

О силе электростатического взаимодействия между двумя проводящими дисками

С. И. Гращенко

Псковский государственный университет,
г. Псков, 180000, Россия, e-mail: grasi@mail.ru

Поступила в редакцию 06.07.2020

После доработки 01.10.2020

Принята к публикации 08.10.2020

Проведен анализ электростатического взаимодействия двух тел в форме дисков с общей осью вращения и тела в форме диска с телом в форме шара. Рассмотрены проводящие тела с заданными зарядами на их поверхностях в отсутствие внешнего поля. Учтено влияние электростатической индукции на их взаимодействие. Анализ проведен на основе метода конечных элементов высоких порядков с h -адаптацией. Расчеты показали, что при удалении тел друг от друга на расстояниях, сравнимых с размерами тел, сила взаимодействия заряженного и незаряженного тел определяется в основном формой незаряженного тела.

Ключевые слова: электростатическое взаимодействие, заряженные проводящие тела, метод конечных элементов

УДК 537.217

DOI: 10.5281/zenodo.4455885

ВВЕДЕНИЕ

Расчет сил взаимодействия двух заряженных проводящих тел важен для анализа различных физических процессов. В этих процессах при близких расстояниях между телами существенную роль начинает играть влияние электростатической индукции на взаимодействие между ними. В случае шаров учет этого взаимодействия при заданных зарядах тел возможен на основе аналитического решения [1, 2]. Для тел, форма которых отлична от сферической, рассматривалось лишь взаимодействие сфероидальных тел, размеры полуосей которых не слишком сильно отличаются друг от друга [3]. С практической точки зрения представляет интерес и вычисление силы взаимодействия между телами с отличными от сфероидальной формами. В связи с этим в данной работе проводится анализ взаимодействия тел в форме дисков с общей осью вращения и взаимодействия тела в форме диска с телом в форме шара.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как известно, распределение потенциала φ в окрестности проводников при заданных потенциалах на их поверхностях однозначным образом находится из решения уравнения Лапласа [4]:

$$\Delta\varphi = 0. \quad (1)$$

В настоящее время имеется ряд компьютерных программ, позволяющих находить численное решение исходной системы диффе-

ренциальных уравнений методом конечных элементов. Поиск распределения некоторой величины, являющейся решением уравнения (1) при заданных ее значениях на границах некоторой расчетной области, является, как правило, стандартным обучающим примером, на котором описываются особенности использования той или иной программы в ее руководстве. Ввиду большого количества литературы по данному вопросу (см., например, [5, 6]) в данной статье подробности применения этого метода к решению уравнения (1) опускаются. По найденному распределению потенциала можно найти распределение напряженности \vec{E} электрического поля, а по распределению напряженности вблизи поверхности проводящего тела найти действующую на тело силу с помощью выражения [7]:

$$\vec{F} = -\frac{\epsilon_0}{2} \oint_S E^2 \vec{n} dS. \quad (2)$$

Здесь \vec{n} – единичный вектор нормали к элементу поверхности, направленный внутрь тела; S – площадь поверхности тела; ϵ_0 – электрическая постоянная.

Для того чтобы от рассмотренной задачи перейти к задаче о вычислении силы взаимодействия двух проводящих тел с заданными зарядами, воспользуемся известной формулой [4], связывающей эту силу F и заряды Q_1 и Q_2 соответственно первого и второго тел:

$$F = k_{11}Q_1^2 + k_{12}Q_1Q_2 + k_{22}Q_2^2. \quad (3)$$

Здесь k_{11} , k_{12} , k_{22} – коэффициенты, значения которых зависят от размеров и формы тел и расстояния между ними.

В дальнейшем при расчетах будем полагать, что отталкиванию тел в этой формуле соответствует положительное значение F , а притяжению – отрицательное. Таким образом, задача о нахождении силы между телами при заданных зарядах сводится к задаче о нахождении коэффициентов k_{11} , k_{12} , k_{22} , для решения которой достаточно три раза выбрать некоторые значения потенциалов φ_1 и φ_2 и в каждом случае по формуле (2) определить силу взаимодействия между телами, а по теореме Гаусса – заряды этих тел.

Подставляя полученные значения величин в формулу (3), получим три уравнения для расчета трех неизвестных коэффициентов k_{11} , k_{12} , k_{22} . Метод конечных элементов на основе этого подхода прекрасно работает, если расстояния между телами не слишком велики, а форма тел мало отличается от сферической [3].

Рассмотрим причину этого обстоятельства. В методе конечных элементов область, в которой ставится задача обнаружить распределение той или иной величины, разбивается на множество подобластей. В результате получается расчетная сетка, на основе которой генерируется набор базисных функций, используемых для аппроксимации искомого распределения. Таким образом, метод конечных элементов по своей сути является приближенным. Поэтому вследствие ошибок вычисления получаемое распределение потенциала флуктуирует около некоторого истинного распределения. При вычислении поверхностных интегралов от функций, содержащих эти распределения, влияние этих флуктуаций накапливается и значения таких интегралов могут рассчитываться со значительной погрешностью. В нашем случае это приводит к заметному понижению точности расчета сил по формуле (2) в ситуации, когда изменение напряженности вдоль поверхности тела мало по сравнению с ее средним значением. Поэтому для анализа электростатического взаимодействия тел необходимо использовать методы, позволяющие увеличить точность вычисления напряженности электростатического поля.

Одним из таких методов является h -адаптация. Под h -адаптацией понимают итерационный процесс изменения расчетной сетки, ведущий к уточнению искомого результата. В простейшем случае, который и будет рассматриваться в данной работе, исходя из значения некоторого параметра η , вычисляемого для каждой ячейки на основе полученного решения, принимается решение о разбиении этой ячейки на две. Далее вновь находится решение задачи с использованием новой сетки. Процесс повторяется, пока число степеней свободы,

понимаемое в данном случае как общее количество неизвестных в разложении искомого решения по базисным функциям, не превысит некоторого значения, как правило, зависящего от доступной оперативной памяти компьютера, или точность искомой величины, вычисляемая на основе некоторого критерия, не превысит требуемую.

Отметим, что та или иная схема h -адаптации не обязательно будет вести к монотонному увеличению точности расчета сил с увеличением числа ячеек, так как вполне возможна ситуация, когда, начиная с некоторого момента, при уменьшении размеров ячеек максимальные отклонения потенциала от истинного значения будут уменьшаться, а отклонения градиента расти.

Еще одним из методов, позволяющих совместно увеличить точность расчетов искомого распределения, является использование метода конечных элементов высоких степеней. Он основан на использовании иерархических базисных функций [8]. Рассмотрим их виды на примере сетки с треугольными ячейками. Функции, связанные с вершинами, представляют собой линейные функции барицентрических координат [9], значение каждой из которых равно единице в одном из узлов и нулю во всех остальных.

В классическом методе конечных элементов эти функции могут иметь вид, отличный от линейного, но отсутствуют описанные далее. Функции, ассоциированные с ребрами, представляют собой базисные функции, каждая из которых равна нулю во всех вершинах и на двух ребрах и описывается с помощью полиномов некоторого порядка. Функции, ассоциированные с ячейками, называемые также внутренними функциями, представляют собой базисные функции, каждая из которых равна нулю на границе ячейки и описывается с помощью полиномов некоторого порядка. Более полное описание указанных функций можно найти в работах [8–9].

Для дальнейшего изложения важен лишь факт возможности задания отдельного порядка для функций, связанных с ребрами, и для функций, ассоциируемых с ячейкой, причем эти порядки могут быть разными для разных ячеек и ребер. Увеличение порядка базисных функций позволяет провести аппроксимацию потенциала при меньшем количестве ячеек большего размера.

В данной работе мы исходим из предположения, что такой подход позволит уменьшить флуктуации градиента потенциала и тем самым увеличить точность вычисления сил, дейст-

вующих на тела. К сожалению, четкие критерии выбора оптимальных порядков базисных функций для решения рассматриваемой задачи неизвестны, поэтому в данной работе ограничиваются простым подбором этих порядков.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА

Прежде чем перейти к выбору конкретного метода h -адаптации, остановимся на тестовых примерах, на основе которых он будет исследоваться. В качестве первого примера будет использоваться расчет силы взаимодействия двух проводящих шаров, радиусы которых отличаются в пять раз, а кратчайшее расстояние h между их поверхностями в десять раз больше радиуса R большего шара. Точность расчетов будет оцениваться как по разности модулей сил, действующих на тела, которые по третьему закону Ньютона при отсутствии погрешностей должны быть равны, так и сравнением с расчетом на основе аналитического решения [2].

Во втором примере используются одинаковые диски с общей осью симметрии радиусом R и толщиной $D = 2R$ при расстоянии между их поверхностями, равном $10R$. Точность оценивается только по разности сил. В тестовых расчетах на поверхностях тел задаются потенциалы, а заряды тел, используемые в формулах работы [2], находятся на основе теоремы Остроградского–Гаусса. Потенциал меньшей сферы или одного из дисков полагается равным нулю, а второго тела – ненулевым. Действующая на тело сила вычисляется с помощью выражения (2). Если искомые распределения осесимметричны, как это имеет место в данном случае, трехмерную задачу можно свести к двумерной. Исходная двумерная область разбивается на треугольные ячейки с помощью алгоритма Делоне–Вороного [10], исходя из размеров ребер этих ячеек на границе указанной области. Пример исходной расчетной сетки для дисков показан на рис. 1.

Нижняя граница области соответствует оси симметрии задачи. Для удобства отображения отдельных элементов соотношения их размеров отличаются от реально используемых. Радиус внешней границы полагался равным $100R$. Потенциал на удаленной границе считается равным нулю, а на границе, соответствующей оси симметрии задачи, задавать какие-либо условия нет необходимости [3]. Для обоих примеров подход на основе метода конечных элементов без h -адаптации и использования конечных элементов высоких порядков [3] не позволяет получить значения сил с точностью, пригодной хотя бы для грубой оценки.

Для построения сетки и проведения последующих расчетов использовался программный пакет NGSolve [9, 11]. Данный пакет представляет собой набор созданных с использованием языка C++ библиотек, предназначенных для построения соответствующих базисных функций на основе полиномов высоких степеней, к которым можно обращаться из скриптов, написанных на языке python. Для этого применяется модуль с названием ngsolve. Этот модуль можно использовать с известным модулем построения сеток netgen и модулем научных расчетов scipy. В результате на языке python можно полностью описать эту расчетную процедуру. Соответствующая документация, включая способы установки указанных модулей в различных операционных системах, имеется на сайте ngsolve.org, а исходные коды содержатся в репозитории <https://github.com/NGSolve/ngsolve>.

Перейдем теперь к схеме h -адаптации, используемой в данной работе. Так как нам необходимо увеличивать точность расчета напряженностей, то разумным будет пытаться использовать такие схемы адаптации, в которых значения параметра η вычисляются с учетом распределения градиента потенциала. В работе [12] для подобных задач было предложено аппроксимировать полученное распределение градиента искомой величины с помощью набора базисных функций, отличающегося от исходного, а решение о разбиении ячейки принимать на основе разности полученного распределения и его аппроксимации.

Подчеркнем, что аппроксимируется именно градиент, поэтому для этой аппроксимации используются векторные базисные функции, каждая из которых описывает некоторое векторное поле в пределах данной ячейки. Кроме того, при вычислении параметра η необходимо учесть, что при равных размерах ячеек погрешность расчета силы, действующей на то тело, вблизи которого напряженность больше, оказывается большей [3]. Поэтому надо учитывать и модуль напряженности поля. Исходя из этих соображений было составлено следующее выражение для рассматриваемого параметра, которое себя хорошо зарекомендовало:

$$\eta_k = \int_{\Omega_k} E^2 dV \int_{\Omega_k} (\vec{E} - \vec{E}_e)^2 dV.$$

Здесь η_k – параметр, по значению которого судят о необходимости разбиения k -й ячейки; Ω_k – область, получаемая вращением k -й двумерной ячейки вокруг оси симметрии тела; V – ее объем.

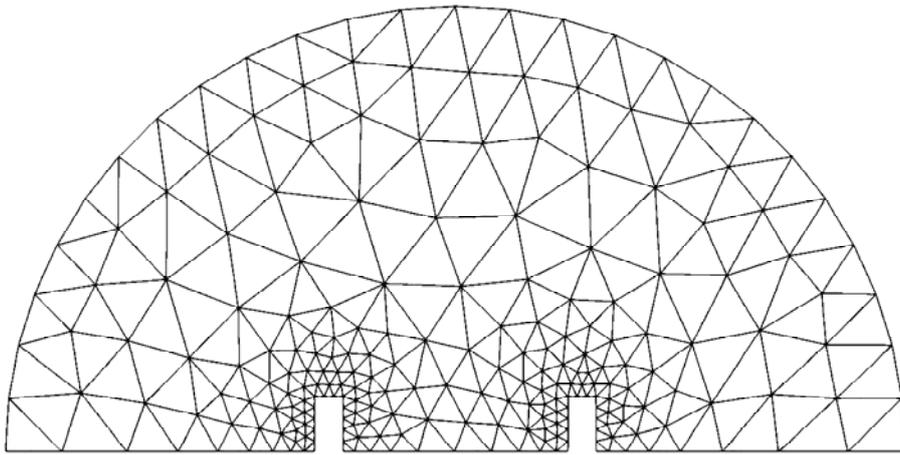


Рис. 1. Структура исходной расчетной области.

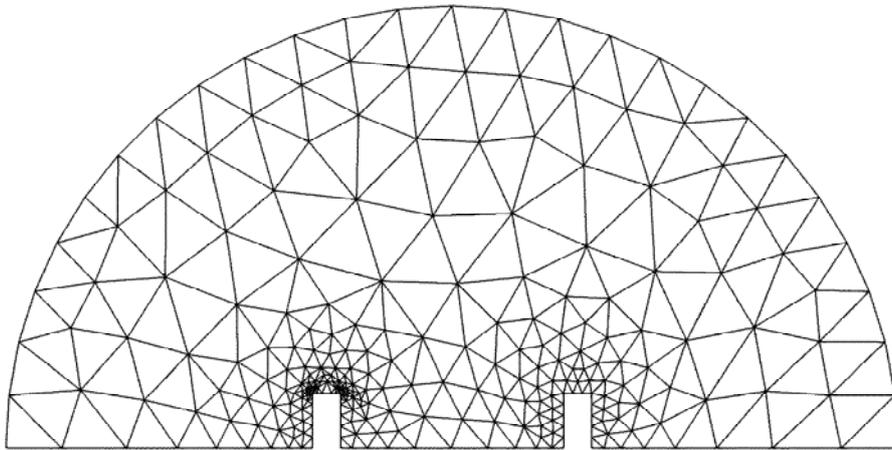


Рис. 2. Сетка после нескольких шагов h -адаптации.

Такой подход, несмотря на реальную двумерную сетку, использовался потому, что с формальной точки зрения именно такие области используются при расчете распределения потенциала. Естественно, от данных трехмерных интегралов в процессе расчета переходили к двумерным с помощью тех же преобразований, которые использовались для перехода от рассматриваемой трехмерной задачи к двумерной. Искомое распределение \vec{E} напряженности электрического поля получалось из найденного распределения потенциалов. Распределение \vec{E}_e производилось экстраполяцией полученного распределения \vec{E} с помощью векторных базисных функций.

Для справки отметим, что для экстраполяции распределения \vec{E} использовался описанный в работах [9, 11] набор базисных функций, составляющих пространство Соболева H^1 , а для экстраполяции распределения \vec{E}_e – описанный в работе [9] набор базисных функций, составляющих пространство $H(\text{div})$. Используемые обозначения функциональных пространств совпадают с общепринятыми и с обозначениями работы [9].

Порядки соответствующих видов базисных функций, относящихся к разным пространствам, полагались одинаковыми. На каждом шаге итерации разбиение проводилось для тех ячеек, для которых выполнялось условие $\eta_k > q\eta_{\max}$, где η_{\max} – максимальное значение η_k , q – так называемый параметр прогрессии, значение которого находится между нулем и единицей. Как показали расчеты, при $q > 0,5$ увеличение значения этого параметра приводило лишь к увеличению времени счета, без увеличения точности расчета сил. Поэтому данное значение в дальнейшем полагалось равным 0,5. На расстояниях от внешней границы, меньших $20R$ ее радиуса, h -адаптация не проводилась, и значения параметра η_k для соответствующих ячеек не учитывались при нахождении η_{\max} . Поэтому размер ячеек вблизи этой границы зависел в основном от заданного расстояния между находящимися на ней вершинами ячеек, которое полагалось равным $5R$. Характер изменения сетки в процессе h -адаптации иллюстрируется рис. 2.

Ненулевой потенциал задан для левого диска. Как и ранее, для удобства отображения отдельных элементов соотношения их размеров

Таблица 1. Нормированные значения сил взаимодействия дисков радиусом R и толщиной $D = 2R$ и шаров радиусом R

h/R	Диски		Шары	
	Ft/Q^2	$k_{11}t$	Ft/Q^2	$k_{11}t$
0,01	0,142	-0,412	0,153	-0,9263
0,05	0,139	-0,294	0,150	-0,2689
0,1	0,136	-0,215	0,147	-0,1533
0,5	0,112	-0,0524	0,121	-0,0299
1	0,0894	-0,0184	0,0944	-0,0101
2	0,0577	$-4,12 \times 10^{-3}$	0,0585	$-2,16 \times 10^{-3}$
4	0,0274	$-5,21 \times 10^{-4}$	0,0273	$-2,68 \times 10^{-4}$
6	0,0156	$-1,21 \times 10^{-4}$	0,0155	$-6,25 \times 10^{-5}$

отличаются от реально используемых. Расчеты для указанных выше тестовых примеров показали, что использование ассоциированных с ребрами и ячейками базисных функций шестого порядка с увеличением в тонком слое толщиной $0,001R$ вблизи поверхности тел порядка этих функций до десяти позволяет получать значения сил с точностью до четырех значащих цифр для сфер и трех – для дисков. Точность в указанных случаях оценивалась сравнением полученных модулей сил, действующих на разные тела. Погрешность расчета сил, действующих на сферы, оцененная сравнением с аналитическим решением, оказалась меньше 0,5%. С учетом сказанного ранее можно считать, что она почти полностью обусловлена конечностью рассматриваемой области. С уменьшением расстояния между телами точность расчетов возрастала. В итоге мы приходим к выводу, что найденные параметры расчета позволяют вычислять силы взаимодействия между дисками толщиной $D = 2R$ при $h < 10R$ с точностью как минимум до трех значащих цифр.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДИСКОВ И ДИСКА С ШАРОМ

Рассмотрим взаимодействие двух одинаковых дисков. В этом случае коэффициенты k_{11} и k_{22} равны. Поэтому для расчета значений коэффициентов, входящих в выражение (3), достаточно системы их двух уравнений. Для получения этих уравнений рассматривались две ситуации: когда потенциалы дисков равны и когда только один диск имеет ненулевой потенциал.

В табл. 1 для дисков радиусом R и толщиной $D = 2R$ приведены результаты расчетов величин $Ft/Q^2 = (k_{11}+k_{12}+k_{22})$ и $k_{11}t$, где $t = 4\pi\epsilon_0 R^2$. Первая величина представляет собой нормированную на Q^2/t силу взаимодействия одинаково заряженных тел, заряд каждого из которых равен Q . Вторая величина представляет собой нормированную на Q_1^2/t силу взаимодействия двух тел в случае,

когда заряжено только первое тело. Величина h в табл. 1 является кратчайшим расстоянием между их поверхностями.

Для сравнения в этой же табл. 1 приведены значения указанных величин и для одинаковых шаров радиусом R . С учетом равенства коэффициентов k_{11} и k_{22} из этой таблицы в случае необходимости можно легко найти и значения коэффициента k_{12} . Так как приведенные величины вычисляются через значения сил для двух ситуаций, то их относительные погрешности расчета искомых коэффициентов больше, чем погрешности для каждой из сил по отдельности. Поэтому предельное расстояние между телами несколько меньше, чем в вышерассмотренных тестовых примерах.

Из табл. 1 видно, что на больших расстояниях сила взаимодействия заряженного тела с незаряженным больше для дисков, а на малых – для шаров. Такая же закономерность наблюдается и для силы взаимодействия одинаково заряженных тел. Кроме того, как на малых, так и на больших расстояниях сила взаимодействия дисков и сила взаимодействия шаров в случае одинаково заряженных тел гораздо меньше отличаются друг от друга, чем в случае взаимодействия заряженного тела с незаряженным.

Отметим также, что уже при относительном расстоянии между поверхностями тел, равном четырем, сила взаимодействия одинаково заряженных сфер и дисков отличается от силы, вычисленной по закону Кулона для точечных зарядов, менее чем на 2%. Время расчета силы взаимодействия между телами с использованием процессора Intel® Core® i3-210 менялось в зависимости от рассматриваемой ситуации, от нескольких минут до нескольких десятков минут, а максимальное число степеней свободы от $1,5 \times 10^5$ до $8,5 \times 10^5$. Для проведения расчетов достаточно двух гигабайт свободной оперативной памяти.

В табл. 2 приведены результаты расчетов для дисков радиусом R и толщиной $D = R/2$. Расстояния при $h/R > 0,5$ выбраны таким образом, чтобы для каждой строчки данной

Таблица 2. Нормированные значения сил взаимодействия дисков радиусом R и толщиной $D = R/2$

h/R	Диски		$F_f t/Q^2$
	Ft/Q^2	$k_{11}t$	
0,005	0,537	-0,343	0,577
0,01	0,533	-0,326	0,573
0,05	0,508	-0,243	0,544
0,5	0,327	-0,0476	0,325
1,51	0,158	$-5,55 \times 10^{-3}$	0,139
1,55	0,155	$-5,16 \times 10^{-3}$	0,135
1,6	0,150	$-4,70 \times 10^{-3}$	0,130
2	0,117	$-2,43 \times 10^{-3}$	0,101
2,5	0,0888	$-1,14 \times 10^{-3}$	0,0757
3,5	0,0548	$-3,29 \times 10^{-4}$	0,0471

Таблица 3. Нормированные значения сил взаимодействия диска радиусом R и толщиной $D = 2R$ (тело 1) и шара радиусом R (тело 2)

h/R	Ft/Q^2	$k_{11}t$	$k_{22}t$
0,01	0,0511	-0,515	-1,06
0,1	0,212	-0,105	-0,214
1	0,0915	-0,0101	-0,0172
2	0,0579	$-2,21 \times 10^{-3}$	$-4,26 \times 10^{-3}$

таблицы была соответствующая строчка в предыдущей (табл. 1) с таким же расстоянием между центрами тел. Соответствующие строчки в обеих таблицах выделены рамкой. Из табл. 1 и 2 видно, что для более тонких дисков сила взаимодействия заряженного диска с незаряженным во всех случаях меньше, чем для шаров с тем же расстоянием между центрами тел. То есть индукционные эффекты в этих случаях для дисков слабее, чем для шаров. Сила же взаимодействия одинаково заряженных тел на больших расстояниях между их центрами меньше для более тонких дисков, а на малых – для более толстых.

Отметим, что аналогичная ситуация наблюдается для шаров и сплюснутых сфероидов [3]. При этом, как и для сплюснутых сфероидов, силы взаимодействия одинаково заряженных дисков и шаров оказываются достаточно близки друг к другу. Также в табл. 2 приведены нормированные значения силы F_f взаимодействия двух одинаково однородно заряженных бесконечно тонких дисков, положение которых совпадает с положениями наиболее удаленных друг от друга граней рассматриваемых дисков.

Известно, что, как и внутри проводников, между бесконечными параллельными поверхностями с одинаковым однородным распределением плотности заряда потенциал распределен однородно. Исходя из этого нетрудно прийти к предположению, что для достаточно тонких одинаково заряженных дисков их сила взаимодействия при достаточно малом расстоянии между ними должна быть близка к силе F_f взаимодействия двух одинаково однородно заряженных бесконечно тонких дисков с таким

же зарядом, положения которых совпадают с положениями наиболее удаленных друг от друга граней рассматриваемых тел, что и демонстрируют результаты расчетов этой силы.

Расчет сил для бесконечно тонких дисков проводился с использованием численного интегрирования с помощью функции `pquad` модуля `scipy`. Вывод соответствующей формулы для сил элементарен и здесь не приводится.

В табл. 3 приведены результаты расчетов в случае взаимодействия диска радиусом R и толщиной $D = 2R$ и шара радиусом R . Очевидно, что для нахождения значений k_{11} , k_{12} , k_{22} некоторые значения потенциалов выбирались три раза и составлялась система из трех уравнений. Из сравнения данных табл. 1 и 3 видно, что с ростом расстояния между телами сила взаимодействия заряженного диска с незаряженной сферой стремится к силе взаимодействия заряженной сферы с незаряженной, а сила взаимодействия незаряженного диска с заряженной сферой стремится к силе взаимодействия заряженного и незаряженного дисков.

ВЫВОДЫ

Рассмотрено электростатическое взаимодействие заряженных проводящих дисков, имеющих общую ось симметрии. Показано, что уменьшение толщины дисков уменьшает силу взаимодействия заряженного тела с незаряженным, а сила взаимодействия одинаково заряженных тел на больших расстояниях между центрами тел меньше для более тонких дисков, а на малых – для более толстых. Кроме того, на примере взаимодействия диска и шара показано, что при удалении тел друг от друга уже на

расстояниях, сравнимых с размерами тел, сила взаимодействия заряженного и незаряженного тел определяется в основном формой незаряженного тела.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Документация модуля `ngsolve` недостаточно подробна и в ней не отражены некоторые особенности расчета поверхностных интегралов от функций, содержащих градиенты искомой величины. Поэтому ниже приводится образец расчета поверхностного интеграла по границе с условием Дирихле на примере расчета потока напряженности через поверхность тела.

```
V = H1(mesh, order=6,
dirichlet='in1|in2|out')
u = GridFunction(V) #u - potential
distribution
.....# calculation u
n = specialcf.normal(mesh.dim)
gradux= GridFunction(V)
graduy= GridFunction(V)
gradux.Set(grad(u)[0])
graduy.Set(grad(u)[1])
flux=2.*pi*Integrate(
y*(gradux*n[0] + graduy*n[1]),
mesh, BND, define-
don=mesh.Boundaries('in1'))
```

В данном примере предопределенная в модуле `ngsolve` переменная `y` играет роль полярного радиуса цилиндрической системы координат (`a` в качестве аппликаты этой системы используется предопределенная переменная `x`). Распределение потенциала описывается переменной `u`. Функция `Integrate` является предопределенной в модуле `ngsolve`, объект `pi` из модуля `math` содержит значение числа π . Учитывается, что нормаль `n` к поверхности тела направлена от расчетной области. Граница рассматриваемого тела промаркирована как `'in1'`.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davis M.H. Two charged spherical conductors in a uniform electric field: forces and field strength. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 1964, vol. 17, no. 4, p. 499. doi: <https://doi.org/10.1093/qjmam/17.4.499>
2. Гращенко С.И. О силе электростатического взаимодействия между двумя проводящими шарами, *ЖТФ*, 2011, т. 81, № 7, с. 13.

3. Гращенко С.И. О силе электростатического взаимодействия между двумя проводящими сферами, *ЖТФ*, 2020, т. 90, № 5, с. 714. doi: [10.21883/JTF.2020.05.49169.36-19](https://doi.org/10.21883/JTF.2020.05.49169.36-19)
4. Смайт В. *Электростатика и электродинамика*, М.: ИЛ, 1954. 606 с.
5. Hecht F. New development in freefem++, *J. Numer. Math.*, 2012, vol. 20, no. 3-4, p. 251. doi: [10.1515/jnum-2012-0013](https://doi.org/10.1515/jnum-2012-0013)
6. Logg A., Mardal K.-A., Wells G.N. et al. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Berlin: Springer, 2012. 723 p. doi: [10.1007/978-3-642-23099-8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-23099-8)
7. Иродов И.Е. *Основные законы электромагнетизма*, Учебное пособие для студентов вузов, 2-е, стереотип. М.: Высшая школа, 1991. 289 с.
8. Solin P., Segeth K., Dolezel I. *Higher-order finite element methods*, Chapman and Hall/CRC, 2003. 408 p.
9. Zaglmayr S. *Phd thesis "High Order Finite Elements for Electromagnetic Field Computation"*. Johannes Kepler University Linz, 2006. 177 p. URL: <http://www.numa.uni-linz.ac.at/Teaching/phd/Finished/zaglmayr>
10. Lucquin B., Pironneau O. *Introduction to Scientific Computing*. Chichester: Wiley, 1998. 361 p. doi: <https://doi.org/10.1023/A:1004355614429>
11. Schöberl J. *C++11 Implementation of Finite Elements in ngsolve*, ASC Report 30/2014, Institute for Analysis and Scientific Computing, Vienna University of Technology, 2014. 23 p. URL: <http://www.asc.tuwien.ac.at/~schoeberl/wiki/publications/ngs-cpp11.pdf>
12. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1987, vol. 24, no. 2, p. 337. doi: [10.1002/nme.1620240206](https://doi.org/10.1002/nme.1620240206)

Summary

Electrostatic interaction of two conducting objects with preset charges on their surfaces in a zero external field is considered. The electrostatic induction is taken into account. The calculations are carried out by the higher order h -adaptive finite element method. The force of interaction between two conducting coaxial discs is presented. The interaction of an object in the form of a disk and an object in the form of a ball is also considered. Using numerical calculations, it is shown that with increasing the distance between the objects, already at distances comparable with the size of them, the force of interaction between a charged and an uncharged object is determined mainly by the shape of the uncharged object.

Keywords: electrostatic interaction, charged conducting objects, finite element method