаяся на отдельные сильно заряженные капельки, которые, в свою очередь, делятся на части сравнимых размеров, устойчивые к электростатическому распаду (из-за сильного демпфирующего влияния

вязкости жидкости) [16], и веерного свечения не возникает. Длина струйки определяется вязкостью жидкости, например, для глицерина она имеет длину порядка десятков диаметров капилляра [9].

В связи со сказанным на примере схематичного устройства для электродиспергирования жидкости (см. рис. 1а) рассмотрим на качественном уровне закономерности образования капель маловязкой и весьма вязкой жидкостей.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть электропроводная несжимаемая жидкость массовой плотностью ρ с коэффициентом кинематической вязкости ν подается в разрядную систему по электропроводному капилляру радиуса R под действием давления P . Длина капилляра вместе с жидким мениском на его вершине L . Объемный расход жидкости χ . Абсолютная температура системы T принимается постоянной. Между капилляром и противоэлектродом поддерживается постоянная разность потенциалов φ так, что напряженность электростатического поля между плоскими электродами равна $E_0 \approx \varphi / L_0$, а мениск жидкости оказывается поверхностно заряженным. Примем, что напряженность электростатического поля в окрестности вершины мениска (в месте отрыва капельки) будет иметь напряженность $E \approx 3E_0$.

Капелька отрывается от мениска под действием электростатической силы, действующей со стороны внешнего электростатического поля и поля заряда мениска на заряд отрывающейся капельки. Собственно говоря, схема расчета закономерностей отрыва капли от жидкого мениска детально описана в [17, с. 53, задача 1]. Сила поверхностного натяжения (лапласовская сила) в перетяжке радиуса r_* удерживает каплю (см. рис. 1б) [18]. Расчеты [13] показывают, что отрывающаяся капля несет заряд, больший критического по

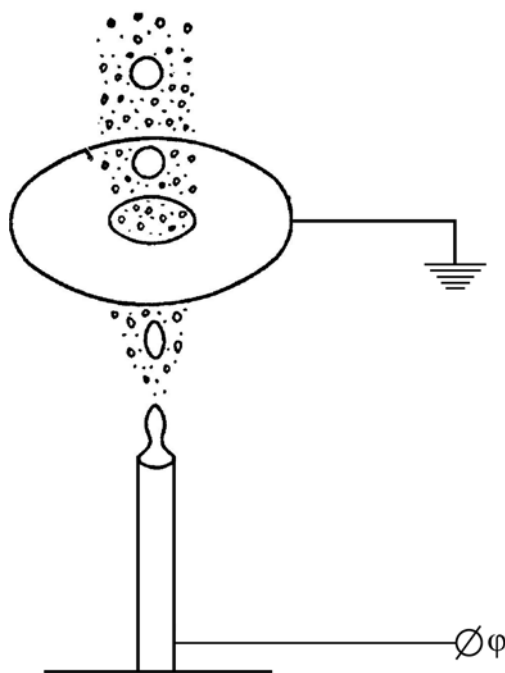


Рис. 2. Общая схема устройства для электродиспергирования, использующегося на практике.

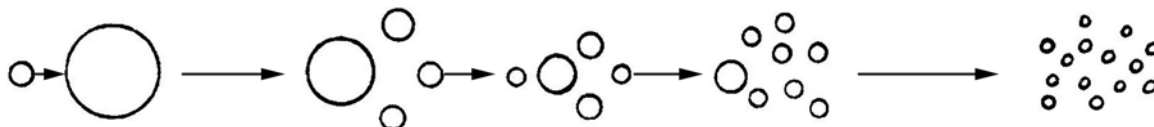


Рис. 3. Схема дозаряжения медленных крупных капель мелкими, быстрыми, сильно заряженными.

Рэлею, и за время порядка периода осцилляций основной моды выброшенной капельки распадается, выбрасывая около сотни на два порядка более мелких, сильно заряженных дочерних капелек, которые, в свою очередь, распадаются по тому же закону. В итоге образуется полидисперсный по размерам и зарядам факел электродиспергирования, как показано на рис. 2 для реальных установок по диспергированию лакокрасочных материалов, ядохимикатов, горючего. При распаде сильно заряженной капли она теряет $\approx 23\%$ своего заряда и примерно $0,05\%$ массы и становится устойчивой по отношению к собственному заряду [19]. Но так как все эмитированные капельки проходят одинаковую ускоряющую разность потенциалов и получают одинаковую энергию, то мелкие капельки будут иметь скорость большую, чем крупные с зарядом, меньшим рэлеевского. Поэтому мелкие сильно заряженные капельки будут догонять крупные, имеющие заряд меньше критического по Рэлею, дозаряжать их и приводить к новому рэлеевскому распаду, как это показано на рис. 3.

В стационарном режиме работы устройства для электродиспергирования жидкости количество жидкости, натекающей в мениск в единицу времени χ , должно равняться расходу жидкости на электродиспергирование $4\pi r^3 N / 3$, где r – радиус капельки;

N – количество капелек, эмитированных с вершины мениска в единицу времени. В этих условиях характерное время между отрывом двух последовательных капелек $\Delta\tau_0$ определится как отношение единицы времени к N . С точки зрения строгой теории это время должно быть много больше единицы, деленной на инкремент развития неустойчивости в перетяжке γ , связывающей мениск с отрывающейся капелькой. Причем $\Delta\tau_0 \gg 1/\gamma$.

Чтобы правильно понять влияние вязкости на закономерности диспергирования жидкости, учтем, что при неизменной величине коэффициента кинематической вязкости жидкости она может проявлять себя как сильновязкая или маловязкая в зависимости от геометрических размеров области, ею занимаемой. Примем во внимание, что при движении жидкости по капилляру влияние вязкости (в расчете баланса сил трения о стенки капилляра и силы инерции потока) будет зависеть от радиуса капилляра R и плотности жидкости ρ : для тонкого капилляра сила трения будет превышать силу инерции, а для толстого, наоборот. Поэтому безразмерим коэффициент кинематической вязкости жидкости ν на R ρ и коэффициент поверхностного натяжения жидкости σ . Такому же безразмериванию (в системе физических единиц СГСЭ)

подвергнем и все остальные физические величины, которые встретятся в задаче. Безразмерная вязкость примет вид:

$$\frac{\nu}{\nu_*} = \nu \sqrt{\frac{\rho}{\sigma R}}.$$

Как видно, величина безразмерной вязкости зависит от ν , R , ρ , σ .

Для маловязких жидкостей отрыв капельки происходит непосредственно с вершины мениска, как показано на рис. 16. Капелька отрывается с вершины мениска, где напряженность электростатического поля максимальна $E \approx 3E_0$, а связана она с мениском перетяжкой, имеющей форму катеноида [13, 18]. Разрыв перетяжки происходит по наиболее узкому месту с радиусом r^* , где $r^* < r$ [18].

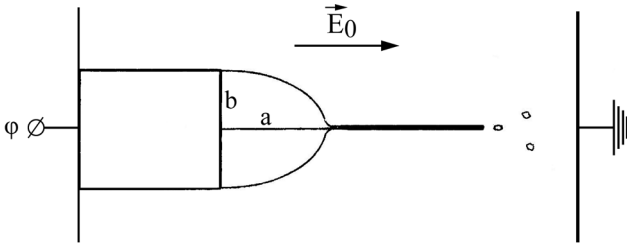


Рис. 4. Общий вид мениска сильновязкой жидкости на торце капилляра, выбрасывающего струйку во внешнем электростатическом поле.

Для вязких жидкостей при прочих равных условиях инкремент развития неустойчивости в перетяжке будет существенно меньше, а время развития неустойчивости соответственно больше [20, 21]. Жидкость же будет продолжать натекать, а на вершине мениска образуется выступ, за который под влиянием внутреннего давления в жидкости и внешнего электростатического поля будет вытягиваться из мениска струйка толщиной $2r$. Отрыв капельки будет происходить с вершины струйки, где напряженность электростатического поля увеличится по сравнению с $3E_0$ за счет индуцирования полем $3E_0$ заряда на вершине струйки (чем длиннее струйка, тем больше будет величина индуцированного заряда). Отрываться от струйки под действием внешнего электростатического поля будет ее вершина с находящимся на ней зарядом вследствие развития в заряженной струйке неустойчивости капиллярных волн, как это схематически показано на рис. 4.

Таким образом, нужно рассмотреть влияние вязкости жидкости на величину инкремента неустойчивости осесимметричной струи. Иначе говоря, необходимо решить задачу о неустойчивости заряженной осесимметричной струи электропроводной вязкой несжимаемой жидкости.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть бесконечная цилиндрическая струя радиуса R вязкой несжимаемой электропроводной жидкости с плотностью ρ , коэффициентом кинематической вязкости ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ движется вдоль оси симметрии со скоростью \vec{U}_0 . Будем считать, что струя поддерживается при постоянном электрическом потенциале Φ^* и электрический заряд распределен по ее поверхности с поверхностной плотностью заряда χ_0 . Перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с ее скоростью \vec{U}_0 . В такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $\vec{U}(\vec{r}, t)$ определяется тепловыми волнами [22]. Амплитуда капиллярных волн на поверхности струи будет малой величиной, порядка десятых долей ангстрема для любых жидкостей – от криогенных до жидких металлов. В самом деле, в жидкости всегда существует тепловое (порождаемое тепловым движением ее молекул) капиллярное волновое движение амплитуды $\sim \sqrt{\kappa T / \sigma}$, где κ – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура [22]. Поверхностная плотность заряда на струе, возмущенной капиллярным волновым движением тепловой амплитуды, будет $\chi(\varphi, z, t)$.

Расчеты проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z , орт \vec{n}_z которой ориентирован вдоль оси симметрии струи (ее поверхность не возмущена капиллярным волновым движением).

Уравнение поверхности струи, возмущенной капиллярным волновым движением, запишем в виде:

$$r(\varphi, z, t) = R + \xi(\varphi, z, t), \quad |\xi(\varphi, z, t)| \ll R.$$

Будем решать задачу об устойчивости осесимметричных волн на заряженной струе.

Математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\frac{d\vec{U}(\vec{r}, t)}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \times \Delta \vec{U}(\vec{r}, t), \quad \nabla \vec{U}(\vec{r}, t) = 0,$$

$$\Delta \Phi(\vec{r}, t) = 0;$$

$$r \rightarrow 0: \quad |\vec{U}(\vec{r}, t)| < \infty,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi(\vec{r}, t)| \rightarrow 0;$$

$$\begin{aligned}
& r = R + \xi: \\
& -\frac{\partial \xi(\varphi, z, t)}{\partial t} + \vec{U}(\vec{r}, t) \times \nabla [r - (R + \xi(\varphi, z, t))] = 0; \\
& \frac{\partial U_\varphi(\vec{r}, t)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r(\vec{r}, t)}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} U_\varphi(\vec{r}, t) = 0; \\
& \frac{\partial U_z}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z} = 0; \\
& -P(\vec{r}, t) - P_0 + 2\nu \frac{\partial U_r(\vec{r}, t)}{\partial r} - P_q(\vec{r}, t) + P_\sigma(\vec{r}, t) = 0; \\
& \Phi(\vec{r}, t) = \Phi_*. \quad (1)
\end{aligned}$$

В (1) $U_r(\vec{r}, t)$, $U_\varphi(\vec{r}, t)$, $U_z(\vec{r}, t)$ – компоненты поля скоростей; $P(\vec{r}, t)$ и P_0 – гидродинамическое и атмосферное давления; $P_q(\vec{r}, t)$ и $P_\sigma(\vec{r}, t)$ – давления электрического поля и сил поверхностного натяжения; $\Phi(\vec{r}, t)$ – электрический потенциал.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ

Сформулированную задачу будем решать в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, в линейном приближении по $|\xi(\varphi, z, t)|/R$. Задача (1), если за всеми физическими величинами оставить прежние обозначения, запишется в виде:

$$\begin{aligned}
& r(\varphi, z, t) = 1 + \xi(\varphi, z, t), \quad |\xi| \ll R, \\
& r \leq 1: \\
& \frac{\partial \vec{U}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\vec{r}, t) + \nu \times \Delta \vec{U}(\vec{r}, t), \quad \nabla \vec{U}(\vec{r}, t) = 0, \\
& r \geq 1: \quad \Delta \Phi(\vec{r}, t) = 0, \\
& r \rightarrow 0: \quad |\vec{U}(\vec{r}, t)| < \infty, \quad r \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi(\vec{r}, t)| \rightarrow 0; \\
& r = 1: \\
& -\frac{\partial \xi(\varphi, z, t)}{\partial t} + \vec{U}_r(\vec{r}, t) = 0, \\
& \frac{\partial U_\varphi(\vec{r}, t)}{\partial r} + \frac{\partial U_r(\vec{r}, t)}{\partial \varphi} - U_\varphi(\vec{r}, t) = 0, \\
& \frac{\partial U_z(\vec{r}, t)}{\partial r} + \frac{\partial U_r(\vec{r}, t)}{\partial z} = 0, \\
& -p(\vec{r}, t) + 2\nu \frac{\partial U_r(\vec{r}, t)}{\partial r} - p_q(\vec{r}, t) + p_\sigma(\vec{r}, t) = 0, \\
& \Phi(\vec{r}, t) - 4\pi\chi_0 \xi(\varphi, z, t) = 0. \quad (2)
\end{aligned}$$

В (2) $\Phi(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$, $p_q(\vec{r}, t)$, $p_\sigma(\vec{r}, t)$ – вызванные капиллярными волнами на поверхности струи поправки первого порядка малости по малому параметру $|\xi(\varphi, z, t)|/R$ к электрическому потенциалу, гидродинамическому

давлению, давлениям электрических и капиллярных сил соответственно.

Разложим по малому параметру выражения для лапласовского давления $P_\sigma(\vec{r}, t) = \text{div} \vec{n}(\vec{r}, t)$ (где $\vec{n}(\vec{r}, t)$ – орт нормали к поверхности струи) и давления электрического поля $P_q = [\nabla(\Phi + \phi)]^2 / 8\pi$ и для входящих в (2) величин первого порядка малости $p_q(\vec{r}, t)$ и $p_\sigma(\vec{r}, t)$ получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
p_\sigma(\vec{r}, t) &= -\left(\xi(\varphi, z, t) + \frac{\partial^2 \xi(\varphi, z, t)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \xi(\varphi, z, t)}{\partial z^2} \right), \\
p_q(\vec{r}, t) &= -4\pi\chi_0^2 \xi(\varphi, z, t) - \chi_0 \frac{\partial \phi(\varphi, z, t)}{\partial r}.
\end{aligned}$$

СКАЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Систему уравнений (2), (3) будем решать методом операторной скаляризации [23], раскладывая поле скоростей $\vec{U}(\vec{r}, t)$ на сумму трех ортогональных векторных полей с помощью векторных дифференциальных операторов \hat{N}_i :

$$\begin{aligned}
\vec{U}(\vec{r}, t) &= \sum_{i=1}^3 \hat{N}_i \psi_i(\vec{r}, t), \quad (i=1, 2, 3); \quad \text{если } \hat{N}_j^+ \hat{N}_i = 0, \\
&\Delta \hat{N}_i = \hat{N}_i \Delta; \quad (\text{при } i \neq j; i, j = 1, 2, 3). \quad (3)
\end{aligned}$$

В (3) $\psi_i(\vec{r}, t)$ – искомые скалярные функции; \hat{N}_j^+ – операторы, эрмитово-сопряженные к операторам \hat{N}_j .

Так как равновесная форма струи осесимметрична, то \hat{N}_i удобно выбрать в виде:

$$\hat{N}_1 \equiv \nabla, \quad \hat{N}_2 \equiv \nabla \times \vec{e}_z, \quad \hat{N}_3 \equiv \nabla \times (\nabla \times \vec{e}_z).$$

Компоненты поля скоростей $\vec{U}(\vec{r}, t)$ будут выражаться через скалярные функции $\psi_i(\vec{r}, t)$:

$$\begin{aligned}
U_r &= \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial \varphi}, \\
U_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial z \partial \varphi}, \\
U_z &= \frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_3}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_3}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (4)
\end{aligned}$$

Подставляя разложение $\vec{U}(\vec{r}, t)$ (3) в систему (2) и используя свойства ортогональности и коммутативности операторов \hat{N}_i (3), получим систему скалярных уравнений относительно искомых функций $\psi_i(\vec{r}, t)$:

$$\nabla\psi_1(\vec{r},t)=0,$$

$$\Delta\psi_i(\vec{r},t)-\frac{1}{v}\frac{\partial\psi_i(\vec{r},t)}{\partial t}=0, \quad (i=2,3), \quad (5)$$

$$p(\vec{r},t)=-\frac{\partial\psi_1(\vec{r},t)}{\partial t}. \quad (6)$$

Используя (4) и (6) и граничные условия в (2), перепишем их в качестве граничных условий для $\psi_i(\vec{r},t)$ и $\xi(\varphi,z,t)$:

$$r=1:$$

$$\frac{\partial\xi(\varphi,z,t)}{\partial t}-\left[\frac{\partial\psi_1(\vec{r},t)}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2(\vec{r},t)}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2\psi_3(\vec{r},t)}{\partial z\partial r}\right]=0,$$

$$2\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{\partial\psi_1(\vec{r},t)}{\partial r}-\psi_1(\vec{r},t)\right\}-$$

$$-\left\{\frac{\partial^2\psi_2(\vec{r},t)}{\partial r^2}-\frac{\partial\psi_2(\vec{r},t)}{\partial r}-\frac{\partial^2\psi_2(\vec{r},t)}{\partial\varphi^2}\right\}+$$

$$2\frac{\partial^2}{\partial z\partial\varphi}\left\{\frac{\partial\psi_3(\vec{r},t)}{\partial r}-\psi_3(\vec{r},t)\right\}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial\psi_1(\vec{r},t)}{\partial z}-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi_3(\vec{r},t)}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi_3(\vec{r},t)}{\partial\varphi^2}\right]\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial\psi_1(\vec{r},t)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2(\vec{r},t)}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2\psi_3(\vec{r},t)}{\partial z\partial\varphi^2}\right\}=0,$$

$$\frac{\partial\psi_1(\vec{r},t)}{\partial t}+2v\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{\partial\psi_1(\vec{r},t)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_2(\vec{r},t)}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2\psi_3(\vec{r},t)}{\partial z\partial r}\right\}+$$

$$+4\pi\chi_0^2\xi(\varphi,z,t)+\chi_0\frac{\partial\phi(\vec{r},t)}{\partial r}-$$

$$-\left\{\xi(\varphi,z,t)+\frac{\partial^2\xi(\varphi,z,t)}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\xi(\varphi,z,t)}{\partial z^2}\right\}=0. \quad (7)$$

Так как $\xi(\varphi,z,t)$, $\phi(\vec{r},t)$ и $\psi_i(\vec{r},t)$ описывают малые отклонения от равновесного состояния, то, чтобы проследить их эволюцию во времени, положим, что их временная зависимость определяется экспонентой:

$$\xi(\varphi,z,t), \phi(\vec{r},t), \psi_i(\vec{r},t) \sim \exp(st),$$

где S – в общем случае комплексная частота.

ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ

Решения уравнений (4) и (5) в цилиндрической системе координат, удовлетворяющие сформулированным выше условиям ограниченности, будем искать в виде:

$$\psi_1(\vec{r},t)=\int_0^\infty C^{(1)} \times I_0(kr) \times \exp(ikz) \times \exp(st) dk,$$

$$\psi_i(\vec{r},t)=\int_0^\infty C^{(i)} I_0(lr) \times \exp(ikz) \times \exp(st) dk, \quad (i=2;3);$$

$$\phi(\vec{r},t)=\int_0^\infty C^{(4)} I_0(kr) \exp(ikz) \exp(st) dk. \quad (8)$$

Также представим и функцию $\xi(z,\varphi,t)$:

$$\xi(z,\varphi,t)=\int_0^\infty D \times \exp(ikz) \exp(st) dk. \quad (9)$$

В (8)–(9) k – волновое число; $l^2 \equiv k^2 + s/v$; $I_m(x)$ и $K_m(x)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода в [24]; $C^{(i)}$, где $i = 1, 2, 3, 4$, и D – коэффициенты разложений, зависящие от k .

$$\int_0^{2\pi} \exp[i(k_1 - k_2)z] dz = \delta(k_1 - k_2), \quad (10)$$

где $\delta(k_1 - k_2)$ – дельта-функция Дирака [25, с. 902], несложно получить связь коэффициентов $C^{(4)}$ и D :

$$C^{(4)} = \frac{4\pi\chi_0}{K_0(k)} D. \quad (11)$$

Подставляя решения (8) с учетом (9) и (11) в граничные условия (7) и используя соотношения (10), получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов D и $C^{(i)}$, ($i = 1, 2, 3$):

$$D \times s - C^{(1)} k I_0'(k) - C^{(3)} i k I_0'(l) = 0, \quad (12)$$

$$C^{(2)} (I_0'(l) - l \times I_0''(l)) = 0,$$

$$C^{(1)} 2ik^2 I_0'(k) -$$

$$-C^{(3)} (l^3 I_0'''(l) + l^2 I_0''(l) + l(k^2 - 1) I_0'(l)) = 0,$$

$$D \left\{ 4\pi\chi_0^2 \left(1 + \frac{kK_0'(k)}{K_0(k)} \right) + k^2 - 1 \right\} +$$

$$+ C^{(1)} (sI_0(k) + 2vk^2 I_0''(k)) + C^{(3)} 2vikl^2 I_0''(l) = 0.$$

Штрихами вверху функций Бесселя обозначаются производные по аргументу, которые могут быть выражены через функции Бесселя того же и соседних порядков.

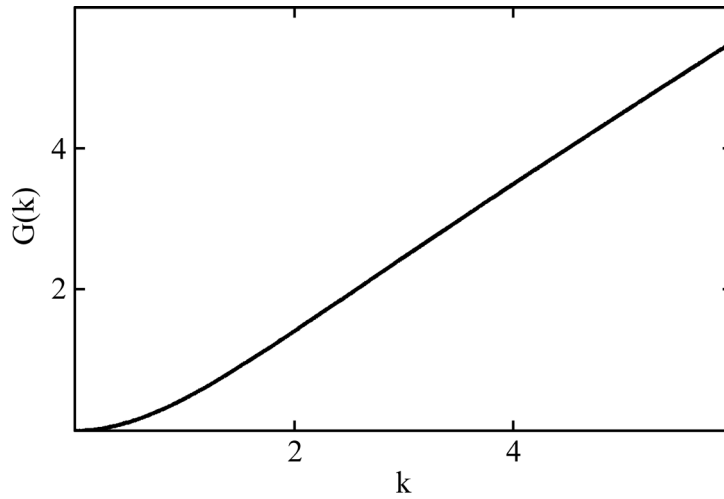


Рис. 5. Зависимость от безразмерного волнового числа k безразмерного множителя $G(k)$.

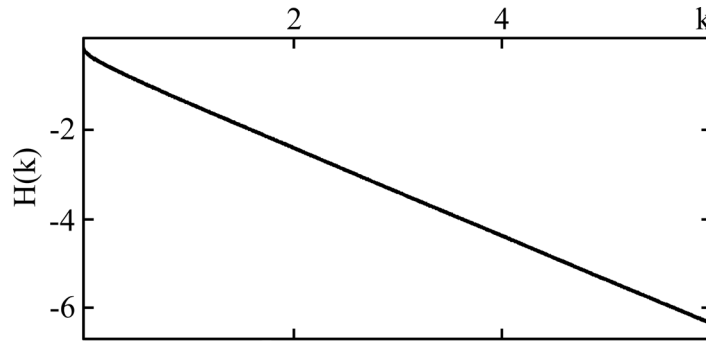


Рис. 6. Зависимость от безразмерного волнового числа k безразмерного множителя $H(k)$.

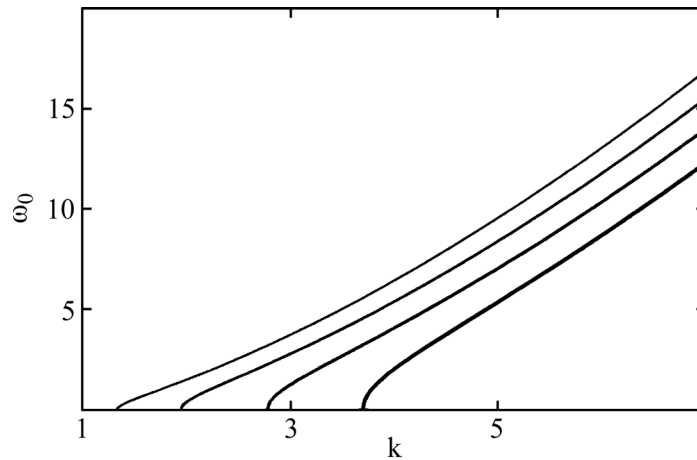


Рис. 7. Зависимости от безразмерного волнового числа k безразмерной частоты осцилляций идеальной жидкости $\omega(k)$, рассчитанные при $w = 1; 2; 3; 4$. Кривые разной толщины расположены сверху вниз по мере увеличения зарядового параметра w .

Система однородных линейных уравнений (12) имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю $\det[a_{ij}] = 0$, где элементы a_{ij} определяются соотношениями:

$$a_{11} = s,$$

$$a_{21} = a_{31} = 0, \quad a_{41} = k^2 - 1 + 4\pi\chi_0^2 \left\{ 1 - k \frac{K_1(k)}{K_0(k)} \right\},$$

$$a_{12} = -kI_1(k), \quad a_{22} = 0, \quad a_{32} = 2ik^2I_1(k),$$

$$a_{42} = [s + 2vk^2]I_0(k) - 2vkI_1(k),$$

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 2lI_1(l) - l^2I_0(l), \quad a_{33} = 0, \quad a_{43} = 0,$$

$$a_{14} = -iklI_1(l), \quad a_{24} = 0, \quad a_{34} = -(l^2 + k^2)l \times I_1(l),$$

$$a_{44} = 2vik(l^2I_0(l) - lI_1(l)). \quad (13)$$

Раскрывая определитель четвертого порядка с элементами (13), получим дисперсионное

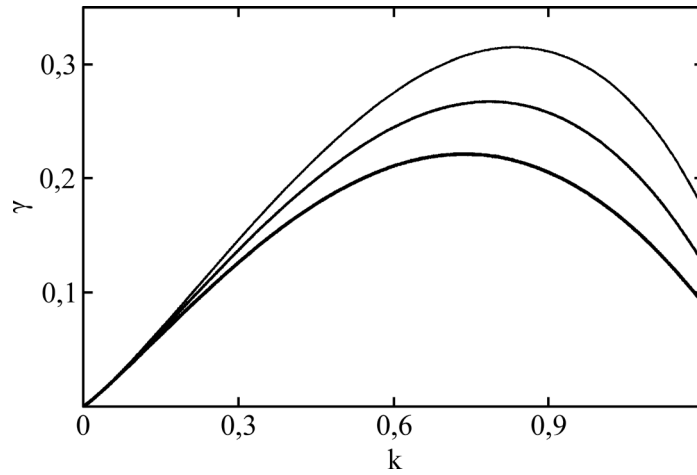


Рис. 8. Зависимости безразмерного инкремента осесимметричных волн на струе маловязкой жидкости $\gamma(k)$ от безразмерного волнового числа k , рассчитанные при $w = 1$ и различных значениях безразмерного коэффициента кинематической вязкости $\nu = 0,125; 0,2; 0,3$. Кривые разной толщины расположены сверху вниз по мере увеличения вязкости.

уравнение, связывающее комплексные частоты s осесимметричных волн на поверхности струи с волновым числом k :

$$s^2 - \frac{2\nu k^2 s}{I_0(k)} \left\{ s I_1'(k) - \frac{2kl}{l^2 + k^2} \frac{I_1(k)}{I_1(l)} I_1'(l) \right\} = \omega_0^2(k);$$

$$\omega_0^2(k) = G(k) \left(1 - k^2 - w(1 - H(k)) \right) \frac{l^2 - k^2}{l^2 + k^2};$$

$$G(k) \equiv k \frac{I_1(k)}{I_0(k)}; \quad H(k) \equiv k \frac{K_1(k)}{K_0(k)}; \quad w \equiv 4\pi\chi_0^2. \quad (14)$$

Графики функций $G(k)$, $H(k)$ и $\omega_0(k)$ приведены на рис. 5–7.

В отсутствие электрического заряда на струе ($w = 0$) это уравнение совпадает с дисперсионным уравнением для незаряженной струи вязкой несжимаемой жидкости [21, с. 631].

Для идеальной жидкости ($\nu = 0$) член уравнения (14), пропорциональный вязкости, уходит, и уравнение (14) упрощается:

$$s^2 = \omega_0^2(k); \quad \omega_0^2(k) = G(k) \left(1 - k^2 - w(1 - H(k)) \right);$$

а его решения записываются как:

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\omega_0^2(k)}. \quad (15)$$

Когда $\omega_0^2(k)$ – отрицательно, решения (15) описывают частоты бегущих по струе капиллярных волн. Если $\omega_0^2(k) > 0$, то (15) определяют их инкремент нарастания амплитуды γ (при $s_1 = \sqrt{\omega_0^2(k)} > 0$) и их декремент убывания амплитуды η (при $s_2 = \sqrt{\omega_0^2(k)} < 0$).

При наличии вязкости у жидкости ее демпфирующее влияние снижает частоты капиллярных

волн или их инкременты и увеличивает декремент.

Рассмотрим случай маловязкой жидкости, когда выполняется условие $l \gg k$ (напомним, что $l^2 \equiv k^2 + s/\nu$, а значит, что в этом случае $(s/\nu) \gg k^2$), тогда для длинных волн на струе, длина которых много больше ее радиуса ($k \ll 1$), выполняются соотношения [21, с. 636]:

$$I_0(k) \approx 1; \quad I_1(k) \approx \frac{k}{2}; \quad I_1(l) \approx \frac{l}{2}; \quad I_1'(l) = I_1'(k) \approx \frac{1}{2};$$

и уравнение (14) принимает вид:

$$s^2 + 3\nu k^2 s - \frac{k^2(1 - k^2 - w(1 - H(k)))}{2} = 0; \quad (15a)$$

а его решения:

$$(s_{1,2})_{sv} = -\frac{3\nu k^2}{2} \pm \sqrt{\frac{9\nu^2 k^4}{4} + \frac{k^2(1 - k^2 - w(1 - H(k)))}{2}}. \quad (16)$$

Графики зависимостей безразмерных инкрементов неустойчивости капиллярных волн на струе от безразмерного волнового числа для различных малых значений коэффициента кинематической вязкости жидкости (0,125; 0,2; 0,3), рассчитанные по (16), приведены на рис. 8 (кривые расположены сверху вниз по мере увеличения вязкости). Значение коэффициента кинематической вязкости $\nu = 0,125$ соответствует воде. Несложно видеть, что увеличение вязкости приводит к снижению инкрементов и смещению положения максимального инкремента в сторону более длинных волн.

При большой вязкости жидкости, когда демпфирующее влияние вязкости приводит к снижению частоты периодических движений

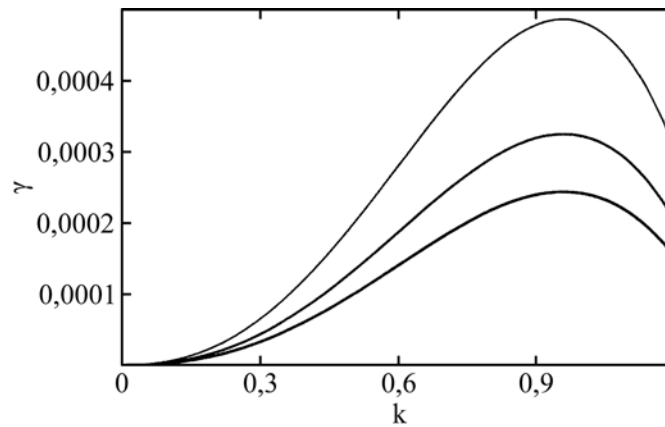


Рис. 9. Зависимости безразмерного инкремента осесимметричных волн на струе сильновязкой жидкости $\gamma(k)$ от безразмерного волнового числа k , рассчитанные при $w = 1$ и различных значениях безразмерного коэффициента кинематической вязкости $\nu = 100; 150; 200$. Кривые разной толщины расположены сверху вниз по мере увеличения вязкости.

жидкости и их инкрементов неустойчивости и увеличению декрементов, когда $l^2 = k^2 + (s/\nu) \approx k^2$ (или $(s/\nu) \rightarrow 0$ при увеличении ν), уравнение (14) сводится к:

$$s = \frac{1}{4\nu}(1 - k^2 - w(1 - H(k))). \quad (17)$$

Графики зависимостей безразмерного инкремента неустойчивости капиллярных волн на струе от безразмерного волнового числа для различных больших значений кинематической вязкости жидкости (100; 150; 200), рассчитанные по (17), приведены на рис. 9 (кривые расположены сверху вниз по мере увеличения вязкости). Значение коэффициента кинематической вязкости $\nu = 100$ соответствует глицерину. Несложно видеть, что увеличение вязкости приводит к снижению инкрементов. Положение максимального инкремента в указанном диапазоне значений коэффициентов кинематической вязкости практически не меняется.

Сравнение рис. 8 и 9 показывает, что изменение вязкости жидкости примерно в тысячу раз (как для перехода от воды к глицерину) приводит к снижению безразмерного инкремента неустойчивости также примерно в тысячу раз, что и объясняет различие в феноменологиях электростатического распада мало- и сильновязких жидкостей.

КОРОТКИЕ И БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫЕ СТРУИ

Следует отметить, что расчеты, проделанные в данной работе, выполнены для струи бесконечной длины, тогда как реальные струи имеют конечную длину. Если струя сильновязкой жидкости более-менее длинная и ее с известной степенью идеализации (пренебрегая краевыми эффектами) можно моделировать бесконечно длинной, то струя маловязкой жидкости до

распада проходит ничтожно малое расстояние и бесконечно длинной считаться никак не может. Но следует учесть, что в задачах о струях существует несколько модельных подходов. В одном, разработанном Релеем [26] в конце 19-го века, впоследствии развитым Бассетом [27] и Вебером [28], рассматривается струя бесконечной длины, по которой бегут капиллярные волны с вещественным волновым числом, а их частоты в общем случае комплексны, и появление мнимой части частоты означает неустойчивость волны. Большая часть теоретических исследований неустойчивости струй выполнена в рамках именно этого подхода. Во втором подходе, появившемся в середине 20-го века [29–30], комплексным считается волновое число, а вещественной – частота. Собственно говоря, второй подход ближе к реальности, ибо реальные струи вытекают из капилляра (трубы) и распадаются на конечном расстоянии от среза капилляра, когда волновое число становится мнимым.

Интересно отметить, что все эксперименты выполняются со струями конечной длины, а большинство теоретических исследований выполнено для бесконечно длинных струй (см. хотя бы обзоры [31, 32]). Результаты этих экспериментальных и теоретических исследований, выполненные в разных подходах, сравниваются между собой. И это сравнение плодотворно. А причина этого в том, что, как показано в [30], дисперсионные уравнения, полученные выше в конкретизированных подходах, получаются друг из друга простым линейным преобразованием.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что электродиспергирование мало- и сильновязких электропроводных жидкостей реализуется по разным физическим сценариям, хотя эмитируемые капли в обоих случаях несут заряд, больший критического в смысле

реализации электростатической неустойчивости. Для маловязких жидкостей выбрасываемая капля выбрасывает две сотни на два порядка более мелких дочерних сильно заряженных капелек, каждая из которых, в свою очередь, неустойчива по отношению к собственному заряду. В силу наличия высокой напряженности электростатического поля собственного заряда в окрестности каждой из капелек загорается коронный разряд. В итоге у вершины капли маловязкой жидкости появляется веерное свечение.

По иному сценарию реализуется электростатическая неустойчивость сильно-вязкой заряженной капли: из-за демпфирующего влияния вязкости жидкости такая капля выбрасывает конечное число дочерних капелек, каждая из которых распадается пополам на две дочерних, устойчивых по отношению к собственному заряду, и веерного свечения не возникает. В итоге феноменология распада мало- и сильновязких жидкостей различна.

Вышесказанное относится к электропроводной жидкости, когда время максвелловской релаксации электрического заряда много меньше характерного времени отрыва эмитируемой капли от мениска. Для слабопроводящих жидкостей эмитированные капли будут нести заряд, меньший критического для реализации электростатической неустойчивости (из-за малой электропроводности), и веерное свечение у вершины мениска не возникнет даже для маловязких жидкостей.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калечиц, В.И., Нахутин, И.Е., Полужков, П.П., О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков, *ДАН СССР*, 1982, т. 262, № 6, с. 1344.
2. Cloupeau, M. and Prunet-Foch, B., Electrostatic spraying of liquids: main functioning modes, *J. Electrostat.*, 1990, vol. 25, p. 165.
3. Cloupeau, M. and Prunet-Foch B., Electrohydrodynamic spraying functioning modes: a critical review, *J. Aerosol Sci.*, 1994, vol. 25, no. 6, p. 1021.
4. Jaworek, A. and Krupa, A., Classification of the Modes of EHD Spraying, *J. Aerosol Sci.*, 1999, vol. 30, no. 7, p. 873.
5. Verdoold, S., Agostinho, L.L.F., Yurteri, C.U. and Marijennisen, J.S.W., A generic electrospray classification, *J. Aerosol Sci.*, 2014, vol. 67, p. 87.
6. Inyong, Park, Sang Bok, Kim, Won Seok, Hong and Sang Soo Kim, Classification of electrohydrodynamic spraying modes of water in air at atmospheric pressure, *J. Aerosol. Sci.*, 2015, vol. 89, no. 6, p. 26.
7. Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., Классификация режимов электродиспергирования жидкости, *ЭОМ*, 2018, т. 54, № 2, с. 23.
8. Zeleny, J., On the conditions of instability of electrified drops, with application to the electrical discharge from liquid points, *Proc. Cambridge Philosoph. Soc.*, 1914, vol. 18, part 1, p. 71.
9. Zeleny, J., Instability of electrified liquid surfaces, *Phys. Rev.*, 1917, vol. 10. no. 1, p. 1.
10. Zeleny, J., Electrical discharges from pointed conductors, *Phys. Rev.*, 1920. vol. 16, no. 2, p. 102.
11. English, W.H., Corona from a water drop, *Phys. Rev.*, 1948, vol. 74, no. 2, p. 179.
12. Rayleigh F.R.S., On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity, *Phil. Mag.*, 1882, vol. 14, p. 184.
13. Grigor'ev, A.I. and Shiryayeva, S.O., The theoretical consideration of physical regularities of the electrostatic dispersion of liquids as aerosols, *J. Aerosol. Sci.* 1994, vol. 25, no. 6, p. 1079.
14. Войцеховский, Б.В., Войцеховский, Б.Б., Свечение в потоке заряженных капель, *Письма ЖЭТФ*, 1976, т. 23, № 1, с. 37.
15. Войцеховский, Б.Б., Огни Эльма и свечение на предметах в облаке электрически заряженных капель воды, *ДАН СССР*, 1982, т. 262, № 1, с. 84.
16. Григорьев, А.И., О некоторых закономерностях реализации неустойчивости сильнозаряженной вязкой капли, *ЖТФ*, 2001, т. 71, № 10, с. 1.
17. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Электродинамика сплошных сред*, М.: Наука, 1982. 620 с.
18. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Гидродинамика*, М.: Наука, 1986. 733 с.
19. Schweizer, J.W. and Hanson, D.N., Stability limit of charged drops, *J. Colloid Interface Sci.*, 1971, vol. 35, no. 3, p. 417.
20. Ширяева С.О., Григорьев А.И., *Спонтанный распад струй*, Ярославль: Изд. ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2012, 204 с.
21. Левич, В.Г., *Физико-химическая гидродинамика*, М: Физматгиз, 1959. 700 с.
22. Френкель, Я.И., К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме, *ЖЭТФ*, 1936, т. 6, № 4, с. 348.
23. Лазарянц, А.Э., Ширяева, С.О., Григорьев, А.И., *Скаляризация векторных краевых задач*, М.: Русайнс, 2020. 140 с.
24. Абрамовиц, М., Стиган, И., *Справочник по специальным функциям*. М.: Наука, 1979. 830 с.
25. Левич, В.Г., *Курс теоретической физики*, т. 1, М.: Физматгиз, 1969. 910 с.
26. Rayleigh, F.R.S., On the instability of jets, *Proc. London Mathem. Soc.*, 1878, vol. 10, p. 4.

27. Basset, A.B., Waves and jets in a viscous liquid, *Amer. J. Math.*, 1894, vol. 16, p. 93.
28. Weber, C., Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles, *Zeitschr. für angew. Math. und Mech.*, 1931, bd. 11, h. 3, z. 136.
29. Betchov, R., Criminale, W.O., Jr., Spatial instability of the inviscid jet and wake, *Phys. Fluids*, 1966, vol. 9, no. 2, p. 359.
30. Петрушов, Н.А., Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., Об устойчивости поверхности короткой заряженной струи, движущейся относительно внешней материальной среды, *ЖТФ.*, 2017, т. 87. № 12, с. 1794.
31. Ентов, В.М., Ярин, А.Л., Динамика свободных струй и пленок вязких и реологически сложных жидкостей, *Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа*, М: ВИНТИ, 1984, т. 17, с. 112.
32. Eggers, J., Willermaux, E., Physics of liquid jets, *Rep. Prog. Phys.*, 2008, vol. 71, p. 036601.

Summary

In a theoretical analytical way, the peculiarities of the influence of the viscosity of a liquid on its electrodispersion, from the end of the capillary, through which the liquid is supplied to the discharge system, or during the decay of a strongly charged drop, were investigated. It was shown that when a low-viscosity liquid was electrodispersed, it emitted highly charged small droplets, initially unstable with respect to its own charge, breaking up into a couple of a hundred even smaller and highly charged ones, around which a corona discharge was ignited. As a result, a fan-shaped glow appeared at the top of the meniscus of the liquid at the end of the capillary or at the top of the decaying charged drop. For a viscous fluid, a series of successive decays of charged daughter droplets were immediately interrupted due to the damping effect of viscosity after a single split in half and the formation of self-charge-resistant droplets, and no corona discharge flare was formed.

Keywords: charged meniscus, instability, fan glow, drop, charge, viscosity, jet