

# Сравнительный анализ методов математического моделирования удельной электропроводности плазмы в канале электрического разряда в воде

**В. М. Косенков**

*Институт импульсных процессов и технологий НАН Украины,  
г. Николаев, 54018, Украина, e-mail: [v.m.kosenkov@gmail.com](mailto:v.m.kosenkov@gmail.com)*

Поступила в редакцию 26.11.2020

После доработки 14.12.2020

Принята к публикации 15.12.2020

Выполнен сравнительный анализ трех методов определения удельной электропроводности плазмы, образующейся в канале электрического разряда в воде, для его математического моделирования. Определены параметры эмпирической функции, при которых результаты математического моделирования согласуются с данными экспериментов. Обоснована необходимость использования эмпирических функций при вычислении удельной электропроводности плазмы. Полученные соотношения позволили существенно повысить адекватность разработанной ранее математической модели физическим процессам разряда в воде и расширить диапазон параметров, в котором ее можно использовать.

*Ключевые слова:* электрический разряд в воде, удельная электропроводность плазмы, форма канала разряда, сопротивление канала разряда, математическое моделирование

УДК 537.528:519.6:621.314

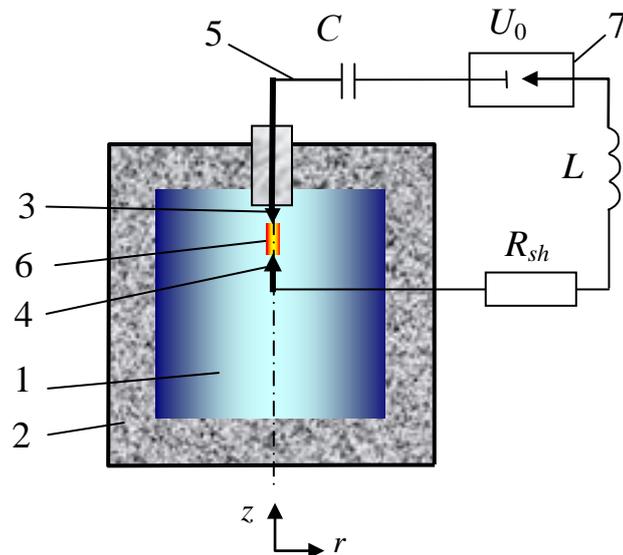
<https://doi.org/10.52577/eom.2021.57.4.24>

## ВВЕДЕНИЕ

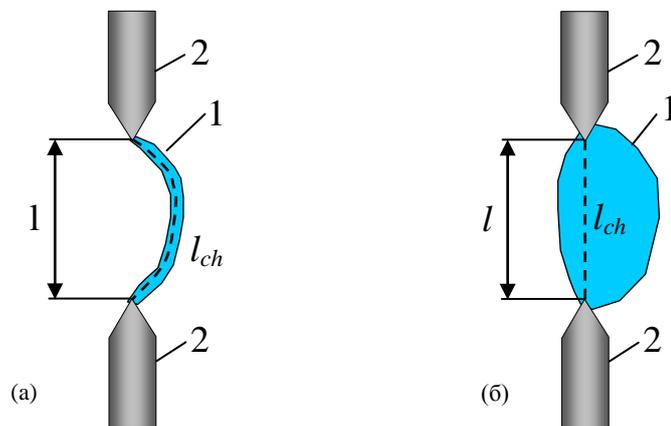
Электрический разряд в воде находит широкое применение в различных областях науки и техники [1]. Однако многие его характеристики по-прежнему остаются недостаточно исследованными. Это связано с проблемами их определения, обусловленными кратковременностью происходящих явлений, высоким давлением и температурой, а также мощным электромагнитным импульсом, создающим большие помехи в измерительных приборах. Математическое моделирование электрического разряда в воде позволяет исследовать процессы, происходящие в канале разряда, и восполнить пробелы экспериментальных исследований, но требует использования ряда замыкающих физических соотношений. Из них наиболее проблематично определение электропроводности плазмы, заполняющей канал разряда. Электрическое сопротивление канала можно определить по осциллограммам напряжения и силы тока, однако для вычисления электропроводности плазмы необходимо измерить изменение объема и площади поперечного сечения канала в процессе его расширения, что, как правило, составляет большую проблему.

Существует несколько методов вычисления электропроводности плазмы и электрического сопротивления канала разряда в воде [2–10]. В большинстве исследований активное сопротивление канала разряда вычисляют как сопротивление проводника с током, используя эмпирические функции от силы тока и времени [2]. В этом случае нет необходимости вычислять

электропроводность плазмы и площадь поперечного сечения канала разряда, но такой подход к моделированию ограничен диапазоном экспериментальных данных, на основе которых эмпирические функции определены. В других исследованиях полагают, что средняя по сечению канала электропроводность плазмы пропорциональна плотности ее внутренней энергии [3–5]. Связь между ними определяют с помощью эмпирической функции, называемой искровой характеристикой, определение которой также проблематично, поэтому используют ее среднее значение, называемое искровой постоянной. В этом случае увеличивается универсальность полученных соотношений, однако достоверность вычисления удельной электропроводности и сопротивления канала разряда ограничивается четвертью периода колебаний тока в цепи. В работах [6–8, 10] используют характеристики плазмы для определения ее электропроводности и сопротивления канала разряда. При этом предполагают, что свойства плазмы однородны в объеме канала. Полученные результаты имеют оценочный характер, и такой подход не получил большого применения в практике моделирования электрического разряда в воде. В работе [9] учитывается радиальная неоднородность плазмы в канале разряда при использовании широкодиапазонного уравнения состояния воды [11–13] и зависимости удельной электропроводности плазмы от ее плотности и температуры [8], но при этом не учитываются неоднородность плазмы и изменение площади поперечного сечения канала разряда вдоль его оси.



**Рис. 1.** Схема моделируемой системы: 1 – полость разрядной камеры, заполненная водой; 2 – корпус разрядной камеры; 3 – высоковольтный электрод; 4 – низковольтный электрод; 5 – разрядный контур; 6 – канал разряда; 7 – воздушный разрядник;  $C$  – емкость конденсаторной батареи;  $U_0$  – напряжение заряда конденсаторной батареи;  $L$  – индуктивность разрядного контура;  $R_{sh}$  – сопротивление элементов разрядного контура (без канала разряда).



**Рис. 2.** Форма канала в начале (а) и на развитой стадии разряда в воде (б): 1 – форма профиля канала в плоскости оси электродов; 2 – электроды;  $l$  – расстояние между электродами;  $l_{ch}$  – длина кратчайшего пути движения электронов в канале (штриховая линия).

Отмеченные недостатки предыдущих исследований свидетельствуют об актуальности дальнейшего совершенствования математической модели электрического разряда в воде. Поэтому цель данной работы – выполнение сравнительного анализа трех методов определения удельной электропроводности плазмы, образующейся в канале электрического разряда в воде, для его математического моделирования.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для исследования использовали математическую модель электрического разряда в воде [5, 10], в которой учтены процессы в разрядном контуре, канале разряда и окружающей его жидкости, заполняющей замкнутую разрядную камеру цилиндрической формы (рис. 1). В предлагаемой работе модель [5, 10] дополнена соотношениями, позволяющими существенно

повысить точность вычисления сопротивления канала разряда после первой четверти периода колебания тока в разрядной цепи, применяя три метода определения удельной электропроводности плазмы.

В основе вычисления активного сопротивления канала разряда использовали формулу для сопротивления линейного проводника:

$$R_{ch} = \frac{l_{ch}}{\sigma_{ch} \times S_{ch}}, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ch}$  – удельная электропроводность плазмы в канале разряда, См/м;  $S_{ch}$  – площадь поперечного сечения канала разряда, м<sup>2</sup>;  $l_{ch} = A_{ch} \times l$  – длина канала разряда, м;  $l$  – расстояние между электродами, м;  $A_{ch}$  – коэффициент, учитывающий отличие длины канала разряда от расстояния между электродами [14]. Если разряд

инициировать прямолинейным микропроводником, тогда  $A_{ch} = 1$ .

Форма канала в начале разряда, инициируемого высоковольтным пробоем слоя воды между электродами, определяется формой лидера, замыкающего электроды, которая существенно отличается от прямолинейной, и его диаметр намного меньше, чем длина. Среднестатистическая длина лидера больше расстояния между электродами в 2 раза [3] ( $A_{ch} = 2$ ). Однако величина  $A_{ch}$  изменяется в процессе расширения канала. Это можно объяснить следующими причинами. В процессе расширения канала его диаметр увеличивается, и поток электронов получает возможность перемещения по более короткому пути между электродами (рис. 2), который приближается к минимальному расстоянию между ними, равному  $l$ . То есть в процессе разряда  $A_{ch}$  изменяется от 2 до 1. Ее изменение приближенно определим по формуле:

$$A_{ch} = \begin{cases} 2(1 - 0,75 \times R_c^* / l), & \text{если } 0,75 \times R_c^* / l < 1/2; \\ 1, & \text{если } 0,75 \times R_c^* / l \geq 1/2, \end{cases} \quad (2)$$

где  $R_c^* = \sqrt{V_c / (\pi \times l)}$  – эквивалентный по объему радиус канала разряда, м;  $V_c$  – объем канала разряда, м<sup>3</sup>.

Учитывая зависимость (2), будем считать, что в начале активной стадии разряда канал имеет форму прямого кругового цилиндра длиной  $l$  и радиусом  $R_0$ , который, по данным экспериментов, изменяется в пределах от 0,1 до 0,5 мм [3, 7, 14]. Выбор приближенной величины  $R_0$  в указанных пределах не имеет принципиального влияния на результат моделирования электрического разряда в воде приблизительно через 10 мкс после его начала, так как параметры плазмы в канале разряда согласуются со скоростью расширения канала и решение данной задачи обладает свойствами автономности [7].

Допущение о постоянстве  $S_{ch}$  вдоль канала справедливо только в начале активной стадии разряда или когда он происходит в результате инициирования разряда микропроводником между электродами с плоскими торцами большого диаметра. В остальных случаях это предположение неоправданно, так как канал разряда неравномерно расширяется по длине, что приводит к существенному изменению его формы и соответственно  $S_{ch}$  [5]. В этом случае сопротивление канала можно определить как сумму сопротивлений последовательно соединенных проводников бесконечно малой длины ( $dz$ ) и ( $l$ ) преобразуется к виду:

$$R_{ch} = \int_0^{l_{ch}} \frac{dz}{\sigma_{ch}(z) \times S_{ch}(z)}, \quad (3)$$

а  $\sigma_{ch}$  и  $S_{ch}$  будут функциями от координаты вдоль оси канала ( $z$ ) в каждый момент времени ( $t$ ).

Скорость звука в плазме, заполняющей канал разряда, приблизительно в 3 раза превышает скорость звука в воде, следовательно, выравнивание ее характеристик в объеме канала происходит намного быстрее, чем в окружающей жидкости, поэтому используем гипотезу об их однородном распределении [7]. Тогда можно считать, что  $\sigma_{ch}$  одинакова во всем объеме канала и изменяется только во времени. С учетом этого допущения формула (3) принимает вид:

$$R_{ch} = \frac{1}{\sigma_{ch}} \int_0^{l_{ch}} \frac{dz}{S_{ch}(z)}. \quad (4)$$

Рассмотрим три известных метода определения удельной электропроводности плазмы в канале электрического разряда в воде.

*Метод 1.*

Удельную электропроводность плотной неидеальной плазмы можно определить по формуле, полученной на основе приближенного решения кинетического уравнения Больцмана [15]:

$$\sigma_{ch} = f_{\sigma} \times \frac{\pi^{1/2} \times e^2 \times n_e}{(8 \times m_e \times k \times T)^{1/2}} \times \frac{\alpha(\gamma)}{n_e \times Q_i + (n_0 - n_e) \times (Q_{eO} + 2 \times Q_{eH}) / 3} \quad (5)$$

и дополненной нами эмпирической функцией, полученной в результате согласования расчетных и экспериментальных данных:

$$f_{\sigma} = a \times [b + (n_e / n_0)^c], \quad (6)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – эмпирические коэффициенты;  $T$  – температура плазмы, К;  $n_e$  – концентрация электронов, 1/м<sup>3</sup>,  $n_0$  – концентрация атомов и ионов (тяжелых частиц) в канале разряда, 1/м<sup>3</sup>;  $k = 1,38064852 \times 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана;  $e = 1,60217662 \times 10^{-19}$  Кл – заряд электрона;  $m_e = 9,10938356 \times 10^{-31}$  кг – масса электрона;  $Q_{eO}$  – эффективное сечение рассеяния электрона на атоме кислорода, м<sup>2</sup>;  $Q_{eH}$  – эффективное сечение рассеяния электрона на атоме водорода, м<sup>2</sup>;  $Q_i$  – эффективное сечение рассеяния электрона на однозарядных ионах, м<sup>2</sup>;

$$\alpha(\lambda) = \begin{cases} 1,13 + 0,05 \times \lambda \times \exp(-0,02 \times \lambda), & \text{если } \lambda \in [0; 30) \\ 1,95, & \text{если } \lambda \geq 30 \end{cases} \quad (7)$$

$$\lambda = n_e \times Q_i / [(n_0 - n_e) \times (Q_{eO} + 2 \times Q_{eH}) / 3]. \quad (8)$$

Величина  $Q_i$  может быть определена по формуле [15]:

$$Q_i = \frac{2,02 \times 10^{-9}}{T^2} \lg \left( \frac{42500 \times T}{n_e^{1/3}} \right), \quad (9)$$

а  $Q_{e0}$  и  $Q_{eH}$  – по формуле [16]:

$$Q_{eZ} = \pi \times a^2 \left( \frac{1}{4 \times \pi \times \epsilon_0} \right)^2 \times \frac{Z^2 \times e^4}{(2 \times u \times \hbar)^2} \frac{1}{1 + (\hbar / 2 \times m_e \times u \times a)^2}, \quad (10)$$

где  $a = a_0$  – радиус атома водорода, м;  $a_0 = 0,528 \times 10^{-10}$  м – борковский радиус;  $a = 0,48 \times 10^{-10}$  м – радиус атома кислорода;  $Z$  – атомный номер элемента;  $\epsilon_0 = 8,85418782 \times 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная;  $\hbar = 1,0545718 \times 10^{-34}$  Дж·с – редуцированная постоянная Планка;  $u = \sqrt{3 \times k \times T / m_e}$  – средняя скорость атома, м/с.

*Метод 2.*

В работе [17] получены зависимости удельной электропроводности водородно-кислородной плазмы от температуры и давления, представленные в табличной форме. Они были аппроксимированы в [18] с погрешностью 20% в интервале температур от  $10^3$  до  $10^5$  К и давления от  $10^5$  до  $10^{10}$  Па в виде:

$$\sigma_{ch} = f_\sigma \times \frac{3 \times 10^4 \times T_e^{1,5} \times p_e^{0,2}}{10^3 \times T_e^{0,5} + p_e^{0,6} \times \exp(7,1 / T_e)}, \quad (11)$$

где  $T_e = T \times 10^{-4}$ ;  $p_e = p_{ch} \times 10^{-5}$ ;  $p_{ch}$  – давление плазмы в канале разряда, Па.

В работе [19] принято, что  $f_\sigma = 1$ . Свойства плазмы в канале разряда в воде близки к идеальному газу [13, 17, 18], уравнение состояния которого:

$$p_{ch} = (n_0 + n_e) \times k \times T. \quad (12)$$

В отличие от (6) формула (11) содержит меньше приближенных функций, вносящих дополнительную погрешность в вычисление удельной электропроводности плазмы по формуле (6). Чтобы использовать эти формулы, необходимо определить концентрации частиц в плазме.

*Метод 3.*

Еще один метод определения удельной электропроводности водородно-кислородной плазмы в канале разряда описан в [3]. В его основе лежит связь между плотностью внутренней энергии плазмы и ее удельной электропроводностью:

$$w_{ch} = A \times \sigma_{ch}, \quad (13)$$

а также между плотностью внутренней энергии плазмы и плотностью внутренней энергии идеального газа:

$$w_{ch} = \frac{P_{ch}}{\gamma - 1}. \quad (14)$$

Из равенства соотношений (13) и (14) следует:

$$\sigma_{ch} = f_\sigma \times \frac{P_{ch}}{A \times (\gamma - 1)}, \quad (15)$$

где  $A$  – искровая характеристика,  $V^2 \cdot c / m^2$ ; в работе [3]  $f_\sigma = 1$ .

Для определения  $A$  предложен итерационный метод [3] на основе уравнения баланса энергии в канале разряда (рис. 1), который можно использовать в процессе моделирования электрического разряда в воде. В среднем за период колебания силы тока  $A = 0,25 \times 10^5$   $V^2 \cdot c / m^2$ , если разряд инициируется микропроводником, и  $A = 10^5$   $V^2 \cdot c / m^2$  при инициировании высоковольтным пробоем слоя воды между электродами [3]. В формуле (4) учитывается изменение длины канала разряда  $l_{ch}$  в зависимости от способа его инициирования, поэтому в формуле (15) нужно принимать  $A = 0,25 \times 10^5$   $V^2 \cdot c / m^2$ .

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Для вычисления удельной электропроводности плазмы по формулам (5), (11) или (15) необходимо определить концентрации тяжелых частиц и электронов.

Поток энергии, излучаемой из канала разряда на его поверхность, которую можно считать абсолютно черной [7], обеспечивает поступление молекул воды в объем канала. Плазму канала разряда и окружающую его воду разделяет тонкий переходный слой, в котором происходят испарение молекул воды, их диссоциация на атомы водорода и кислорода, ионизация атомов, а также сообщение полученным частицам кинетической энергии. На эти процессы расходуется излучаемая плазмой энергия [7]. На испарение одной молекулы воды необходима энергия  $D_{ev} = 0,8 \times 10^{-19}$  Дж. Диссоциация молекулы воды на атомы водорода и кислорода требует энергии  $D_m = 16 \times 10^{-19}$  Дж. Энергии однократной ионизации атома кислорода и водорода мало отличаются. Энергия ионизации атома водорода  $\epsilon_i = 21,7 \times 10^{-19}$  Дж, а атома кислорода –  $21,81924 \times 10^{-19}$  Дж, и поэтому можно принять  $\epsilon_i = 21,77 \times 10^{-19}$  Дж. Кинетическая энергия поступательного движения одной частицы плазмы  $e_k = 3 \times k \times T / 2$ .

Скорость потока частиц с поверхности канала разряда в его объем пропорциональна мощности

излучения энергии из канала разряда на его поверхность:

$$N_i = \sigma_{SB} \times T^4 \times S_c \quad (16)$$

и обратно пропорциональна затратам энергии на одну частицу плазмы (энергетическая цена частицы):

$$D = (D_{ev} + D_m) / 3 + d_i \times \varepsilon_i + (1 + d_i) \times 3 \times k \times T / 2, \quad (17)$$

и определяется уравнением [7]:

$$\frac{d(n_0 \times V_c)}{dt} = \frac{N_i}{D}, \quad (18)$$

где  $t$  – время, с;  $\sigma_{SB} = 5,670373 \times 10^{-8}$  Вт·м<sup>-2</sup>·К<sup>-4</sup> – постоянная Стефана–Больцмана;  $S_c$  – площадь поверхности канала, разделяющей плазму и воду, м<sup>2</sup>;  $d_i = n_e/n_0$  – степень ионизации плазмы.

В уравнении (18) не учитывается излучение энергии из канала разряда в жидкость через его поверхность. В начале разряда это допущение оправдано, однако с течением времени оптическая прозрачность плазмы в канале разряда увеличивается, и часть энергии излучается из канала. Излучение энергии из канала зависит от соотношения между радиусом канала и росселандовым пробегом излучения в плазме.

Для учета излучения будем считать, что в момент времени  $t$  канал разряда, а после ввода энергии парогазовая полость, имеют форму прямого кругового цилиндра длиной  $l_{ch}$  и радиусом  $R_{cs}$ , который равен среднему интегральному радиусу поверхности канала разряда по его длине. Объем этого цилиндра ( $V_{cs}$ ) равен объему канала разряда  $V_c$ , а  $R_{cs} = R_c^*$ :

$$V_{cs} = \pi \times R_{cs}^2 \times l_{ch}. \quad (19)$$

Часть  $V_{cs}$  в процессе разряда и после его завершения становится прозрачной вблизи поверхности раздела плазмы и воды, что подтверждается оптическими методами регистрации расширения канала разряда [7]. Толщина прозрачного слоя плазмы вблизи поверхности канала разряда равна среднему росселандовому пробегу излучения в плазме канала разряда [7, 14]:

$$l_r = 9 \times 10^{10} \times T^2 \times \exp[\varepsilon_i / (k \times T)] / n_0, \quad (20)$$

тогда объем оптически прозрачной части цилиндра

$$V_{ros} = \pi \times l_{ch} \times l_r \times (2 \times R_{cs} - l_r). \quad (21)$$

Можно предположить, что из объема  $V_{ros}$  энергия свободно излучается через поверхность канала в окружающее пространство, тогда

мощность энергии ( $N$ ), вводимой в канал разряда из разрядного контура, уменьшается пропорционально  $V_{ros}$ :

$$N = i^2 \times R_{ch} - N_i \times V_{ros} / V_{cs}, \quad (22)$$

где  $i$  – сила тока в разрядной цепи, А; если  $V_{ros} > V_{cs}$ , тогда  $V_{ros} = V_{cs}$ .

При этом поверхность, с которой плазма излучает энергию на  $S_c$ , удаляется от границы канала на расстояние  $l_r$ , и ее площадь излучения ( $S_i$ ) становится меньше площади поверхности канала разряда  $S_c$  обратно пропорционально расстоянию  $l_r$ . В результате этого мощность энергии ( $N_a$ ), поглощаемой поверхностью канала площадью  $S_c$ , также уменьшится обратно пропорционально расстоянию  $l_r$ :

$$N_a = N_i \times (1 - l_r / R_{cs}). \quad (23)$$

Если  $l_r > R_{cs}$ , тогда  $l_r = R_{cs}$ .

С учетом (23) уравнение (18) преобразуется к виду:

$$\frac{d(n_0 \times V_c)}{dt} = \frac{N_a}{D}, \quad (24)$$

Концентрацию электронов в условиях ионизационного равновесия в плазме, заполняющей канал разряда в воде, можно определить с помощью уравнения Саха, которое при однократной ионизации атомов упрощается к виду [7, 19]:

$$\frac{n_e^2}{n_0 - n_e} = \frac{2}{\Lambda^3} \frac{g_1}{g_0} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{k \times T}\right) = 2 \times K_e, \quad (25)$$

где  $\Lambda$  – длина волны де Бройля, м:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2\pi \times m_e \times k \times T}}; \quad (26)$$

$m_e = 9,10938356 \times 10^{-31}$  кг – масса электрона;  $h = 6,62606 \times 10^{-34}$  Дж·с – постоянная Планка;  $g_1$  – статистический вес иона при однократной ионизации атома;  $g_0$  – статистический вес атома. Отношение  $g_1/g_0$  для кислородно-водородной плазмы, образовавшейся в результате электрического разряда в воде, определено в работе [8]:

$$\frac{g_1}{g_0} = \frac{2 \times g_{aH} / g_{iH} + g_{aO} / g_{iO}}{3}, \quad (27)$$

где  $g_{aH} = 2$ ;  $g_{iH} = 1$ ;

$$g_{aO} = 7,66 + 2,3 \times 10^{-4} \times T - 0,429 \times 10^{-8} \times T^2 + 0,0188 \times 10^{-12} \times T^3; \quad (28)$$

$$g_{iO} = 1,92 + 2,15 \times 10^{-4} \times T - 0,08 \times 10^{-8} \times T^2 + 0,82 \times 10^{-12} \times T^3. \quad (29)$$

Давление в канале разряда можно определить из уравнения баланса энергии, в котором учитывается изменение внутренней энергии плазмы, работа расширения канала разряда и мощности джоулева нагрева плазмы от протекающего в канале электрического тока [5, 7, 14]:

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{d}{dt} (p_{ch} V_c) + p_{ch} \frac{dV_c}{dt} = i^2 R_{ch} - N_i \times V_{ros} / V_{cs}, \quad (30)$$

где  $\gamma = 1,26$  – эффективный показатель адиабаты плазмы, образовавшейся при разрядах в воде [5, 14].

В уравнении (30) мощность нагрева плазмы уменьшена на величину потерь энергии в результате ее излучения из канала разряда, которая определена в данной работе по формуле (22).

Изменение силы тока в разрядной цепи определяется уравнением баланса напряжений [5, 14], полученным по схеме замещения (рис. 1):

$$L \frac{di}{dt} + (R_{ch} + R_{sh}) \times i + \frac{1}{C} \int i dt = U_0. \quad (31)$$

где  $L$  – индуктивность контура, Гн;  $R_{ch}$ ,  $R_{sh}$  – соответственно сопротивление канала разряда и сопротивление остальных элементов разрядного контура, Ом;  $C$  – емкость конденсаторной батареи, Ф;  $t$  – время, с;  $U_0$  – напряжение заряда конденсаторной батареи, В.

Чтобы определить геометрические характеристики канала разряда  $V_c$ ,  $S_c$  и  $S_{ch}$ , нужно вычислить изменение его радиуса ( $R_c$ ) как функцию переменных  $t$  и  $z$  в процессе протекания электрического тока. Для этого необходимо моделировать процесс расширения канала разряда в воде, заполняющей разрядную камеру.

В результате анализа существующих математических моделей гидродинамических процессов в разрядной камере выбрана модель, в которой используют предположение о потенциальном безвихревом движении идеальной жидкости [5]. Гидродинамическая модель включает в себя двумерное нелинейное волновое уравнение гиперболического типа в частных производных. Для принятых допущений волновое уравнение в цилиндрической системе координат имеет вид [5]:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c_f^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right], \quad (32)$$

где  $\Psi$  – потенциал скорости жидкости, м<sup>2</sup>/с;  $c_f$  – скорость звука в жидкости, м/с;  $r$ ,  $z$  – пространственные координаты (рис. 1), м.

Скорость звука в жидкости определяли по формуле [5]:

$$c_f^2 = c_0^2 - (\chi - 1) \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2} (\chi + 1) \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (33)$$

где  $c_0$  – скорость звука в невозмущенной жидкости, м/с;  $\chi$  – эмпирический коэффициент, равный 7,15 для воды.

Давление жидкости определяли с помощью линейного интеграла Коши-Лагранжа:

$$P = P_0 - \rho_f \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (34)$$

где  $\rho_f$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $P_0$  – начальное давление в разрядной камере, Па.

Составляющие вектора скорости жидкости и границы канала разряда вычисляли по градиенту потенциала:

$$W_r = \frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad (35)$$

$$W_z = \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (36)$$

Для расчета гидродинамических процессов в канале разряда использовали уравнение Лапласа:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0. \quad (37)$$

Оно получено как частный случай уравнения (32), учитывая, что скорость звука в плазме, заполняющей канал разряда, намного больше, чем в воде [20].

В начальный момент времени (начало активной стадии разряда) считали, что жидкость находится в невозмущенном состоянии, поэтому потенциал  $\Psi$  равен нулю. Начальное давление в канале принимали равным  $P_{ch0}$  (больше  $P_0$ ), тогда граница канала движется с начальной скоростью  $U_{ch0} = P_{ch0} / (\rho_f \times c_0)$  в результате расширения лидера. Конденсаторная батарея заряжена до напряжения  $U_0$ . Начальную силу тока в цепи определяли по закону Ома, используя сопротивление  $R_{sh}$  и вычисляя  $R_{ch}$  по формулам (4) и (15) с учетом заданных  $R_0$  и начальной температуры плазмы ( $T_0$ ).

На границе раздела двух сред значение потенциала находили из условия, что стенка камеры абсолютно жесткая. Поэтому производная  $\Psi$  по вектору нормали к поверхности стенки ( $\vec{n}$ ) равна нулю:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} = 0. \quad (38)$$

На границе канала разряда использовали условия на контактном разрыве [21]:

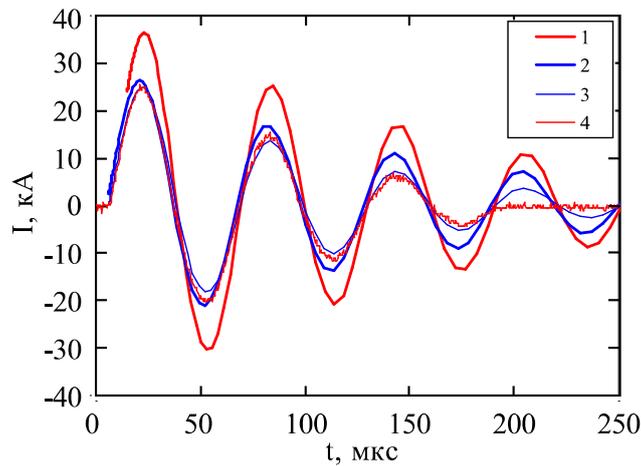


Рис. 3. Сила тока в канале электрического разряда в воде: 1 – метод 1; 2 – метод 2; 3 – метод 3; 4 – эксперимент.

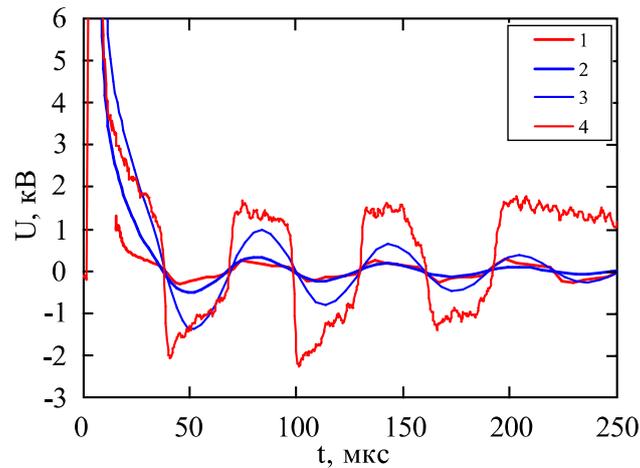


Рис. 4. Напряжение на канале электрического разряда в воде: 1 – метод 1; 2 – метод 2; 3 – метод 3; 4 – эксперимент.

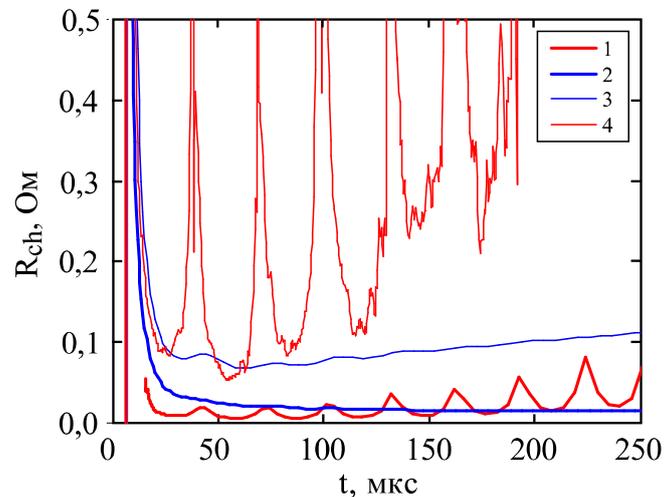


Рис. 5. Сопротивление канала электрического разряда в воде: 1 – метод 1; 2 – метод 2; 3 – метод 3; 4 – эксперимент.

$$U_{ch} = U_f, \quad (39)$$

$$P_{ch} = P_f, \quad (40)$$

где  $U_f$  – скорость жидкости на границе канала, м/с;  $P_f$  – давление жидкости на границе канала, Па.

Дифференциальные уравнения (24), (30), (31), (32) и (37) решали численно с помощью двухшагового метода Эйлера-Коши, используя при этом уравнения (2), (4), (5), (11), (12), (15) и (25). Дискретизацию частных производных в уравнении

гидродинамики (32) выполняли по схеме «крест», а затем решали полученную систему уравнений по двухшаговому методу Эйлера-Коши. Подробное описание метода решения системы уравнений и алгоритма приведено в работах [5, 10].

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Сравнение методов определения удельной электропроводности плазмы в канале электрического разряда в воде произвели на основе

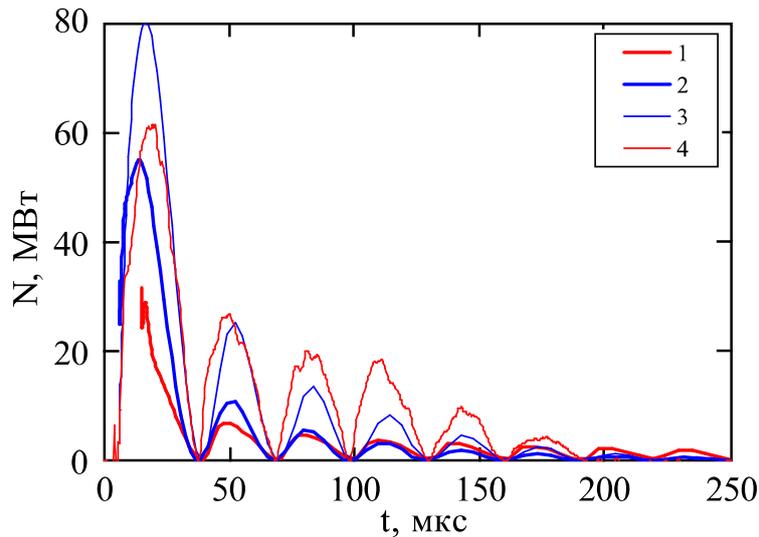


Рис. 6. Мощность ввода энергии в канал электрического разряда в воде: 1 – метод 1; 2 – метод 2; 3 – метод 3; 4 – эксперимент.

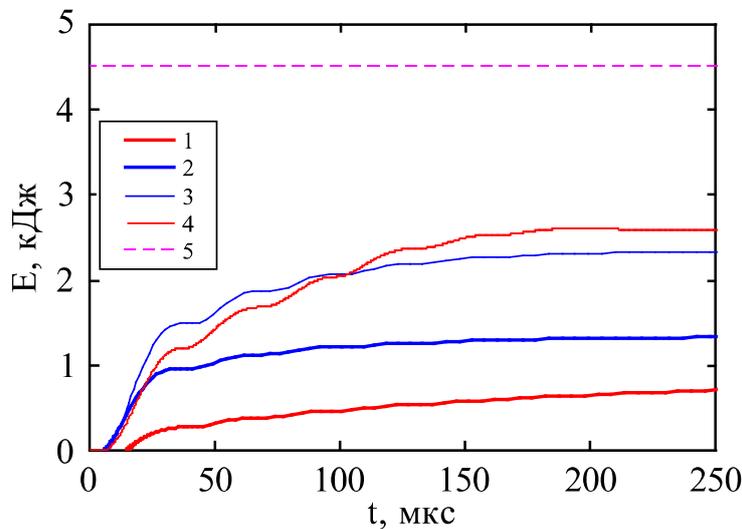


Рис. 7. Энергия в канале электрического разряда в воде: 1 – метод 1; 2 – метод 2; 3 – метод 3; 4 – эксперимент; 5 – энергия, запасаемая в конденсаторной батарее.

результатов физического эксперимента, проведенного в процессе выполнения данной работы. Емкость конденсаторной батареи ( $C$ ) была равна 10 мкФ, индуктивность разрядной цепи ( $L$ ) – 9,3 мкГн, напряжение заряда батареи ( $U_0$ ) – 30 кВ, активное сопротивление элементов разрядного контура без канала разряда ( $R_{sh}$ ) – 0,09 Ом, расстояние между электродами ( $l$ ) – 30 мм. Инициирование разряда выполняли пробоем слоя воды между электродами после приложения к ним разности потенциалов  $U_0$ . Высота полости камеры, заполненной водой, составляла 240 мм, ее радиус – 140 мм. Радиусы электродов – 8 мм. Длина высоковольтного электрода 90 мм, а низковольтного – 38 мм. Электрические и энергетические характеристики разряда при этих параметрах определены в данной работе экспериментально.

Характеристики разряда в воде, полученные тремя методами определения удельной электропроводности плазмы, при условии, что эмпири-

ческая функция  $f_e$  равна 1, приведены на рис. 3–7. При этом условии они плохо согласуются с данными эксперимента. Вычисление удельной электропроводности плазмы по методу 3 позволяет определить изменения силы тока, напряжения и сопротивления канала разряда, близкие к экспериментальным данным в первый период изменения силы тока (рис. 3–5), но в последующие периоды колебаний электрических характеристик он дает существенно заниженные величины сопротивления канала разряда и напряжения на нем. Методы 1 и 2 приводят к заниженным (на один-два порядка) величинам сопротивления канала разряда (рис. 5) и плохому согласованию других результатов моделирования с экспериментальными данными (рис. 3–7).

Удовлетворительное согласование с экспериментом обеспечивается, когда параметры эмпирической функции соответствуют данным, приведенным в таблице (рис. 8–12). При исполь-

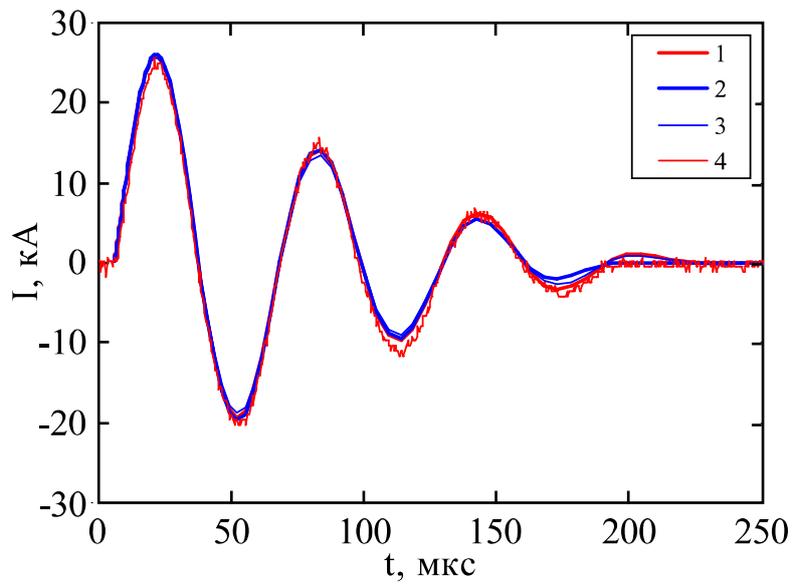


Рис. 8. Сила тока в канале электрического разряда в воде: 1 – метод 1; 2 – метод 2; 3 – метод 3; 4 – эксперимент.

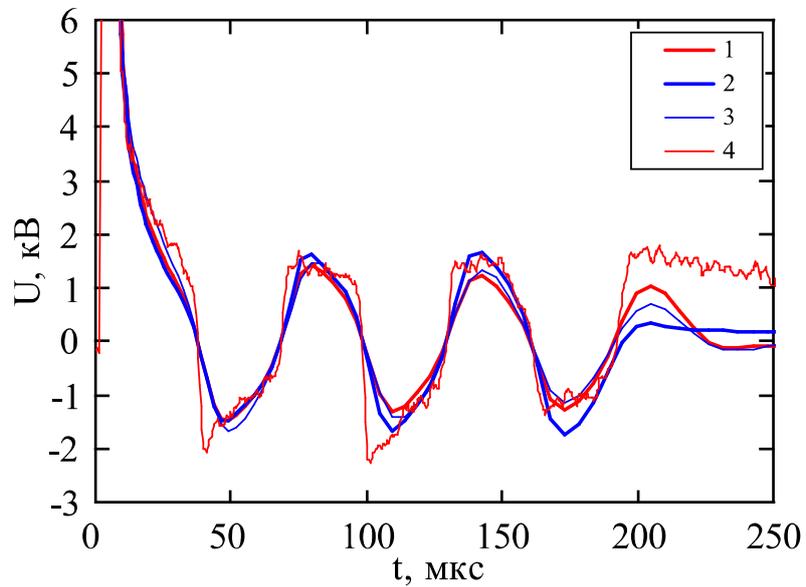


Рис. 9. Напряжение на канале электрического разряда в воде: 1 – метод 1; 2 – метод 2; 3 – метод 3; 4 – эксперимент.

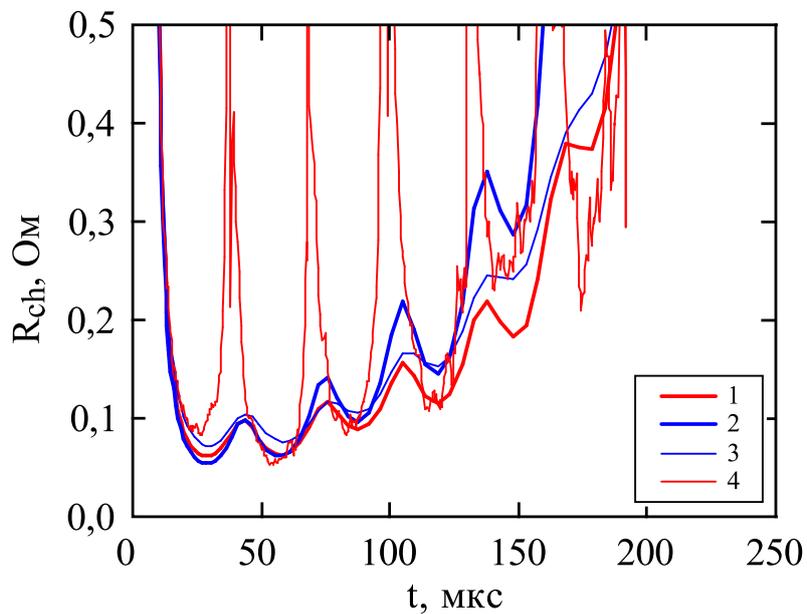


Рис. 10. Сопротивление канала электрического разряда в воде: 1 – метод 1; 2 – метод 2; 3 – метод 3; 4 – эксперимент.

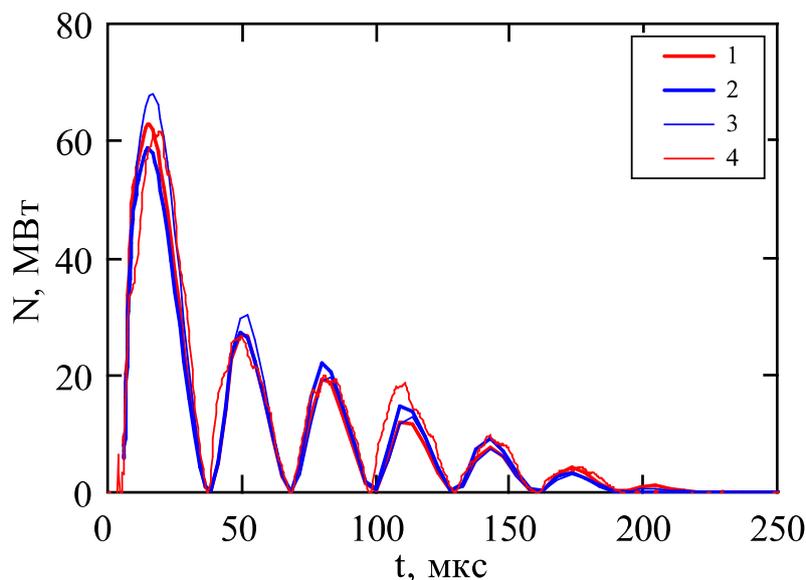


Рис. 11. Мощность ввода энергии в канал электрического разряда в воде: 1 – метод 1; 2 – метод 2; 3 – метод 3; 4 – эксперимент.

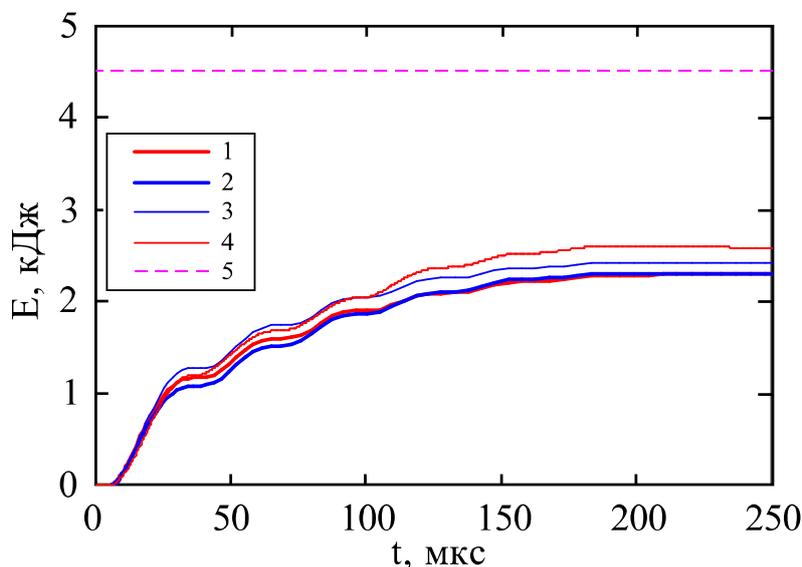


Рис. 12. Энергия в канале электрического разряда в воде: 1 – метод 1; 2 – метод 2; 3 – метод 3; 4 – эксперимент; 5 – энергия, запасаемая в конденсаторной батарее.

Таблица. Параметры эмпирической функции

Номер метода определения $\sigma_{ch}$	$a$	$b$	$c$
1	0,02	$10^{-4}$	0
2	1,2	$10^{-4}$	1
3	1,7	$10^{-4}$	0,4

зовании метода 2 удельная электропроводность плазмы, вычисленная по формуле (10), умножается на эмпирическую функцию, которая изменяется пропорционально степени ионизации плазмы, а в методе 1 эмпирическая функция от степени ионизации плазмы не зависит. То есть эмпирическая функция в формуле для определения удельной электропроводности плазмы (6) представляет собой постоянный множитель. Использование метода 3 требует умножения (14) на эмпирическую функцию, зависящую от иони-

зации плазмы в степени 0,4. Из трех методов, рассмотренных в данной работе, функционально точнее описывает изменение удельной электропроводности плазмы метод 1, так как требует корректировки результатов вычисления по формуле (6) только с помощью постоянного множителя.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты свидетельствуют о том, что рассмотренные методы определения

удельной электропроводности плазмы в канале электрического разряда в воде дают существенно завышенную ее величину по сравнению с данными эксперимента. Для согласования результатов математического моделирования электрического разряда в воде с данными эксперимента можно использовать эмпирическую функцию, предложенную в данной работе.

Представленная работа является существенным развитием работ [5, 10]. В ней обоснована необходимость использования эмпирических функций при вычислении удельной электропроводности плазмы в канале электрического разряда в воде. Полученные соотношения позволили существенно повысить адекватность математической модели [5, 10] физическим процессам разряда в воде и расширить диапазон параметров, в котором ее можно применять.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гулый, Г.А., *Научные основы разрядно-импульсных технологий*, Киев: Наукова думка, 1990. 311 с.
2. Курец, В.И., Соловьев, М.А., Жучков, А.И., Барская, А.В., *Электроразрядные технологии обработки и разрушения материалов*, Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. 272 с.
3. Кривицкий, Е.В., Шамко, В.В., *Переходные процессы при высоковольтном разряде в воде*, Киев: Наукова думка, 1979. 208 с.
4. Косенков, В.М., Влияние длины канала высоковольтного разряда в воде на эффективность пластического деформирования цилиндрической оболочки, *ЖТФ*, 2011, т. 81, № 10, с. 133.
5. Косенков, В.М., Бычков, В.М., Математическое моделирование переходных процессов в разрядном контуре и разрядной камере электрогидравлической установки, *ЭОМ*, 2015, т. 51, № 2, с. 66.
6. Колгатин, С.Н., Простая модель для исследования динамики развитой стадии быстропротекающего электрического разряда в газе и жидкости, *ЖТФ*, 1995, т. 65, № 7, с. 10.
7. Наугольных, К.А., Рой, Н.А., *Электрические разряды в воде*, М.: Наука, 1971. 155 с.
8. Царенко, П.И., Ризун, А.Р., Жирнов, М.В., Иванов, В.В., *Гидродинамические и теплофизические характеристики мощных подводных искровых разрядов*, Киев: Наукова думка, 1984. 148 с.
9. Дубовенко, К.В., Учет взаимодействия плазмы канала подводного электрического разряда с ударной волной, отраженной от стенки камеры, *ЭОМ*, 2013, т. 49, № 1, с. 30.
10. Косенков, В.М., Математическое моделирование изменения удельной электропроводности плазмы и сопротивления канала нецилиндрической формы в процессе электрического разряда в воде, *ЭОМ*, 2019, № 2, с. 35. doi: 10.5281/zenodo.2629544.
11. Калиткин, Н.Н., Кузьмина, Л.В., Шарипджанов, И.И., *Построение уравнения состояний химических соединений*, Препринт: АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 43. М.: 1976. 63 с.
12. Ривкин, С.Л., Александров, А.А., Термодинамические свойства воды и водяного пара, М.: Энергия, 1975. 106 с.
13. Кузнецов, Н.М., *Двухфазная смесь вода-пар. Уравнение состояния, скорость звука, энтропии*, Доклады АН СССР. 1981, т. 257, № 4, с. 858.
14. Кривицкий, Е.В., *Динамика электровзрыва в жидкости*, Киев: Наукова думка, 1986. 208 с.
15. Кринберг И.А. Электропроводность воздуха в присутствии примеси, *Прикладная механика и техническая физика*, 1965, № 1, с. 76.
16. Feynman, R.P., Hibbs, A.R., *Quantum mechanics and path integrals*, New York: McGRAW-HILL Book Company, 1965. 365 p.
17. Калиткин, Н.Н., Кузьмина, Л.В., Рогов, В.С., *Таблицы термодинамических функций и транспортных коэффициентов плазмы*, М.: Препринт института прикладной математики АН СССР, 1972. 112 с.
18. Пастухов, В.Н., Моделирование начальной стадии электрического разряда в воде, *ЭОМ*, 1982, № 5, с. 61.
19. Жданов, В.М., *Явления переноса в газах и плазме*, М.: МИФИ, 2008. 240 с.
20. Косенков, В.М., Каменская, Л.А., Расчет расширения канала электрического разряда в жидкости, описываемой в потенциальном приближении, *Акустический вестник*, 2001, № 2, с. 47.
21. Годунов, С.К., *Численное решение многомерных задач газовой динамики*, М.: Наука, 1976. 400 с.

#### Summary

In the present work, a comparative analysis of three methods for determining the specific electrical conductivity of the plasma formed in the channel of an electric discharge in water is carried out for its mathematical modeling. The parameters of the empirical function are determined, at which the results of mathematical modeling are consistent with the experimental data. The necessity of using empirical functions in calculating the specific electrical conductivity of plasma has been substantiated. The obtained ratios made it possible to significantly increase the adequacy of the previously developed mathematical model of the physical discharge processes in water and to expand the range of parameters in which it can be used.

**Keywords:** electric discharge in water, specific electrical conductivity of plasma, shape of discharge channel, resistance of discharge channel, mathematical modeling