Распространение электрического импульса в конечном интервале идеальной электропроводности и его полное поглощение в конце интервала

И. Т. Селезов[a*], А. В. Шептилевский[b]**

[a]*Институт гидромеханики НАН Украины,*
г. Киев, 03057, Украина
[b]*Николаевский национальный аграрный университет,*
г. Николаев, 54021, Украина
[*]*e-mail:* igor.selezov@gmail.com , [**]*e-mail:* shippa76@gmail.com

Поступила в редакцию 01.03.2021
После доработки 21.04.2021
Принята к публикации 23.04.2021

Исследовано распространение электрического импульса в конечном интервале в случае, когда импульс генерируется в начале интервала и поглощается в его конце. Распространение импульса описано гиперболическим уравнением с учетом диссипации. Генерация импульса на входе задается функцией Хевисайда, а поглощение на выходе – постоянным магнитом. Такая модель описывает распространение возмущений с конечной скоростью. Приведена постановка соответствующей начально-краевой задачи, для решения которой применяется преобразование Лапласа по времени в общем случае произвольных коэффициентов. Получено аналитическое решение в пространстве изображений и представлены другие приложения с полным поглощением. Построено решение, и рассмотрен случай малой диссипации при некоторых величинах коэффициентов, характеризующих различные реальные ситуации.

Ключевые слова: распространение импульса, конечный интервал, гиперболическое уравнение, диссипация, конечная скорость, преобразование Лапласа, начально-краевая задача

УДК 537.84
https://doi.org/10.52577/eom.2021.57.5.52

ВВЕДЕНИЕ

Распространение импульса в конечном интервале и его поглощение в конце – важная теоретическая и прикладная проблема. В связи с этим представлены аналитические и численные методы исследования распространения и дифракции гидродинамических, магнитоакустических и упругих волн локальными неоднородностями в неограниченных и полуограниченных областях, как вклад в механику сплошных сред, математическую физику, прикладную и вычислительную математику [1].

Задача с поглощением моделирует дифракцию упругих волн на жесткой сфере вблизи плоской границы, на которой равны нулю касательные напряжения, а вне границы эти напряжения не равны нулю. Построены приближенные решения с применением метода изображений [2].

Оригинал из выведенного Селезовым громоздкого аналитического выражения, преобразованного по Лапласу, может быть расширен применением численного обращения. Этот метод основан на выборе корректирующего параметра, обеспечивающего точность вычислений [3].

Решение задач для гиперболического уравнения нельзя построить в общем случае, когда в уравнении учитывается член, описывающий произвольную диссипацию. Это возможно только при введении некоторых ограничений [4].

Расширение параболического оператора до гиперболического приводит к конечной скорости распространения возмущений в отличие от классического традиционного уравнения параболического типа [5].

Сингулярное вырождение уравнения Тимошенко (уточненная постановка) описывает конечность скорости распространения возмущений. Длительное время в динамической теории доминировали параболические модели, например, классическая модель Бернулли-Эйлера, не описывающая конечность скорости распространения возмущений [6].

Свободные колебания растянутых вращающихся наклонных балок рассмотрены в уточненной постановке. В этом случае основными определяются частоты и формы собственных колебаний. Влияние инерции вращения и деформации сдвига на низшую частоту очень мало. Этому вопросу посвящено много работ [7].

Распространение неустановившихся упругих волн исследовано в уточненной постановке на вязкоупругом основании. Приближенные теории бессильны представить высшие формы колебаний. Такие теории приводят к ошибке, когда высшие формы несут значительную часть полной энергии [8].

Динамическая реакция балки при ее движении изучена в уточненной постановке. Уравнение Тимошенко обеспечивает хорошее приближение к основным особенностям явления распространения волн [9]. Свободные колебания однородных балок с большой амплитудой рассмотрены в уточненной постановке. Наиболее подробно изучено распространение бегущих волн, включающее сравнение фазовых и групповых скоростей [10].

Рассмотрена в случае седиментации эволюция наносов в придонном слое с конечной скоростью на основе натурных наблюдений [11].

Распространение сигнала в нервном волокне в мозге с полным поглощением в конце интервала при синапсе исследовано с точки зрения передачи информации [12].

Изучены соотношения классической теории в произвольных криволинейных координатах и необходимые постулаты для замыкания системы. Это включает все возможные системы координат, необходимые для приложений [13].

Преобразования и аппроксимации магнитогидродинамических уравнений. При изменении параметра глубины или параметра намагниченности возможны различные существенные упрощения исходных сильно нелинейных систем уравнений и получение некоторых разрешающих уравнений [14].

Исследованы вырожденные по малым параметрам модели упругих и гидродинамических сред, существенно упрощающие математический анализ [15].

Скорости распространения сдвиговых волн в различных жидкостях и упругие модули для различных жидкостей на основе теоретического анализа и экспериментальных измерений рассмотрены в [16].

Было изучено опережение по фазе в течении мелкой воды над возмущенным дном. При уменьшении глубины с приближением к берегу набегающая волна увеличивает свой гребень [17].

Транспорт массы под стоячими волнами над наклонным дном также исследован. Благодаря экспериментам это проливает свет на влияние наклонного дна на распространение волн [18].

При генерации поверхностных гравитационных волн повторяющимися во времени донными импульсами возможны различные сценарии – увеличение или уменьшение генерации волн [19].

Исследована трансформация гидравлического прыжка –волны на мелководье. Такой вид – скачок воды при рассмотрении мелкой воды сильно деформируется и может даже разрушиться как солитон [20].

Электрический импульс (интенсивности меньше секундного), индуцирующий трансмембранное напряжение в сфероидальных клетках произвольной ориентациии рассмотрен в [21].

Сверхкороткий электрический импульс высокой интенсивности индуцирует действующее потенциальное блокирование в целых нервах животных [22].

Выявлено существенное влияние переменности волокна нерва в продольном направлении на распространение импульса. В частности, это изменяет возбуждение нерва и его блокирующий порог [23].

Неустановившееся движение реальной (вязкой сжимаемой) жидкости в круглой упругой трубе при осреднении по сечению скорости на основе метода физических гипотез и осреднений рассмотрено в [24].

Распространение нелинейных солитонных волн в путях растений также было исследовано. Дальний транспорт жидкости и нелинейные волновые процессы – основа нелинейных уравнений солитонной теории. Это сингулярно вырожденная задача сильно связанной системы двух уравнений. Математическая модель представляется в виде задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Построено аналитическое решение методом степенных рядов [25].

Аналитическое решение задачи методом степенных рядов, описывающей доставку медицинского препарата в пораженную зону, требующую лечения, дано в [26].

Цель данной работы – исследовать распространение электрического импульса в конечном интервале с поглощением в конце интервала, где расположен постоянный магнит, привести также постановку и решение начально-краевой задачи с применением преобразования Лапласа, рассмотреть много других различных приложений.

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ПОЛНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕМ, ПОСТАНОВКА

Рассматривается задача распространения электрического импульса в конечном интервале l. Электрический импульс представляет собой любое изменение электрического напряжения или силы тока и полностью поглощается постоянным магнитом. Обозначаем символом C электрический импульс, приложенный в начале левого конца интервала длины l в виде функции Хевисайда H.

Предполагается, что рассмотрение проводится в R^3 и все искомые функции гладкие, то есть принадлежат классу C^∞.

В качестве характерных величин принимаем длину l_{1q} [м], скорость $c_{lq} = \sqrt{k_q / \eta_q}$ [м^2/с] и начальное поле C_0 [кг/м^3]. С учетом этих величин вводятся безразмерные величины: длина $l^* = \frac{l}{l_{1q}}$, время $t^* = t\frac{l_{1q}}{c_{tq}}$, величина импульса $C = \frac{C}{C_0}$, коэффициент диссипации $\gamma^* = \gamma\frac{1}{p^*}$, скорость $c_t^* = \frac{c_t}{c_{lq}}$, конечная величина времени T_1^*. Безразмерные величины с учетом приведенных соотношений здесь отмечаются звездочками, которые в изложении опускаются.

Начально-краевая задача в одномерном случае для функции $C(x, t)$ формулируется для уравнения:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - \frac{1}{c_t^2}\frac{\partial^2 C}{\partial t} - \gamma\frac{\partial C}{\partial t} = 0,$$

$$x \in (0, l/c),\ t \in (0, T_1) \tag{1}$$

с граничными условиями полного поглощения:

$$C(x,t)_{x=0} = H(t), \tag{2}$$

$$C(x,t)_{x=l_1} = H(t - l_1/c_t) \tag{3}$$

и нулевыми начальными условиями для функции и ее производной по t:

$$C(x,t)_{x=0} = 0,\ C_t(x,t)_{x=0} = 0, \tag{4}$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда.

Гиперболическое уравнение (1) описывает распространение электрического импульса C с релаксацией на входе – это функция Хевисайда, на выходе – идеально проводящая среда и величина $C = 0$.

Таким образом, начально-краевая задача (1)–(4) на конечном интервале $x \in [0, l_1]$ соответствует входу в систему при $x = 0$ и дальнейшему распространению волн до конца интервала $x = l_1$, где имеет место полное поглощение. На входе $x = 0$ в начальный момент времени задается возмущение в виде функции Хевисайда, которое по мере распространения вдоль x убывает от 1 до 0. Предполагается, что в конце интервала имеется идеально проводящий экран, полностью поглощающий электрический импульс.

Приведенная система уравнений (1)–(4) принадлежит к гиперболическому типу, описывающему распространение возмущений с конечной скоростью [6].

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Для решения задачи (1)–(4) применяем преобразование Лапласа:

$$C^L(x, p) = \int_0^\infty C(x,t)\, e^{-pt} dt. \tag{5}$$

В общем случае переход в пространство лапласовых изображений (5) применением известного подхода [4] возможен только при некоторых соотношениях между коэффициентами, и приложение к практическим задачам в большинстве ситуаций не реализуется. Поэтому представляет интерес построение приближенных решений численным методом обращения преобразования Лапласа [3].

В пространстве изображений с учетом (5) и начальных условий (4) получаем из (1)–(3):

$$\frac{d^2 C^L}{dx^2} - \left(p^2 + p\gamma\right) C^L = 0, \tag{6}$$

$$C^L(x, p)_{x=0} = \frac{1}{p}. \tag{7}$$

Решение уравнения (6) запишем в виде

$$C^L(x, p) = A_1 e^{\lambda x} + A_2 e^{-\lambda x}, \tag{8}$$

где

$$\lambda = \sqrt{\left(p^2 + p\gamma\right)}, \tag{9}$$

а произвольные постоянные A_1 и A_2 определяются из граничных условий (2), (3)

$$A_1 = -\frac{1}{p}\frac{e^{-\lambda l_1} - e^{-pl_1/c_t}}{e^{\lambda l_1} - e^{-\lambda l_1}},$$

$$A_2 = \frac{1}{p}\frac{e^{\lambda l_1} - e^{-pl_1/c_t}}{e^{\lambda l_1} - e^{-\lambda l_1}}. \tag{10}$$

Решение уравнения (8) с учетом (9)–(10)

$$C^L(x, p) =$$

$$= \frac{1}{p}\left[\frac{e^{\lambda x}\left(e^{-\lambda l_1} - e^{-pl_1/c_t}\right)}{e^{\lambda l_1} - e^{-\lambda l_1}} + \frac{e^{-\lambda x}\left(e^{\lambda l_1} - e^{-pl_1/c_t}\right)}{e^{\lambda l_1} - e^{-\lambda l_1}}\right]. \tag{11}$$

Таким образом, уравнение (11) – это точное решение поставленной задачи.

ВЫВОД ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются два примера, приводящих к уравнению с диссипацией. Первый, показывающий, что это имеет место даже в случае учета вязкости. Второй – что это имеет место и в случае контакта двух сред с различными модулями упругости.

Типичный пример первого подхода – это движение жидкости в круглой упругой трубе, которое описывается уравнениями вязкой сжимаемой жидкости

$$\rho\left[\frac{\partial v}{\partial t}+\left(\vec{v}\times\vec{\nabla}\right)\vec{v}\right]=$$
$$=-\vec{\nabla}p+\mu_d\nabla^2\vec{v}+\frac{\mu_d}{3}\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\times\vec{v}\right), \qquad (12)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\left(\vec{v}\times\vec{\nabla}\right)\rho+\rho\vec{\nabla}\times\vec{v}=0 \qquad (13)$$

с соответствующими граничными условиями. Модели (12), (13) приводят к гиперболическому уравнению:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2}+2a\frac{\partial\rho}{\partial t}=c^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}, \qquad (14)$$

где a – радиус трубы; c – скорость звука; $c=\sqrt{K/\rho_0}$, K – приведенный модуль объемного сжатия жидкости с учетом упругости стенок; ρ_0 – плотность жидкости, $K=K_f\Big/\left(1+a\dfrac{K_f}{E}\right)$, K_f – модуль объемного сжатия жидкости; E – модуль Юнга стенки, скорость принимается осредненной по сечению. Уравнение (14) соответствует исходному уравнению (1).

Второй подход изложен в [16], где скорости распространения сдвиговых волн в различных жидкостях исследовались теоретически и экспериментально. При исследовании сдвиговых волн в полубесконечной области выведено уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\eta}{\rho\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad (15)$$

где λ – релаксационное время; η – упругая вязкость; ρ – плотность. Это телеграфное уравнение гиперболического типа, описывающее распространение демпфированных волн.

ПРИМЕРЫ ДРУГИХ ПРИЛОЖЕНИЙ С ПОЛНЫМ ПОГЛОЩЕНИЕ В КОНЦЕ ИНТЕРВАЛА

В дальнейшем рассматриваются различные приложения теории с полным поглощением без введения постоянного магнита в конце интервала.

Исследование распространение сигнала в нервном волокне в мозге проводилось в [12]. При передаче сигнала от одного нейрона к другому – синапсе, может иметь место нарушение прихода сигнала к другому нейрону и, как следствие, нарушение мозговой деятельности. Например, при нарушении миелиновой оболочки сильно проявляется диссипация из-за, как следствие, сигнал не приходит от одного нейрона к другому нейрону.

Аналогично, при введении инъекции сигнал распространяется до ближайшей точки позвоночника, где он полностью поглощается. Это большой коэффициент диффузии (малая диссипация) и поэтому проявляется гиперболичность. На этой основе проводилось построение аналитического решения при малых временах (больших параметрах преобразования p. Численное обращение преобразования Лапласа рассматривалось в работе, опубликованной в [3].

Аналогичная ситуация имеет место и в случае доставки медицинского препарата для лечения в пораженную зону [26]. Получено аналитическое решение сингулярно вырожденной начально-краевой задачи. Проведен анализ полученного решения с удержанием нескольких членов в степенных рядах. Точность увеличивается при применении численного анализа метода Рунге-Кутта-Фельберга.

Представлено построение обобщенной волновой гиперболической модели седиментации (динамики наносов), предсказывающей конечную скорость формирования донных наносов в отличие от традиционной модели параболического типа, предсказывающей бесконечную скорость распространения малых возмущений. Это находится в соответствии с натурными наблюдениями, из которых следует, что скорость транспорта энергии и массы вещества в прибрежной зоне есть величина конечная, как было показано Игнатовым и Робсманом (1982).

Распространение субстанции с конечной скоростью ведет свое начало от Максвелла (1867). В дальнейшем параболические модели для других сред таким же образом обобщались в гиперболические. В модели седиментации учитывалось движение частиц в придонном слое в отличие от классической параболической модели в статьях [5], [11].

Эволюция наносов на донной поверхности (седиментация) предсказывает конечность скорости седиментации. Из натурных наблюдений следует, что скорость транспорта энергии и массы вещества в прибрежной зоне – величина конечная [5]. В реальных условиях осаждение наносов на донной поверхности происходит не мгновенно, а с конечной скоростью.

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕНОГО РЕШЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ВРЕМЕНАХ

Проводится построение приближенного решения для малых времен t (больших параметров преобразования p) с удержанием членов до порядка p включительно. Рассматриваются разложения по обратным величинам параметра преобразования $\varepsilon=\dfrac{1}{p}$. В этом случае из формулы (9) получаем

$$\lambda = \sqrt{p^2 + \gamma p} = p\sqrt{1+\gamma\varepsilon}, \tag{16}$$

$$(1+\gamma\varepsilon)^{1/2} = A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \ldots = \\ = 1 + \frac{1}{2}\gamma\varepsilon + \ldots \tag{17}$$

и из (16), (17) следует, что $A_0 = 1$ при $\varepsilon = 0$. Из выражения для производной от функции (13) получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left[\left(1+\gamma\varepsilon^{1/2}\right]\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\gamma(1+\gamma\varepsilon)^{-1/2} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2}\gamma. \tag{18}$$

Из (16)–(18) можно определить все коэффициенты и разложения в ряды. Из проведенного анализа следует, что при малых γ, то есть при $\frac{\gamma}{p} << 1$, имеем гиперболичность. Из вычислений следует, что величина функции Хевисайда убывает по мере распространения, и тем быстрее, чем больше диссипация.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведена постановка начально-краевой задачи полного поглощения электрического импульса при его поглощении магнитом в конце интервала. Представлено применение преобразования Лапласа для решения задачи. Построено решение при малых временах в виде разложения по обратным степеням параметра преобразования Лапласа. Дан анализ других различных моделей при полном поглощении в конце интервала.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Selezov, I.T., Kryvonos, Yu.G., Gandzha, I.S., Wave propagation and diffraction. Mathematical methods and applications, In Series: Foundations of Engineering Mechanics, Springer, 2018, 237 p. doi 10.1007/978-981-10-4923-1.

2. Khimich, A.N., Selezov, I.T., Sydoruk, V.A., Simulation of elastic wave diffraction by a sphere in semibounded region, *Reports NAS Ukr.*, 2020, no. 10, p. 22.

3. Selezov, I., Some application of numerical inversion of Laplace transform in problems of propagation of oscillations, *Visnyk of Zaporzhzzha National University. Physical and Mathematical Sciences*, 2018, no. 2, p. 124.

4. Диткин, В.А., Прудников, А.П., *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, М.: ГИФМЛ, 1961, 524 с.

5. Селезов, И.Т., Кривонос, Ю.Г., *Волновые гиперболические модели распространения возмущений*, Киев, Наукова думка, 2015, 172 с.

6. Selezov, I.T., Timoshenko equation of hyperbolic type and basic singularities, *Information systems, mechanics and control*, 2020, no. 22, p. 81.

7. Jing, L.S., Lia, S.J., Free vibration of an extensible rotating inclined Timoshenko beam, *J. Sound Vib.*, 2007, vol. 304, no. 3–5, p. 606.

8. Lin, T., Li, Q., Transient elastic wave propagation in an infinite Timoshenko beam on viscoelastic foundation, *Int. J. Solids Struct.*, 2003, vol. 40, no. 13–14, p. 3211.

9. Sniady, P., Dynamic response of Timoshenko beam to a moving force, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 2008, vol. 75, no. 2, p. 024503/1.

10. Rao, R.G., Meera, S.K., Large-amplitude free vibrations of uniform Timoshenko beams. A novel formulation, *AIAA*, 2007, vol. 45, no. 11, p. 2810.

11. Selezov, I., Extended models of sedimentation in coastal zone, *Vib. Phys. Syst.*, 2014, vol. 26, p. 243.

12. Selezov, I.T., Mathematical modeling and physiological aspects, In book: Selezov, I.T., Bersenev, V.A., *Neurometamerism. Mathematical modeling and physiological aspects*, Kiev: SMP "AVERS", 2009, pp. 3–78.

13. Eringen, A.C., *Nonlocal continuum field theories*, Springer Verlag New York, Inc, 2002.

14. Selezov, I.T., On some transformations and approximations of magnetohydrodynamic equations, *Int. J. Fluid Mech. Res.*, 2010, vol. 37, no. 4, p. 382.

15. Selezov, I.T., Some degenerate and generalized wave models in elasto- and hydrodynamics, *J. Appl. Math. Mech.*, 2003, vol. 67, no. 6, p. 871.

16. Joseph, D.D., Riccius, O., Arney, M., Shear-wave speeds and elastic moduli for different liquids. Part1. Theory, *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 171, p. 289.

17. Luchini, P., Charru, F., The phase lead of shear stress in shallow-water flow over a perturbed bottom, *J. Fluid Mech.*, 2010, vol. 665, p. 516.

18. Scandura, P., Foti, E., Faraci, C., Mass transport under standing waves over a sloping beach, *J. Fluid Mech.*, 2012, vol. 701, p. 460.

19. Selezov, I.T., Kuznetsov, V.N., Chernikov, D.O., Generation of surface gravity waves by bottom time-repetitive pulses, *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 171, no. 5, p. 596.

20. El, G.A., Grimshaw, R.H.J., Tiong, W.K., Transformation of a shoaling undular bore, *J. Fluid Mech.*, 2012, vol. 709, p. 371.

21. Hu, Q., Joshi, R.P., Analysis of intense, subnanosecond electrical pulse-induced transmembrane voltage in spheroidal cells with

arbitrary orientation, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 2009, vol. 56, no. 6, p. 1617.

22. Joshi, R.P., Mishra, A., Song, J., Pakhomov, A.G., et al., Simulation studies of ultrashot, high-intensity electric pulse induced action potential block in whole – animal nerves, *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 2008, vol. 55, no. 4, p. 1391.
23. Voskoboinik, V., Struijk, J.J., Rijkhoff, N.J.M., Influence of variable nerve fibre geometry on the excitation and blocking threshold. A simulation study, *Med. Biol. Eng. Comput.*, 2005, vol. 43, p. 365.
24. Чарный, И.М., Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах, М.: *Недры*, 1975, 296 с.
25. Селезов, И.Т., Кизилова, Н.Н., Дальний транспорт жидкости и волновые процессы в проводящих путях растений, В: *Современные проблемы математики, механики и информатики*, Харьков: Апостроф, 2011, с. 201–217.
26. Gulko, N.G., Selezov, I.T., Volynsky, R.I., Mathematical study of medicine propagation in biological tissue and some of its applications, *J. Appl. Math. Phys.*, 2020, vol. 9, no. 1, p. 127.

Summary

The propagation of an electric pulse in a finite interval is investigated in the case when the pulse is generated at the input of the interval and absorbed at the end of the interval. The pulse propagation is described by a hyperbolic equation with regard for dissipation. The pulse generation at the input is specified as a Heaviside function, and the absorption at the output is set by a permanent magnet. The model describes the propagation of disturbances with a finite speed. A formulation of the corresponding initial boundary value problem is given, for the solution of which the Laplace transform in time is applied in the case of arbitrary coefficients. An exact analytical solution in the Laplace image space was obtained, and other applications with the complete absorption are presented. A general solution is constructed, and the case of low dissipation is considered for some values of the coefficients characterizing real situations.

Keywords: pulse propagation, finite interval, hyperbolic equation, dissipation, finite velocity, Laplace transform, initial boundary value problem