

Нелинейная поправка к интенсивности дипольного излучения незаряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле

* А. И. Григорьев, С. О. Ширяева, Н. Ю. Колбнева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
г. Ярославль, 150000, Россия, *e-mail: grig@univ Yar.ac.ru

Поступила в редакцию 02.07.2020

После доработки 30.10.2020

Принята к публикации 30.10.2020

Проведен асимптотический расчет дипольного электромагнитного излучения незаряженной электропроводной капли, совершающей осцилляции конечной амплитуды во внешнем электростатическом поле с точностью до второго порядка малости включительно по отношению амплитуды осцилляций к радиусу исходной капли включительно. Показано, что во втором порядке малости возбуждается первая мода осцилляций. В итоге центры разноименных индуцированных зарядов будут синхронно осциллировать, и капля станет излучать электромагнитные волны дипольного типа, формируя нелинейную поправку к интенсивности дипольного излучения первого порядка малости. Дана оценка интенсивности электромагнитного излучения этой поправки и ширины полосы частот в зависимости от размеров капли и напряженности внешнего электростатического поля.

Ключевые слова: незаряженная капля, идеальная жидкость, электростатическое поле, индуцированный заряд, дипольное излучение

УДК 551.594.9

<https://doi.org/10.52577/eom.2021.57.3.50>

ВВЕДЕНИЕ

Электромагнитное излучение, генерируемое заряженными и незаряженными каплями, осциллирующими в электростатическом поле, неоднократно становилось предметом теоретического исследования [1–4] в связи с проблемами радиолокационного зондирования метеорологических объектов [5–6].

Сама задача электромагнитного излучения осциллирующих заряженных капель в конвективных облаках была впервые сформулирована и решена в [1], а впоследствии скорректирована в [2–3], исходя из представлений электрогидродинамики об идеальной электропроводной жидкости, на основании закона сохранения энергии. В последующих исследованиях, проведенных согласно общей теории излучения [7–8], выяснилось, что в [1–3] было выявлено лишь весьма слабое квадрупольное излучение.

В [9] по аналогии с [1–3] в первом порядке малости по амплитуде осцилляций рассчитана интенсивность излучения незаряженной электропроводной капли, осциллирующей во внешнем однородном электростатическом поле. В этом случае излучение происходило из-за ускоренного движения зарядов, индуцированных в капле внешним электростатическим полем, при осцилляциях поверхности капли. Впоследствии [10] оказалось, что решение [9] ошибочно, а после устранения ошибки выяснилось, что излучение является дипольным [10]. Дипольное

излучение от осциллирующей капли оказалось гораздо интенсивнее (на 14–15 порядков), чем квадрупольное: и в случае заряженной капли [11], и в случае незаряженной капли, осциллирующей в электростатическом поле [10].

Далее в асимптотических расчетах второго порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций рассчитывается интенсивность нелинейной поправки к интенсивности дипольного излучения от незаряженной капли, осциллирующей с конечной амплитудой в однородном электростатическом поле, обнаруживаемой в расчетах первого порядка малости.

ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим эволюцию во времени формы поверхности нелинейно осциллирующей незаряженной капли идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости с плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ , помещенной в однородное электростатическое поле напряженностью \vec{E}_0 . Примем, что капля находится в вакууме, ее объем определяется объемом сферы с радиусом R . Величина напряженности подобрана таким образом, что центр масс капли неподвижен. Равновесная форма такой капли в квадратичном приближении по амплитуде стационарной деформации может считаться сфероидальной [12–13]. Все расчеты задачи будем проводить в сферической системе координат (r, θ, φ) с началом в центре масс капли

в безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$.

Представим форму образующей, вращением которой вокруг оси OZ получается равновесная форма поверхности капли, в сферических координатах в виде ряда по полиномам Лежандра:

$$r(\theta) = 1 + f(\theta); \quad f(\theta) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(e) \times P_n(\mu);$$

$$\mu \equiv \cos \theta; \quad |f(\theta)| \ll 1,$$

где e – эксцентриситет капли, который будем считать малым.

К искажению равновесной сферической формы капли приводит наличие внешнего электростатического поля, задающего выделенное направление. Примем $|f(\theta)| \sim e$, а в силу неподвижности центра масс капли получим $E_0^2 \sim e^2$.

Записывая разложения для равновесных значений давления сил поверхностного натяжения $P_\sigma^{(eq)}$ и давления электрического поля $P_E^{(eq)}$ в линейном по квадрату эксцентриситета приближении

$$P_\sigma^{(eq)} = 2 + (n-1)(n+2)f(\theta) + O(e^4);$$

$$P_E^{(eq)} = \frac{3E_0^2}{8\pi}(1 + 2P_2(\mu)) + O(e^4)$$

и составляя баланс давлений так, как это было сделано в [14–15], получим выражение для формы равновесной поверхности капли, совпадающее с точностью до e^2 с уравнением вытянутого сфероида

$$r(\theta) \approx 1 + \frac{1}{3}e^2 P_2(\mu) + O(e^4). \quad (1)$$

Эксцентриситет равновесной сфероидальной поверхности капли e связан с напряженностью электростатического поля (в безразмерной форме) соотношением [12–13]:

$$e \equiv \sqrt{9E_0^2/16\pi}.$$

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в начальный момент времени $t=0$ равновесная сфероидальная форма капли с эксцентриситетом e претерпевает виртуальное осесимметричное возмущение $\xi(\theta)$ фиксированной амплитуды. Отношение $\max \xi(\theta)$ к радиусу R будем использовать в качестве малого параметра: $\varepsilon \equiv (\max \xi(\theta)/R)$.

Поскольку начальное возмущение поверхности капли осесимметрично и мало, примем,

что форма капли осесимметрична как в начальный, так и во все последующие моменты времени, а уравнение, описывающее ее поверхность, в сферической системе координат с началом в центре масс капли в безразмерных переменных имеет вид:

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t) = 1 + \frac{1}{3}e^2 P_2(\mu) + \xi(\theta, t) \equiv$$

$$\equiv 1 + e^2 h(\theta) + \xi(\theta, t); \quad |\xi| \ll 1. \quad (2)$$

Движение жидкости в капле будем полагать потенциальным и примем, что поле скоростей движения жидкости в капле $\vec{V}(\vec{r}, t) = \nabla \psi(\vec{r}, t)$ полностью определяется функцией потенциала скорости $\psi(\vec{r}, t)$ [16]. Величины поля скоростей течения жидкостей имеют тот же порядок малости, что и амплитуда волн на капле $\psi(\vec{r}, t) \sim \varepsilon$.

Математическая формулировка задачи об электромагнитном излучении незаряженной капли во внешнем электростатическом поле имеет вид:

$$\Delta \psi(\vec{r}, t) = 0; \quad \Delta \Phi(\vec{r}, t) = 0; \quad (3)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi(\vec{r}, t) \rightarrow 0; \quad (4)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \vec{E}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{E}_0 \equiv E_0 \vec{e}_z; \quad \vec{E} = -\nabla \Phi; \quad (5)$$

$$r = r(\theta) + \xi(\theta, t);$$

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial r}$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial \theta} \left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right); \quad (6)$$

$$\Delta P - \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla \psi)^2 + P_E = P_\sigma; \quad (7)$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi_s(t), \quad (8)$$

где $\Phi(\vec{r}, t)$ – электрический потенциал [17]; $\Phi_s(t)$ – постоянный вдоль поверхности капли электрический потенциал.

Для замыкания выписанной системы введем условия неизменности полного объема (следствие несжимаемости жидкости), неподвижности центра масс, а также условие незаряженности капли:

$$\int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3}\pi;$$

$$\int_V \vec{r} \times r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \quad (9)$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S (\vec{n}, \vec{E}) dS = 0;$$

$$S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (10)$$

Начальные условия задаются в виде начальной деформации равновесной сфероид-

дальной формы капли и равенства нулю начальной скорости движения поверхности:

$$t = 0: \xi(\theta) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu);$$

$$\sum_{j \in \Xi} h_j = 1; \quad \frac{\partial \xi(\theta)}{\partial t} = 0, \quad (11)$$

где Ξ – множество значений номеров изначально возбужденных мод осцилляций; $P_j(\mu)$ – полином Лежандра j -го порядка, j – целое число.

В выражениях (6)–(11) введены обозначения: ΔP – перепад постоянных давлений внутри капли и вне капли в состоянии равновесия; \vec{E} – вектор напряженности электрического поля; $P_E = \vec{E}^2/8\pi$ – давление электрического поля, $P_\sigma = \text{div} \vec{n}$ – капиллярное давление; \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности, описываемой выражением (2); h_j – коэффициенты, определяющие парциальный вклад j -й колебательной моды в суммарное начальное возмущение; ξ_0 и ξ_1 – константы (амплитуды нулевой и первой мод осцилляций), определяемые в расчетах второго порядка малости из условий постоянства объема и неподвижности центра масс в начальный момент времени и с точностью до слагаемых $\sim \varepsilon \times e^2$ и $\sim \varepsilon^2$, равные:

$$\xi_0 \approx - \sum_{j \in \Xi} \left[\varepsilon^2 \frac{h_j^2}{(2j+1)} + \varepsilon \times e^2 \frac{2}{15} h_j \delta_{j,2} \right] + O(\varepsilon^3);$$

$$\xi_1 \approx - \sum_{j \in \Xi} \left[\varepsilon^2 \frac{9j h_{j-1} h_j}{(2j-1)(2j+1)} + \varepsilon \times e^2 \frac{9}{35} h_j \delta_{j,3} \right] + O(\varepsilon^3), \quad (12)$$

где $\delta_{j,n}$ – символ Кронекера, а O – символ порядка [18].

Отметим, что в данной задаче имеются два малых параметра: квадрат эксцентриситета капли e^2 и амплитуда начальной деформации ε равновесной поверхности. Для определенности будем полагать $e^2 \sim \varepsilon$.

Из соображений удобства последующих разложений и возможности в конечных выражениях легче перейти к E_0 и e^2 введем формальные параметры β_E, β_e в соответствии со следующими выражениями: $E_0 \equiv \beta_E \times \varepsilon^{1/2}$, $e^2 \equiv \beta_e \times \varepsilon$. Ввиду того, что $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$, $e^2 \sim \varepsilon$, то, очевидно, $\beta_E = \beta_e = 1$.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН

Для отыскания решения поставленной задачи с точностью до квадратичных по малому параметру ε слагаемых воспользуемся классическим методом многих масштабов [19]. Для этого искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(\vec{r}, t)$, $\Phi(\vec{r}, t)$

представим в виде рядов по степеням малого параметра ε и будем считать зависящими не просто от времени t , а от разных его масштабов, определенных через малый параметр ε : $T_m \equiv \varepsilon^m t$ ($m = 0; 1; 2$),

$$\xi(\theta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1);$$

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1);$$

$$\Phi(\vec{r}, t) = \Phi^{(eq)}(r, \theta) + \varepsilon^{3/2} \Phi^{(3/2)}(r, \theta, T_0). \quad (13)$$

Разложение для потенциала электрического поля ведется по полуцелым степеням параметра ε , поскольку $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$. В итоге разложение компоненты электрического потенциала $\Phi^{(eq)}(r, \theta)$ в окрестности незаряженного сфероида во внешнем электростатическом поле также ведется по полуцелым степеням параметра ε и записывается в виде [20]:

$$\Phi^{(eq)}(r, \theta) = \varepsilon^{1/2} \beta_E r \left(\frac{1}{r^3} - 1 \right) P_1(\mu) +$$

$$+ \varepsilon^{3/2} \beta_E \beta_e \frac{2}{5} \frac{1}{r^2} \left(P_1(\mu) + \frac{3}{2} \frac{1}{r^2} P_3(\mu) \right).$$

Добавка $\Phi^{(3/2)}(r, \theta, t)$ связана с искажением равновесной сфероидальной поверхности капли.

Производные по времени будем вычислять, имея в виду полный набор различных его масштабов, по правилу:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \varepsilon^0 \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon^1 \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3).$$

Подставляя разложения (13) в краевую задачу (3)–(10) и приравнивая в каждом из уравнений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций $\xi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(3/2)}$.

В силу линейности уравнений (3)–(5) им должна удовлетворять каждая из функций $\psi(\vec{r}, t)$, $\Phi(\vec{r}, t)$ в разложениях (13), поэтому выражения для отдельных поправок ищем в виде:

$$\psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) r^n P_n(\mu);$$

$$(m=1; 2); \quad (14)$$

$$\Phi^{(3/2)}(r, \theta, T_0) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(3/2)}(r, \theta, T_0) r^{-(n+1)} P_n(\mu). \quad (15)$$

В виде рядов по полиномам Лежандра записываются и последовательные поправки к форме поверхности капли $\xi^{(m)}$:

$$\xi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1) P_n(\mu);$$

$$(m=1; 2). \quad (16)$$

ЗАДАЧА ПЕРВОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ε

В первом порядке малости по ε для определения коэффициентов $D_n^{(m)}, M_n^{(m)}$ в решениях (14), (16) (при $m = 1$) из уравнений (6), (7), (9) получается система:

$$r = 1: \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r};$$

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0} = (2 + \hat{L}_0) \xi^{(1)}; \quad \hat{L}_0 \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right);$$

$$\int_0^{\pi} \xi^{(1)} \sin \theta d\theta = 0; \quad \int_0^{\pi} \xi^{(1)} \cos \theta \sin \theta d\theta = 0. \quad (17)$$

Выражения для поправок первого порядка к коэффициентам разложений (14), (16) несложно найти из системы (17) в виде:

$$M_0^{(1)}(T_0, T_1) = 0; \quad D_0^{(1)}(T_0, T_1) = 0; \quad M_1^{(1)}(T_0, T_1) = 0;$$

$$D_n^{(1)}(T_0, T_1) = \frac{1}{n} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0}; \quad (n \geq 1). \quad (18)$$

Для нахождения коэффициентов $M_n^{(1)}(T_0, T_1)$ при $n \geq 2$ необходимо решить однородное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} M_n^{(1)}(T_0, T_1) + \omega_n^2 M_n^{(1)}(T_0, T_1) = 0;$$

$$\omega_n^2 = n(n-1)(n+2), \quad (19)$$

ω_n – частота собственных колебаний поверхности незаряженной сферы.

Решением уравнения (19) являются гармонические функции по времени T_0 с коэффициентами, зависящими от времени T_1 :

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1) = A_n^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_n T_0) + \text{к.с.}; \quad (n \geq 2);$$

$$A_n^{(1)}(T_1) \equiv a_n^{(1)}(T_1) \exp\left[ib_n^{(1)}(T_1)\right]. \quad (20)$$

Сокращение «к.с.» означает комплексно сопряженные слагаемые к выписанным. Зависимость функций $a_n^{(1)}$ и $b_n^{(1)}$ от параметра T_1 определяется в следующих порядках малости.

ЗАДАЧА ПОРЯДКА 3/2 ПО ε

Система уравнений для определения коэффициентов $F_n^{(m)}$ в решении (15) получается из

условий (8), (10) путем группировки слагаемых $\sim \varepsilon^{3/2}$:

$$r = 1: \Phi^{(3/2)} - 3\beta_E \xi^{(1)} P_1(\mu) = \Phi_s^{(3/2)};$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial \Phi^{(3/2)}}{\partial r} \sin \theta d\theta = 0. \quad (21)$$

Здесь $\Phi_s^{(3/2)}$ – поправка первого порядка малости к величине потенциала капли.

Подставив разложение (15) при $m = 3/2$ и решение первого порядка (20) в систему (21), получим выражения для $F_n^{(3/2)}(T_0)$ в виде:

$$F_0^{(3/2)}(T_0) = 0; \quad \Phi_s^{(3/2)} = 0;$$

$$F_n^{(3/2)}(T_0) = 3\beta_E \left(\mu_{n-1}^+ M_{n-1}^{(1)}(T_0, T_1) + \mu_{n+1}^- M_{n+1}^{(1)}(T_0, T_1) \right);$$

$$(n \geq 1). \quad (22)$$

$$\mu_n^+ = \frac{n+1}{2n+1}; \quad \mu_n^- = \frac{n}{2n+1}.$$

По полученным выражениям для искомых величин $\xi(\theta, t)$, $\psi(\vec{r}, t)$, $\Phi(\vec{r}, t)$ можно найти аналитическое выражение для интенсивности дипольного излучения незаряженной капли, осциллирующей во внешнем электростатическом поле в первом порядке малости, как это было сделано, например, в [10]. Но поскольку цель работы состоит в определении нелинейной поправки, обнаруживаемой в квадратичном приближении по малому параметру, то будем решать задачу второго порядка малости по ε .

ЗАДАЧА ВТОРОГО ПОРЯДКА МАЛОСТИ ПО ε

Для определения поправок второго порядка малости к найденному решению (то есть для отыскания функций $\xi^{(2)}(\theta, t)$, $\psi^{(2)}(\vec{r}, t)$) приведем систему уравнений, получающуюся из (6)–(10) приравниванием слагаемых при ε^2 :

$$r = 1:$$

$$\frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r^2} \left(\xi^{(1)} + \beta_e h(\theta) \right) - \left(\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} + \beta_e \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \right) \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta};$$

$$-\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} \left(\xi^{(1)} + \beta_e h(\theta) \right) + P_E^{(2)} =$$

$$= -\left(2 + \hat{L}_0\right) \xi^{(2)} + 2\xi^{(1)} \left(1 + \hat{L}_0\right) \xi^{(1)} + 2\beta_e h(\theta) \left(\hat{L}_0 - 4\right) \xi^{(1)};$$

$$\int_0^{\pi} \left(\xi^{(2)} + \left(\xi^{(1)}\right)^2 \right) \sin \theta d\theta = 0;$$

$$\int_0^{\pi} \left(2\xi^{(2)} + 3\left(\xi^{(1)}\right)^2 + 2\beta_e \xi^{(1)} P_2(\mu) \right) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0;$$

$$P_E^{(2)} = -\frac{3}{4\pi} \left[\beta_E P_1(\mu) \frac{\partial \Phi^{(3/2)}}{\partial r} + 6\beta_E^2 (P_1(\mu))^2 \xi^{(1)} \right]. \quad (23)$$

Подставив разложения (14), (16) при $m = 2$, решения первого порядка (20) и порядка 3/2 из (22) в систему уравнений (23), получим выражения для $M_n^{(2)}(T_0)$, $D_n^{(2)}(T_0)$ в виде:

$$\begin{aligned} D_0^{(2)}(T_0) &= 0; \\ M_0^{(2)}(T_0) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)} \left(M_k^{(1)}(T_0, T_1) \right)^2 - \\ &\quad - \frac{2}{15} \beta_e M_2^{(1)}(T_0, T_1); \\ M_1^{(2)}(T_0) &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{9k}{(2k+1)(2k-1)} \times \\ &\quad \times M_{k-1}^{(1)}(T_0, T_1) M_k^{(1)}(T_0, T_1) - \frac{9}{35} \beta_e M_3^{(1)}(T_0, T_1); \\ D_n^{(2)}(T_0) &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0)}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_1} + \frac{1}{3} \beta_e N_0 - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (m(m-1) K_{m,k,n} - \alpha_{m,k,n}) \frac{1}{m} \frac{\partial M_m^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} M_k^{(1)}(T_0, T_1) \right\}; \\ &\quad (n \geq 1); \\ N_0 &= \frac{\partial M_{n+2}^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\alpha_{2,n+2,n}}{(n+2)} - K_{2,n+2,n}(n+1) \right) + \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} \times \\ &\quad \times \left(\frac{\alpha_{2,n,n}}{n} - K_{2,n,n}(n-1) \right) + \\ &\quad + \frac{\partial M_{n-2}^{(1)}(T_0, T_1)}{\partial T_0} \left(\frac{\alpha_{2,n-2,n}}{(n-2)} - K_{2,n-2,n}(n-3) \right); \\ K_{m,k,n} &= \left[C_{k0,m0}^{n0} \right]^2; \\ \alpha_{m,k,n} &= -\sqrt{m(m+1)k(k+1)} C_{m0,k0}^{n0} \times C_{m-1,k1}^{n0}, \quad (24) \end{aligned}$$

$C_{mk,lp}^{nq}$ – коэффициенты Клебша-Гордана [21], отличные от нуля, только когда индексы удовлетворяют соотношениям $|m-k| \leq n \leq m+k$, $m+k+n$ – четное.

Для определения коэффициентов $M_n^{(2)}(T_0)$ при $n \geq 2$ необходимо решить неоднородное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial T_0^2} M_n^{(2)}(T_0) + \omega_n^2 M_n^{(2)}(T_0) = \\ &= G_n \exp(i\omega_n T_0) + L_{n,1} A_{n-2}^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_{n-2} T_0) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ L_{n,2} A_{n+2}^{(1)}(T_1) \exp(i\omega_{n+2} T_0) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \lambda_{m,k,n}^{(+)} A_m(T_1) A_k(T_1) \exp(i(\omega_m + \omega_k) T_0) + \right. \\ &+ \lambda_{m,k,n}^{(-)} A_m(T_1) \bar{A}_k(T_1) \exp(i(\omega_m - \omega_k) T_0) \left. \right\} + \text{к.с.} \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_n &\equiv -2i\omega_n \frac{\partial A_n^{(1)}(T_1)}{\partial T_1} + L_{n,0} A_n^{(1)}(T_1); \\ L_{n,0} &= \frac{9}{4\pi} \beta_E^2 n \left((n-2) \mu_n^- \mu_{n-1}^+ + n \mu_{n+1}^- \mu_n^+ \right) + \\ &+ \frac{1}{3} \beta_e \left(\omega_n^2 \left(\left(1 - \frac{(n-4)}{(n-1)} \right) K_{2,n,n} + \frac{1}{n} \alpha_{2,n,n} \right) + 3n^3 K_{2,n,n} \right); \\ L_{n,1} &\equiv \frac{9}{4\pi} \beta_E^2 n (n-2) \mu_{n-1}^+ \mu_{n-2}^+ + \frac{1}{3} \beta_e \times \\ &\times \left(\omega_{n-2}^2 \left(\left(3 - \frac{n(n-5)}{(n-2)(n-3)} \right) K_{2,n-2,n} + \frac{1}{(n-2)} \alpha_{2,n-2,n} \right) + n(3n^2 - 11n + 12) K_{2,n-2,n} \right); \\ L_{n,2} &\equiv \frac{9}{4\pi} \beta_E^2 n^2 \mu_{n+1}^- \mu_{n+2}^- + \frac{1}{3} \beta_e \times \\ &\times \left(\omega_{n+2}^2 \left(\left(1 + \frac{n(n-7)}{(n+1)(n+2)} \right) K_{2,n+2,n} + \frac{1}{(n+2)} \alpha_{2,n+2,n} \right) - n(3n^2 + 7n - 8) K_{2,n+2,n} \right); \\ \lambda_{m,k,n}^{(\pm)} &\equiv \frac{1}{2} \left[(\gamma_{m,k,n} + \gamma_{k,m,n}) \pm \omega_m \omega_k (\eta_{m,k,n} + \eta_{k,m,n}) \right]; \\ \gamma_{m,k,n} &\equiv K_{m,k,n} \left[\omega_m^2 (n-m+1) + 2n(m(m+1)-1) \right] + \frac{\alpha_{m,k,n}}{m} \omega_m^2; \\ \eta_{m,k,n} &\equiv K_{m,k,n} \left(\frac{n}{2} - m + 1 \right) + \alpha_{m,k,n} \frac{1}{m} \left(1 + \frac{n}{2k} \right). \end{aligned}$$

Горизонтальная черта сверху над A_n в (25) обозначает комплексное сопряжение.

Требование исключения из решений уравнения (25) секулярных членов показывает, что $a_n^{(1)}$ не зависит от времени T_1 и $b_n^{(1)}$ линейно зависит от T_1 : $b_n^{(1)}(T_1) = -\frac{L_{n,0}}{2\omega_n} T_1 + b_n^{(0)}$, где $b_n^{(0)}$ – константа, определяемая из начальных условий.

Следовательно, общее решение уравнения (25) при $n \geq 2$ будет представлено в виде:

$$\begin{aligned} M_n^{(2)}(T_0) &= A_n^{(2)} \exp(i\omega_n T_0) + N_n^{(-)} A_{n-2}^{(1)} \exp(i\omega_{n-2} T_0) + \\ &+ N_n^{(+)} A_{n+2}^{(1)} \exp(i\omega_{n+2} T_0) + \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ N_{m,k,n}^{(+)} A_m(T_1) A_k(T_1) \exp(i(\omega_m + \omega_k) T_0) + \right. \\ &+ N_{m,k,n}^{(-)} A_m(T_1) \bar{A}_k(T_1) \exp(i(\omega_m - \omega_k) T_0) \left. \right\} + \text{к.с.}; \quad (26) \end{aligned}$$

$$N_n^{(-)} \equiv \frac{L_{n,1}}{\omega_n^2 - \omega_{n-2}^2}; \quad N_n^{(+)} \equiv \frac{L_{n,2}}{\omega_n^2 - \omega_{n+2}^2};$$

$$N_{m,k,n}^{(\pm)} \equiv \frac{\lambda_{m,k,n}^{(\pm)}}{\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_k)^2}.$$

Начальные условия (11) после подстановки в них разложений (13) превратятся в систему уравнений для функций первого и второго порядков малости:

$$t = 0: \xi^{(1)}(\theta, t) = \sum_{j \in \Xi} h_j P_j(\mu); \quad \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_0} = 0;$$

$$\xi(\theta, t) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu); \quad \frac{\partial \xi^{(2)}(\theta, t)}{\partial T_0} = -\frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_1};$$

позволяющую определить действительные константы $a_n^{(1)}, b_n^{(1)}, a_n^{(2)}, b_n^{(2)}$ в решениях (20), (26).

Удовлетворяя начальным условиям в первом приближении по ε , получим:

$$a_n^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j \in \Xi} h_j \delta_{n,j}; \quad b_n^{(1)} = 0; \\ (j \in \Xi, n = 0, 1, 2, \dots); \quad (27)$$

во втором по ε приближении находим:

$$a_n^{(2)} = -\frac{1}{2} \sum_{j \in \Xi} h_j \left(N_n^{(-)} \delta_{n-2,j} + N_n^{(+)} \delta_{n+2,j} \right) - \\ - \sum_{j \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} \frac{h_j h_q}{4} \left(N_{j,q,n}^{(+)} + N_{j,q,n}^{(-)} \right); \\ b_n^{(2)} = 0. \quad (28)$$

Используя выражения (27), (28), запишем амплитуды первого и второго порядков малости в решении (16) для формы поверхности колеблющейся капли в окончательном виде:

$$M_0^{(1)}(t) = M_1^{(1)}(t) = 0;$$

$$M_j^{(1)}(t) = \sum_{j \in \Xi} h_j \cos(\omega_j^+ t); \quad \omega_j^+ = \omega_j - \varepsilon \frac{L_{j,0}}{2\omega_j};$$

$$M_0^{(2)}(t) = - \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{h_j^2}{(2j+1)} (\cos(\omega_j t))^2 + \frac{2}{15} \beta_e h_j \delta_{j,2} \cos(\omega_j t) \right];$$

$$M_1^{(2)}(t) = - \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{9j h_{j-1} h_j}{(2j-1)(2j+1)} \cos(\omega_{j-1} t) \cos(\omega_j t) + \frac{9}{35} \beta_e h_j \delta_{j,3} \cos(\omega_j t) \right];$$

$$M_n^{(2)}(t) = \sum_{j \in \Xi} h_j \left[N_n^{(-)} \delta_{n-2,j} \cos(\omega_{n-2} t) + N_n^{(+)} \delta_{n+2,j} \cos(\omega_{n+2} t) - \right.$$

$$\left. - \left(N_n^{(-)} \delta_{n-2,j} + N_n^{(+)} \delta_{n+2,j} \right) \cos(\omega_n t) \right] + \sum_{j \in \Xi} \sum_{q \in \Xi} \frac{h_j h_q}{2} \times$$

$$\times \left[N_{j,q,n}^{(+)} \left(\cos((\omega_j + \omega_q) t) - \cos(\omega_n t) \right) + N_{j,q,n}^{(-)} \left(\cos((\omega_j - \omega_q) t) - \cos(\omega_n t) \right) \right]; \\ (n \geq 2); \quad (29)$$

где ω_j^+ – частота сфероидальной незаряженной капли, находящейся во внешнем однородном электростатическом поле.

Таким образом, используя (2), (13), (16), для формы поверхности колеблющейся незаряженной капли во внешнем поле, получим аналитическое выражение

$$r(\theta, t) = 1 + \frac{1}{3} \varepsilon^2 P_2(\mu) + \quad (30)$$

$$+ \varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j^{(1)}(t) P_j(\mu) + \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(2)}(t) P_n(\mu);$$

в котором амплитудные коэффициенты $M_n^{(m)}(t)$ определяются по (29).

ВЕЛИЧИНЫ ИНДУЦИРОВАННЫХ ЗАРЯДОВ

Величины разноименных индуцированных зарядов каждой из половинок возмущенной поверхности капли $r(\theta, t)$ определяются уравнениями:

$$q_+(\vec{r}, t) = \int_{S_1} dq_+(\vec{r}, t) = \int_{S_1} v(\vec{r}, t) dS_1; \\ S_1 \equiv \left[r = r(\theta, t); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right]; \quad (31)$$

$$q_-(\vec{r}, t) = \int_{S_2} dq_-(\vec{r}, t) = \int_{S_2} v(\vec{r}, t) dS_2;$$

$$S_2 \equiv \left[r = r(\theta, t); \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right].$$

Здесь q_+ – положительный и q_- – отрицательный индуцированные заряды, а $r(\theta, t)$ задана формулой (30).

В силу симметрии капли относительно ее центра масс рассмотрим положительно заряженную половинку капли S_1 . Расписывая в (31) поверхностную плотность заряда в виде $v(\vec{r}, t) = -(\vec{n}, \nabla \Phi) / 4\pi$, получим значение положительного индуцированного заряда на возмущенной поверхности капли

$$q_+(\vec{r}, t) = \int_{S_1} \frac{v(\vec{r}, t)}{(\vec{n}(\vec{r}, t), \vec{e}_r)} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \frac{(\vec{n}(\vec{r}, t), \nabla \Phi)}{(\vec{n}(\vec{r}, t), \vec{e}_r)} r^2 \Big|_{r=r(\theta, t)} \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (32)$$

Разложение для индуцированного заряда ведется по полнцелым степеням параметра ε , поскольку $E_0 \sim \varepsilon^{1/2}$. Определим (32) с точностью до слагаемых порядка $\sim \varepsilon^{3/2}$.

Подставляя в (32) разложение для электрического потенциала из (13) и вектор нормали на возмущенной поверхности капли в виде разложения по степеням малого параметра ε с точностью до слагаемых $\sim \varepsilon$:

$$\vec{n}(\vec{r}, t) = \vec{e}_r - \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \vec{e}_\theta, \quad (33)$$

запишем подынтегральное выражение в (32) на возмущенной поверхности вытянутой сфероидальной капли в виде разложения по степеням малого параметра ε с точностью до слагаемых $\sim \varepsilon^{3/2}$:

$$\left. \frac{(\vec{n}, \nabla \Phi)}{(\vec{n}, \vec{e}_r)} r^2 \right|_{r=r(\theta, t)} =$$

$$= -3\beta_E \varepsilon^{1/2} \left(1 + 2\beta_e \varepsilon \left(\cos^2 \theta - \frac{7}{15} \right) P_1(\mu) \right) + \varepsilon^{3/2} \frac{\partial \Phi^{(3/2)}(\vec{r}, t)}{\partial r} \Big|_{r=1}.$$

В (33) \vec{e}_r и \vec{e}_θ – орты сферической системы координат.

Учитывая решение добавки электрического потенциала $\Phi^{(3/2)}(\vec{r}, t)$ в виде:

$$\Phi^{(3/2)}(t) = 3\beta_E \sum_{j \in \Xi} \left(\mu_{j-1}^+ M_{j-1}^{(1)}(t) + \mu_{j+1}^- M_{j+1}^{(1)}(t) \right) r^{-(j+1)} P_j(\mu),$$

запишем подынтегральное выражение в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$+ \varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j^{(1)}(t) \frac{1}{(2j+1)} \left(j^2 P_{j-1}(\mu) + (j+1)(j+2) P_{j+1}(\mu) \right). \quad (34)$$

Подставляя (34) в (32) и интегрируя по поверхности S_1 , получим величину положительного индуцированного заряда в виде

$$q_+(\vec{r}, t) = \frac{3}{4} \beta_E \varepsilon^{1/2} \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{15} \beta_e \varepsilon + 2\varepsilon \sum_{j \in \Xi} M_j^{(1)}(t) \frac{1}{(2j+1)} \left(j^2 F_{j-1} + (j+1)(j+2) F_{j+1} \right) \right);$$

$$F_j = \int_0^{\pi/2} P_j(\mu) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 1 & (j=0); \\ \frac{(-1)^{\frac{j-1}{2}} (j-1)!}{2^{j-1} (j+1) \left(\left(\frac{j-1}{2} \right)! \right)^2} & (j=2k+1); \\ 0 & (j=2k); \end{cases}$$

В итоге, используя выражение для амплитуд $M_j^{(1)}(t)$ из (29) и переходя от формальных параметров β_e , β_E к физическим обозначениям, запишем окончательное выражение для положительного индуцированного заряда в размерном виде:

$$q_+(\vec{r}, t) = \frac{3}{4} E_0 R^2 \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{15} e^2 + 2\varepsilon \sum_{j \in \Xi} \frac{h_j}{(2j+1)} \left(j^2 F_{j-1} + (j+1)(j+2) F_{j+1} \right) \cos(\omega_j^+ t) \right); \quad (35)$$

$$\omega_j^+ = \sqrt{\frac{\sigma}{R^3 \rho}} j(j-1)(j+2) \times$$

$$\times \left(1 - e^2 \frac{1}{2(j-1)(j+2)} \left(((j-2)\mu_j^- \mu_{j-1}^+ + j\mu_{j+1}^- \mu_j^+) \right) \right)$$

$$\left. + \left(\frac{1}{3} (j-1)(j+2) \left(K_{2,j,j} \left(1 - \frac{(j-4)}{(j-1)} \right) + \frac{1}{j} a_{2,j,j} \right) + j^2 K_{2,j,j} \right) \right);$$

$$e^2 = \frac{9E_0^2 R}{16\pi\sigma}.$$

Для равновесной поверхности капли в отсутствие возмущения величина положительного индуцированного заряда будет определена двумя первыми слагаемыми в круглых скобках в (35).

Аналогичным образом для второй половинки сфероидальной капли, определяемой поверхностью S_2 , получим решение величины отрицательного индуцированного заряда, отличающееся лишь знаком в (35).

ИЗЛУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Наличие колебаний центров индуцированных зарядов и возбуждения амплитуды трансляционной моды нелинейно осциллирующей незагрязненной капли во внешнем поле превращает ее в излучатель электромагнитных волн дипольного типа. Рассмотрим случай, когда изначально возбуждены две соседние моды j и $j-1$. Интенсивность электромагнитного излучения от единичной капли I для двух индуцированных зарядов в соответствии с известным [4–5] выражением запишется в виде:

$$I = \frac{4}{3c^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} (q_\pm(\vec{r}, t) \times R_{mz}(\vec{r}, t))_{\max} \right)^2, \quad (36)$$

где индексом \max обозначены максимальные значения функций. При дальнейших расчетах по этому выражению учтем, что расчеты проводятся во втором порядке малости и именно такой порядок имеет $R_{mz}(\vec{r}, t)$, следовательно, выражение для индуцированного заряда нужно брать на невозмущенной поверхности капли (для равновесной поверхности капли в отсутствие возмущения величина индуцированного заряда определится двумя первыми слагаемыми в круглых скобках в (35), имеющими нулевой порядок малости). Тогда аналитическое выражение для величины диполя в круглых скобках в (36) будет иметь второй порядок.

Проекция смещения вдоль оси симметрии будет определяться амплитудой колебаний трансляционной моды $M_1^{(2)}(t)$, обнаруживаемой во втором порядке по ε , если в начальном спектре мод присутствуют две соседние колебательные моды. Следовательно, $R_{mz}(\vec{r}, t)$ запишем в виде:

$$R_{mz}(\vec{r}, t) = -\varepsilon^2 \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{9jh_{j-1}h_j}{(2j-1)(2j+1)} \cos(\omega_{j-1}t) \cos(\omega_j t) + \frac{9}{35} \beta_e h_j \delta_{j,3} \cos(\omega_3 t) \right] =$$

$$= -e^2 \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{9jh_{j-1}h_j}{2(2j-1)(2j+1)} (\cos(\omega_j + \omega_{j-1})t + \cos(\omega_j - \omega_{j-1})t) + \frac{9}{35} \beta_e h_j \delta_{j,3} \cos(\omega_3 t) \right] \quad (37)$$

Чтобы оценить максимальное значение интенсивности дипольного электромагнитного излучения, в (36) подставим значение индуцированного заряда из (35) и вторую производную по времени от амплитуды осцилляций трансляционной моды, переходя от формальных параметров β_e , β_E к физическим обозначениям, в размерном виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_{mz}(\vec{r}, t) = \\ & = R \sum_{j \in \Xi} \left[\varepsilon^2 \frac{9jh_{j-1}h_j}{2(2j-1)(2j+1)} \left\{ (\omega_j + \omega_{j-1})^2 \cos(\omega_j + \omega_{j-1})t + \right. \right. \\ & \left. \left. + (\omega_j - \omega_{j-1})^2 \cos(\omega_j - \omega_{j-1})t \right\} + \frac{9}{35} \varepsilon e^2 h_j \delta_{j,3} \omega_3^2 \cos(\omega_3 t) \right], \end{aligned}$$

заменяя в выражениях косинусы на их максимальное значение.

В итоге аналитическое выражение для интенсивности дипольного электромагнитного излучения, связанного с возбуждением трансляционной моды нелинейно осциллирующей сфероидальной капли во внешнем поле, примет вид:

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{4c^3} E_0^2 R^6 \varepsilon^4 \times \\ & \times \sum_{j \in \Xi} \left[\frac{9jh_{j-1}h_j}{2(2j-1)(2j+1)} \left\{ (\omega_j + \omega_{j-1})^2 + (\omega_j - \omega_{j-1})^2 \right\} + \frac{9}{35} \frac{e^2}{\varepsilon} h_j \delta_{j,3} \omega_3^2 \right]. \quad (38) \end{aligned}$$

Из (38) можно оценить величину интенсивности фонового шумового электромагнитного излучения от различных жидкокапельных систем искусственного и естественного происхождения, например таких, как конвективные облака. Можно выделить два наиболее вероятных источника электромагнитного излучения капель в грозовом облаке.

Первый возможный источник электромагнитного излучения связан с осцилляциями конечной амплитуды мелких капель из диапазона наиболее часто встречающихся в облаке размеров от 3 до 30 μm . Концентрация n таких капель в облаке $\sim 10^3 \text{ см}^{-3}$ [22–23]. Осцилляции большой амплитуды облачных капель могут быть вызваны различными причинами: коагуляцией; дроблением на более мелкие в результате столкновительных процессов или при реализации электростатической неустойчивости; гидродинамическим и электрическим взаимодействием близко пролетающих капель; аэродинамическим взаимодействием с развитой мелкомасштабной турбулентностью, характерной для грозовых облаков. Амплитуды колебаний облачных капель, согласно данным натурных наблюдений [24–26] могут достигать десятков процентов от

радиуса капли. Согласно (37), на рис. 1 зависимость безразмерной амплитуды колебаний трансляционной моды от безразмерного времени t нелинейно осциллирующей незаряженной капли во внешнем поле, связанная с первым источником излучения, соответствует кривой 1. Видно, что величина R_{mz} периодически меняется со временем.

Второй возможный источник электромагнитного излучения облака связан, согласно [1], со свободно падающими гидрометеорами, коагулирующими с более мелкими капельками и потому непрерывно колеблющимися и, следовательно, излучающими. Однако в [1] на роль излучающих гидрометеоров предлагались незаряженные капли радиуса $R = 1 \text{ мм}$, концентрация которых в облаке, согласно данным наблюдений [22–23], весьма мала: $n \sim 1 \text{ м}^{-3}$. В итоге оценки интенсивности электромагнитного излучения из облака, основанные на обсуждаемом механизме и проведенные для экстремальных численных значений зарядов и концентраций капель с $R = 1 \text{ мм}$, по всей видимости, существенно завышены. Тем не менее сам механизм, предложенный в [6], несомненно, должен работать, если в его основу положить на порядок более мелкие капли с $R = 100 \mu\text{m}$, концентрация которых в облаке, согласно данным наблюдений [22–23], достаточно высока $\sim 10^3 \text{ м}^{-3}$, а скорость их свободного падения имеет величину $\approx 78 \text{ м/с}$. При такой скорости падения сквозь облако капель с радиусами от 3 до 30 μm с максимумом концентрации, приходящимся на диапазон от 3 до 7 μm , гидрометеор будет испытывать каждую секунду около 22 столкновений, при которых в нем будут возбуждаться моды с $n \in \{2 \div 30\}$.

Согласно (37), на рис. 1 зависимость безразмерной амплитуды колебаний трансляционной моды от безразмерного времени t нелинейно осциллирующей незаряженной капли во внешнем поле, связанная со вторым источником излучения, соответствует кривой 2. Видно, что величина R_{mz} периодически меняется со временем. Заметим, что колебания мелких капелек, связанные с возбуждением в начальном спектре низких колебательных мод, превосходят по амплитуде осцилляции крупных капель, связанные с возбуждением в начальном спектре высоких колебательных мод.

Для первого возможного источника электромагнитного излучения, связанного с колебаниями мелких незаряженных капель, находящихся в электростатическом поле, проведем оценку интенсивности фонового дипольного электромагнитного излучения, когда смещение центра заряда связано с возбуждением всего двух

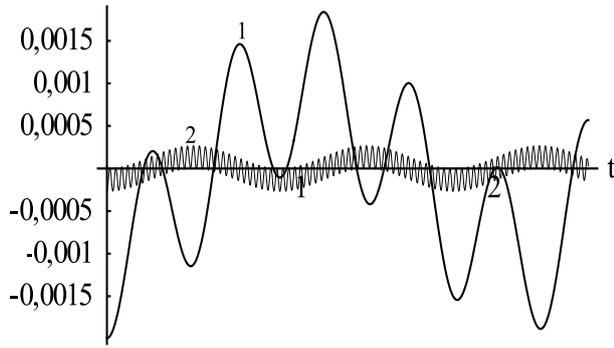


Рис. 1. Зависимость безразмерной амплитуды осцилляций R_{mz} от безразмерного времени при $\varepsilon = 0,1$; кривая 1 соответствует возбуждению равновесной формы поверхности капли в квадратичном по ε приближении вида $[P_2(\mu) + P_3(\mu)]/2$ при $E_0 = 50$ В/см, ($\sim 2 \times 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 3 \mu\text{м}$ и $\sim 7 \times 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 30 \mu\text{м}$); кривая 2 соответствует начальному возбуждению равновесной формы поверхности капли в $[P_{20}(\mu) + P_{21}(\mu)]/2$ при $E_0 = 50$ В/см ($\sim 1 \times 10^{-3} E_{0кр}$ при $R = 80 \mu\text{м}$ и $\sim 2 \times 10^{-3} E_{0кр}$ при $R = 150 \mu\text{м}$).

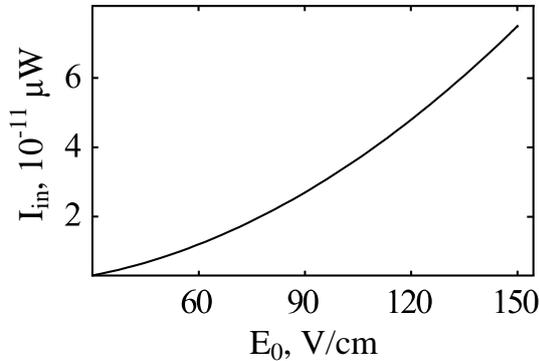


Рис. 3. Зависимость интегральной интенсивности электромагнитного излучения грозового облака диаметром 10 км от радиуса единичной незаряженной равновеликой сферической капли, рассчитанная при тех же значениях физических величин, что и на рис. 2.

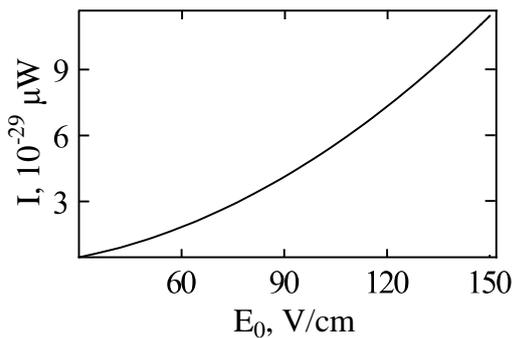


Рис. 5. Зависимость интенсивности электромагнитного излучения единичной незаряженной каплей, находящейся в электростатическом поле, от напряженности внешнего поля, рассчитанная при $j = 21$, $\varepsilon = 0,1$, $h_{20} = h_{21} = 0,5$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $R = 100 \mu\text{м}$.

соседних мод $j-1 = 2$ и $j = 3$. Для численных оценок примем $\varepsilon = 0,1$, $h_2 = h_3 = 0,5$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $E_0 = 50$ В/см ($\sim 2 \times 10^{-4} E_{0кр}$ ($E_{0кр}$ – критическое значение напряженности поля) при $R = 3 \mu\text{м}$ и $\sim 7 \times 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 30 \mu\text{м}$). Тогда из (38) для

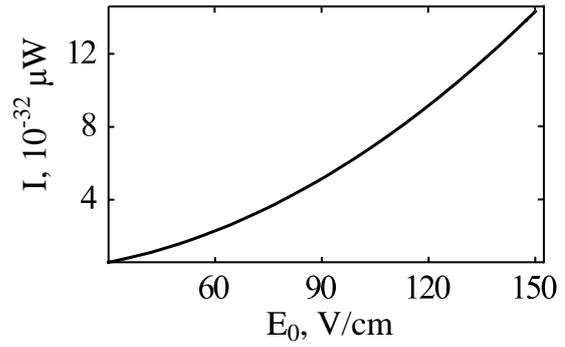


Рис. 2. Зависимость интенсивности электромагнитного излучения единичной незаряженной каплей, находящейся во внешнем электрическом поле, от напряженности внешнего поля, рассчитанная при $j = 3$, $\varepsilon = 0,1$, $h_2 = h_3 = 0,5$, $\sigma = 73$ дин/см, $\rho = 1$ г/см³, $R = 30 \mu\text{м}$.

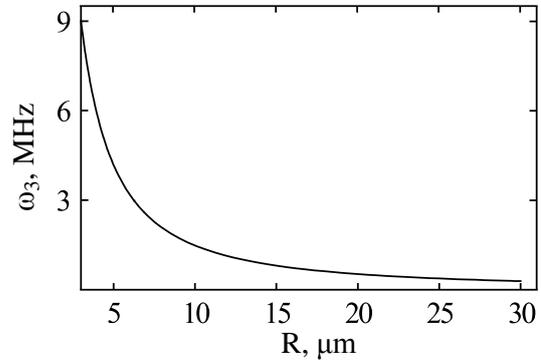


Рис. 4. Зависимость частоты электромагнитного излучения единичной незаряженной капли, находящейся во внешнем электростатическом поле, от радиуса капли, рассчитанная при прочих значениях физических величин, что на рис. 2, и $E_0 = 50$ В/см ($\sim 2 \times 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 3 \mu\text{м}$ и $\sim 7 \times 10^{-4} E_{0кр}$ при $R = 30 \mu\text{м}$).

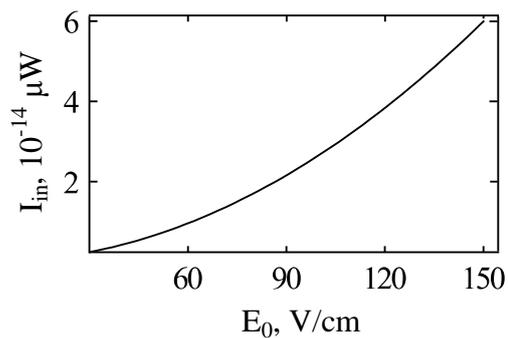


Рис. 6. Зависимость интегральной интенсивности электромагнитного излучения грозового облака диаметром 10 км от радиуса единичной незаряженной равновеликой сферической капли, рассчитанная при тех же значениях физических величин, что и на рис. 5.

капли радиусом $R = 30 \mu\text{м}$ несложно получить $I \sim 2 \times 10^{-32} \mu\text{W}$. Для капли радиусом $R = 8 \mu\text{м}$ значение интенсивности будет равно $I \sim 2 \times 10^{-32} \mu\text{W}$. При радиусе капли $R = 3 \mu\text{м}$ излучение составляет $I \sim 2 \times 10^{-32} \mu\text{W}$.

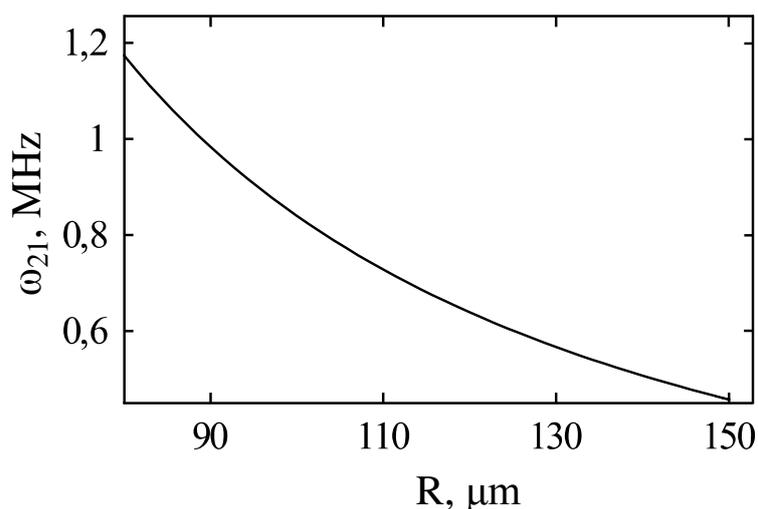


Рис. 7. Зависимость частоты электромагнитного излучения единичной незаряженной капли, находящейся во внешнем электростатическом поле, от радиуса капли, рассчитанная при прочих значениях физических величин, что на рис. 5.

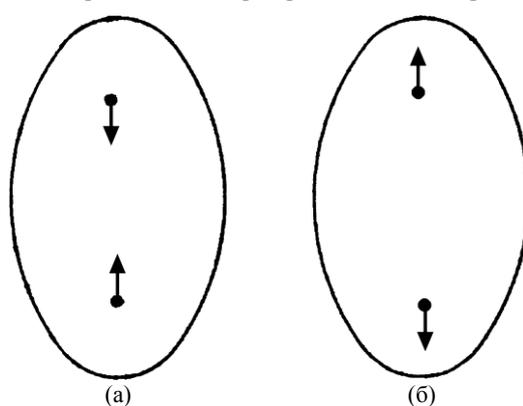


Рис. 8. Схема смещения центров индуцированных зарядов в расчетах первого порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций. Рис. 8а,б относятся к моментам времени, различающимся на половину периода.

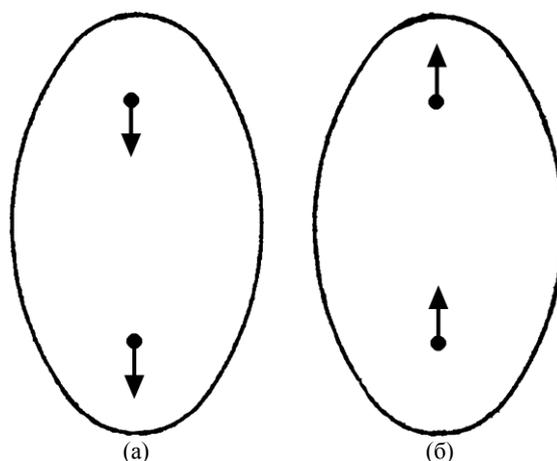


Рис. 9. Схема смещения центров индуцированных зарядов в расчетах второго порядка малости по безразмерной амплитуде осцилляций, когда возбуждается трансляционная мода. Рис. 9а,б относятся к моментам времени, различающимся на половину периода.

Интегральная интенсивность электромагнитного излучения из облака диаметром 10 км будет в $\approx 5 \times 10^{20}$ больше, а именно: $I_{in} \sim 8 \times 10^{-12} \mu\text{W}$, если условно принять для оценки по порядку величины, что все капли имеют одинаковый размер $R = 30 \mu\text{m}$.

Расчеты показывают, что с увеличением размера облачных капель мощность излучения увеличивается крайне слабо, поэтому данные

зависимости не приводятся. Зависимость интенсивности излучения от радиуса капли будет более выражена, если при разложении формы равновесной поверхности капли $r(\theta)$ учитывать слагаемые с точностью до $\sim e^4$.

На рис. 2 и 3 приведены характеристики излучения в зависимости от напряженности внешнего электрического поля. Видно, что с увеличением напряженности электроста-

тического поля интенсивность излучения быстро увеличивается: при увеличении напряженности поля в 3 раза интенсивность излучения увеличивается на порядок.

На рис. 4 приведена зависимость частоты излучения (частоты осцилляций капли) от радиуса сферической капли. С увеличением размера внутриоблачной капли частота излучения быстро снижается по примерно гиперболическому закону: с увеличением радиуса капли на порядок частота колебаний уменьшается в тридцать раз.

Проведем оценку интенсивности фонового дипольного электромагнитного излучения для второго источника излучения, связанного со свободно падающими в облаке гидрометеорами, коагулирующими с более мелкими незаряженными капельками, когда возбуждение трансляционной моды связано с возбуждением всего двух соседних мод, с $j-1 = 20$, $j = 21$ капли со средними характеристиками: $R = 100 \mu\text{m}$, и напряженностью внешнего поля $E_0 = 50 \text{ В/см}$ ($\sim 1 \times 10^{-3} E_{0\text{кр}}$ при $R = 80 \mu\text{m}$ и $\sim 2 \times 10^{-3} E_{0\text{кр}}$ при $R = 150 \mu\text{m}$). Тогда интенсивность дипольного электромагнитного излучения при возбуждении колебаний капель за счет микрофизических внутриоблачных процессов (коагуляции с более мелкими, испарения, конденсации, гидродинамического и электрического взаимодействия с соседними каплями) составит $I \sim 1 \times 10^{-29} \mu\text{W}$. Интегральная интенсивность электромагнитного излучения от всех гидрометеоров из грозового облака диаметром 10 км будет в $\approx 5 \times 10^{14}$ раз больше: $I_{\text{ин}} \sim 7 \times 10^{-15} \mu\text{W}$.

На рис. 5–7 приведены графики, связанные со вторым источником излучения, аналогичные представленным на рис. 2–4. Из сравнения данных на рис. 5–7 с данными рис. 2–4 несложно видеть, что электромагнитное излучение осциллирующей поверхности незаряженных гидрометеоров существенно больше (на три порядка) по сравнению с излучением мелких капелек. Но если брать интегральное излучение из облака, следует учесть, что концентрация гидрометеоров с $R \approx 100 \mu\text{m}$ ниже на шесть порядков, чем концентрация мелких капелек с $R \approx 3 \mu\text{m}$. В итоге по порядку величины интегральная интенсивность излучения облака определится именно мелкими капельками.

Если принять, что возбуждены не две соседние моды, а целый диапазон соседних мод от j до $j + m$, то интегральная интенсивность излучения увеличится примерно в m раз.

Имея в виду существующее различие в интенсивностях и в частотах дипольного излучения незаряженной капли, осциллирующей в однородном внешнем поле, отметим, что схема

движения «центров» индуцированных зарядов противоположных знаков, реализующегося при осцилляциях капли в расчетах первого порядка [10], приведена на рис. 8а,б.

На рис. 9а,б представлена схема движения зарядов, реализующегося в расчетах второго порядка малости при возбуждении трансляционной моды, служащего основой для расчета квадратичной поправки, обсуждаемой в данной работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Асимптотический расчет квадратичной по малому параметру (безразмерной амплитуде осцилляций) ε поправки к интенсивности дипольного электромагнитного излучения незаряженной электропроводной капли, совершающей осцилляции конечной амплитуды во внешнем электростатическом поле, показал, что она по порядку величины слабее основного дипольного излучения примерно в ε раз, но должна приниматься во внимание хотя бы потому, что приходится на более высокие (на порядок) частоты [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Калечиц, В.И., Нахутин, И.Е., Полуэктов, П.П., О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков, *ДАН СССР*, 1982, т. 262, № 6, с. 1344.
2. Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., Голованов, А.С., Рыбакова, М.В., Электромагнитное излучение, генерируемое капиллярными осцилляциями заряженных капель, *ЖТФ*, 2002, т. 72, № 1, с. 8.
3. Богатов, Н.А., Электромагнитное поле, генерируемое капиллярными колебаниями капель, *Сборник тезисов докладов VI Международной конференции «Солнечно-земные связи и физика предвестников землетрясений»*, Петропавловск-Камчатский. 9–13 сентября 2013. *ДВО РАН*, с. 11.
4. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Теория поля*. М.: Наука, 1973. 504 с.
5. Левич, В.Г., *Курс теоретической физики*. Т.1. М.: Наука, 1969. 912 с.
6. Григорьев, А.И., Колбнева, Н.Ю., Ширяева, С.О., Квадрупольное электромагнитное излучение осциллирующей заряженной капли, *ЖТФ*, 2017, т. 87, № 6, с. 914.
7. Качурин, Л.Г., *Физические основы воздействия на атмосферные процессы*. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 463 с.
8. Горелик, А.Г., Козлов, А.И., Стерлядкин, В.В., Рассеяние радиоволн на несферических и осциллирующих дождевых каплях, *Научный вестник МГТУ ГА*, 2012, т. 176, с. 25.
9. Ширяева, С.О., Колбнева, Н.Ю., Григорьев, А.И., Артёмова, Т.К., Излучение электромагнитных волн незаряженной каплей, осциллирующей в

- электростатическом поле, *ЖТФ*, 2015, т. 85, № 4, с. 20.
10. Shiryayeva, S.O., Grigor'ev, A.I., Kolbneva, N.Yu., Asymptotic Calculation of the Intensity of Dipolar Electro-magnetic Radiation of an Uncharged Drop Oscillating in the Electrostatic Field, *Surf. Eng. Appl. Electrochem.*, 2018, vol. 54, no. 1, p. 20.
 11. Григорьев, А.И., Ширяева, С.О., О нелинейном и линейном электромагнитном излучении осциллирующей заряженной капли, *ЖТФ*. 2016, т. 86, № 12, с. 129.
 12. O' Kanski, C.J., Thacher, H.C., The distortion of aerosol droplets by an electric field, *J. Phys. Chem.*, 1953, vol. 57, p. 955.
 13. Cheng, K.J., Capillary oscillations of drop, *Phys. Lett.*, 1985, vol. A112, no. 11, p. 392.
 14. Taylor, G.I., Disintegration of water drops in an electric field, *Proc. Roy. Soc., London*, 1964, vol. A280, p. 383.
 15. Brasier-Svith, P.R., The stability of charged drops in uniform electric fields, *Quart J. R. Met. Soc.*, 1972, vol. 98, p. 434.
 16. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Гидродинамика*. М.: Наука, 1976. 733 с.
 17. Ландау, Л.Д., Лифшиц, Е.М., *Электродинамика сплошных сред*. М.: Наука, 1982. 620 с.
 18. Найфе, А.Х., *Методы возмущений*. М.: Мир, 1976. 455 с.
 19. Nayfeh, A.H., The method of multiple scale and non-linear dispersive waves. *J. Fluid Mech.*, 1971 vol. 48, Pt.3., p. 463.
 20. Kolbneva, N.Yu., Shiryayeva, S.O., Kuz'michev, Yu.B., On the Size of Induced Charges and the Electrostatic Dipole of a Prolate Conducting Spheroid Positioned Collinear to a Uniform Electrostatic Field, *Surf. Eng. Appl. Electrochem.*, 2017, vol. 53, no. 1, p. 20.
 21. Варшалович, Д.А., Москалев, А.Н., Херсонский, В.К., *Квантовая теория углового момента*. Л.: Наука, 1975. 436 с.
 22. Мазин, И.П., Шметер, С.М., *Облака. Строение и физика образования*. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 280 с.
 23. Мазин, И.П., Хргиан, А.Х., Имянитов, И.М., *Облака и облачная атмосфера*. Справочник. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.
 24. Стерлядкин, В.В., Натурные измерения колебаний капель осадков, *Известия АН СССР*, 1988, т. 24, № 6, с. 613.
 25. Beard, K.V., Tokay, A.A., The field study of small raindrop oscillation, *Geophys. Res. Lett.*, 1991, vol. E1, no. 12, p. 2257.
 26. Beard, K.V., Cloud and Precipitation Physics Research 1983–1986, *Rev. Geophys.*, 1987, vol. 25, no. 3, p. 357.

Summary

An asymptotic calculation of a dipole electromagnetic radiation of an uncharged conductive drop oscillating with a finite amplitude in an external electrostatic field to within the second order of smallness inclusive on the relation of the amplitude of oscillations to the radius of an initial drop is carried out. It is shown that the first mode of oscillations is excited in the calculation of the second order of smallness. As a result, the centers of the induced charges with different signs will synchronously oscillate, and the drop will radiate electromagnetic waves of dipolar type, forming the nonlinear correction to intensity of dipole radiation of the first order of smallness. An assessment of the intensity of electromagnetic radiation of this correction and of the width of a strip of frequencies depending on the size of a drop and the strength of an external electrostatic field is carried out.

Keywords: uncharged drop, ideal liquid, electrostatic field, induced charge, dipole radiation